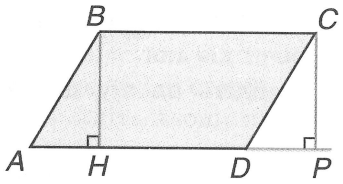
§18 Площі паралелограма і трапеції

1. Площа паралелограма



Мал. 216

Домовимось одну зі сторін паралелограма (і її довжину) називати *основою*, а відстань від основи до прямої, якій належить протилежна сторона, — *висотою* паралелограма. Наприклад, якщо AD — основа паралелограма $ABCD$, то довжина перпендикуляра BH — його висота (мал. 216).

ТЕОРЕМА 30 **Площа паралелограма дорівнює добутку його основи на висоту.**

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай $ABCD$ — довільний паралелограм з основою $AD = a$ і висотою $BH = h$. Доведемо, що його площа $S = ah$ (див. мал. 216).

Якщо BH і CP — перпендикуляри до прямої AD, то трикутники ABH і DCP рівні (за катетом і гіпотенузою). Отже, якщо від площі трапеції $ABCP$ відняти площу $\triangle DCP$ чи від площі трапеції $ABCP$ відняти площу $\triangle ABH$, результати будуть однакові. Перша різниця дорівнює площі S даного паралелограма, друга — площі прямокутника $HBCP$. Отже, площа даного паралелограма дорівнює площі прямокутника $HBCP$, а площа прямокутника $HBCP$ — добутку ah. Тому $S = ah$. □

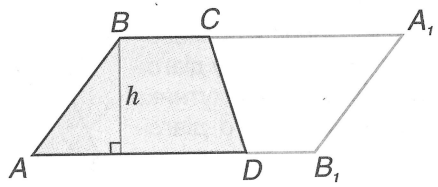
Оскільки ромб — це також паралелограм, то і **площа ромба дорівнює добутку його сторони на висоту.**

2. Площа трапеції

ТЕОРЕМА 31 **Площа трапеції дорівнює добутку півсуми її основ на висоту.**

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай $ABCD$ – довільна трапеція з основами $AD = a$, $BC = b$ (мал. 217). І нехай h — висота цієї трапеції (відстань між прями-



Мал. 217

ми AD і BC). Добудуємо трапецію A_1B_1DC, рівну даній (у якій $CA_1 = AD$ і $DB_1 = BC$). Чотирикутник ABA_1B_1 — паралелограм, бо $A_1B = AB_1$ і $A_1B \parallel AB_1$. Сторона цього паралелограма $AB_1 = a + b$, а висота h, тому його площа дорівнює $(a + b)h$. Площа трапеції становить половину площі паралелограма. Тому її площа

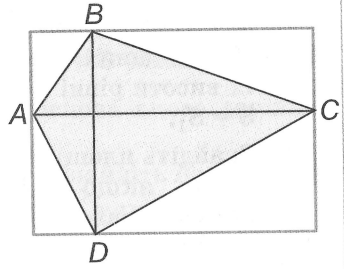
$$S = \frac{1}{2}(a + b)\,h. \square$$

НАСЛІДОК. **Площа трапеції дорівнює добутку її середньої лінії на висоту.**

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

ТЕОРЕМА 32 **Площа опуклого чотирикутника з перпендикулярними діагоналями дорівнює півдобутку діагоналей.**

ДОВЕДЕННЯ.



Мал. 218

Нехай дано опуклий чотирикутник $ABCD$, діагоналі якого AC і BD перпендикулярні (мал. 218). Провівши через кожну вершину пряму, паралельну протилежній діагоналі чотирикутника, можна навколо даного чотирикутника описати прямокутник, сторони якого дорівнюють діагоналям даного чотирикутника. При цьому прямокутник містить удвічі більше прямокутних трикутників, на які чотирикутник $ABCD$ розбивається діагоналями. Отже, площа даного чотирикутника удвічі менша за площу описаного