

549. Доведіть, що в кожному прямокутному трикутнику відношення квадратів катетів дорівнює відношенню їх проєкцій на гіпотенузу.
550. Доведіть, що діаметр кола, вписаного в рівнобічну трапецію, є середнім пропорційним основ трапеції.
551. Катети прямокутного трикутника відносяться як 2 : 3, а висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює 42 дм. Знайдіть проєкції катетів на гіпотенузу.
552. Гіпотенуза трикутника дорівнює 122 дм, а катети відносяться як 5 : 6. Знайдіть проєкції катетів на гіпотенузу.
553. Знайдіть довжину гіпотенузи, якщо катети відносяться як 2 : 3, а проєкція одного катета на гіпотенузу на 2 см більша за проєкцію другого.
554. Кут $C \triangle ABC$ прямий, проєкції гіпотенузи AB на прямі AC і BC дорівнюють 15 см і 20 см. Знайдіть проєкції катетів на гіпотенузу.
555. Побудуйте два відрізки, знаючи їх суму та їх середнє пропорційне.
556. Побудуйте два відрізки, знаючи їх різницю та їх середнє пропорційне.
557. Доведіть, що в кожному прямокутному трикутнику добуток катетів дорівнює добутку його найменшої висоти і гіпотенузи.
558. Доведіть геометрично нерівність: якщо $a > 0$ і $b > 0$, то $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

ЗАДАЧІ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

559. Знайдіть кути трикутника, якщо їх міри пропорційні числам 3, 4 і 5.
560. Знайдіть кути рівнобічної трапеції, якщо один з них на 30° більший за другий.
561. Знайдіть периметр ромба з кутом 30° , описаного навколо кола радіуса $r = 3$ см.
562. Доведіть, що висота рівностороннього трикутника втричі більша за радіус вписаного кола.
563. Знайдіть довжину хорди, перпендикулярної до діаметра кола, що ділить його на відрізки 2 дм і 8 дм.

§13 Теорема Піфагора

Один з відомих геометрів ХХ ст. академік О. Д. Александров писав: «Теорема Піфагора — це головна і найкраща теорема геометрії». Доводити її можна різними способами, найкраще — з використанням властивостей подібних трикутників.

ТЕОРЕМА 25 (Піфагора). У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.

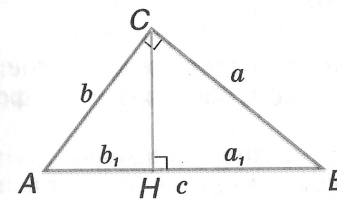
ДОВЕДЕННЯ.

Нехай ACB — довільний прямокутний трикутник, а CH — висота, проведена з вершини прямого кута C (мал. 152). Позначимо: $CB = a$, $AC = b$, $AB = c$, $AH = b_1$, $BH = a_1$.

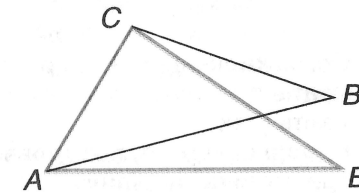
Оскільки $\triangle AHC \sim \triangle ACB$, то $b_1 : b = b : c$, звідки $b^2 = cb_1$.
Оскільки $\triangle CHB \sim \triangle ACB$, то $a_1 : a = a : c$, звідки $a^2 = ca_1$.
Отже, $a^2 + b^2 = ca_1 + cb_1 = c(a_1 + b_1) = c^2$, тобто $c^2 = a^2 + b^2$. \square

Теорема Піфагора дає змогу за двома будь-якими сторонами прямокутного трикутника знайти третю. Наприклад, якщо катети трикутника дорівнюють 3 і 4, то його гіпотенуза $c = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Взагалі, якщо катети трикутника a і b , то його гіпотенуза $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Якщо дано гіпотенузу c і катет b , то другий катет $a = \sqrt{c^2 - b^2}$. Наприклад, якщо гіпотенуза трикутника дорівнює 52 см, а катет 48 см, то другий катет

$$\sqrt{52^2 - 48^2} = \sqrt{(52 - 48)(52 + 48)} = \sqrt{4 \cdot 100} = 20 \text{ (см)}.$$



Мал. 152



Мал. 153