

ЕНЦИКЛОПЕДІЯ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ

**Схвалено Міністерством освіти і науки,
молоді та спорту України**

Ю. О. Захарійченко, О. В. Школьний,
Л. І. Захарійченко, О. В. Школьна

Повний курс математики в тестах



- ◆ 3000 завдань різної складності
- ◆ Відповіді до письмових завдань

Створено спільно з фахівцями
Українського центру оцінювання якості освіти

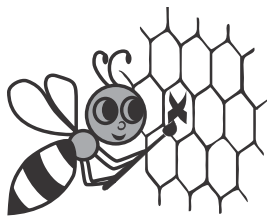
ВИДАВНИЦТВО
РАНОК

ЕНЦИКЛОПЕДІЯ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ

Схвалено Міністерством освіти і науки,
молоді та спорту України

Ю. О. Захарійченко, О. В. Школьний,
Л. І. Захарійченко, О. В. Школьна

Повний курс математики в тестах



5-11

Створено спільно з фахівцями
Українського центру оцінювання якості освіти

УДК 51.1:372.8(0.75.4)
ББК 74.262
З-38

Схвалено до використання в загальноосвітніх навчальних закладах
комісією з математики НМР з питань освіти
МІНІСТЕРСТВА ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
(протокол від 16.06.2011 р. № 2)

Захарійченко Ю. О.

З-38 Повний курс математики в тестах / Ю. О. Захарійченко, О. В. Школьний,
Л. І. Захарійченко, О. В. Школьна.— Х.: Видавництво «Ранок», 2011.— 496 с.—
(Енциклопедія тестових завдань).

ISBN 978-617-540-281-8

Видання являє собою збірник тестових завдань з математики і включає всі основні типи тестових завдань, які використовуються під час оцінювання якості знань. Матеріал посібника структуровано за типами тестових завдань і за тематичними блоками, які відтворюють змістовні лінії сучасного шкільного курсу математики (5–11 класи). До всіх письмових завдань подано відповіді.

Посібник призначено для учнів загальноосвітніх навчальних закладів, абітурієнтів і тих, хто хоче систематизувати й повторити матеріал шкільного курсу математики; вчителів математики.

УДК 51.1:372.8(0.75.4)
ББК 74.262

ISBN 978-617-540-281-8

© Ю. О. Захарійченко, О. В. Школьний,
Л. І. Захарійченко, О. В. Школьна, 2011
© ТОВ Видавництво «Ранок», 2011

Буває мить якогось потрясіння:
Побачиш світ, як вперше у житті.
Звичайна хмара, сіра і осіння,
Пропише раптом барви золоті.

Стоїш, як стогін, під склепінням казки.
Душа прозріє всесвітом очей.
Кричить гілля. З облич спадають маски.
Зі всього світить суть усіх речей.

І до віків блаженька приналежність
Переростає в сяйво голубе.
Прямим проломом пам'яті в безмежність
Уже аж звідти згадуєш себе.

Ліна Костенко

Шановні читачі!

Посібник, який ви тримаєте зараз у руках, є збірником завдань, що охоплюють усі теми шкільного курсу математики для 5–11 класів.

Відмінною особливістю збірника є те, що вперше під однією обкладинкою ми спробували зібрати всі *основні* типи тестових завдань з математики, які зарекомендували себе після багаторічної апробації, під час оцінювання якості знань не тільки в Україні, а й у різних країнах світу. До них належать, зокрема, завдання з вибором однієї правильної відповіді з кількох запропонованих, завдання на достатність даних, завдання на встановлення відповідності між двома множинами об'єктів (логічних пар), завдання на встановлення правильної послідовності дій, завдання з короткою відповіддю (у вигляді одного числа або числового виразу) та завдання з повним розв'язанням (розгорнутою відповіддю).

Зупинимося коротко на особливостях кожного з цих типів завдань.

Завдання з вибором однієї правильної відповіді. Учаснику тестування пропонується завдання, до якого подано кілька відповідей (альтернатив), *тільки одна* з яких є (чи може бути) правильною. Необхідно знайти цю правильну відповідь і певним чином позначити її: наприклад, поставивши відмітку у спеціальному бланку відповідей.

Завдання на достатність даних. Особливістю цих завдань є те, що вони призначені для перевірки не стільки вміння розв'язувати математичну проблему, скільки вміння проводити її логічний аналіз. Завдання на достатність даних

найчастіше містить *неповну* початкову умову проблеми та її вимогу, а також *додаткові дані (1)* і *додаткові дані (2)*. Учаснику тестування потрібно з'ясувати, чи достатньо початкової умови разом із додатковими даними (у різних поєднаннях) для розв'язання проблеми. Саму проблему при цьому розв'язувати (отримувати відповідь) *не обов'язково*. Зауважимо, що іноді початкова умова може бути відсутньою.

Завдання на достатність даних можуть бути подані у вигляді *завдань на порівняння значень двох величин (X і Y)*, які визначаються в умові. Зазначимо, що і в цій ситуації знаходити значення самих величин *не обов'язково*, потрібно тільки з'ясувати, чи можна дати *однозначну* відповідь на поставлене запитання виходячи з умови завдання.

У посібнику завдання на достатність даних та завдання на порівняння подані як завдання закритої форми з вибором однієї правильної відповіді.

Завдання на встановлення відповідності. Учаснику тестування пропонується встановити відповідність між двома множинами математичних об'єктів (знайти логічні пари). Найчастіше елементи першої множини позначаються цифрами, а елементи другої множини — літерами. У посібнику перша множина містить чотири елементи, занумеровані цифрами (1–4), а друга множина — п'ять елементів, позначених літерами (А–Д). При цьому кожному елементу першої множини може відповідати *тільки один* елемент другої, а кожен елемент другої множини може відповідати *не більш ніж одному* елементу першої. Саме такий формат завдань на встановлення логічних пар використовується зараз в Україні під час проведення зовнішнього незалежного оцінювання якості знань з математики (ЗНО). Результати свого вибору учасники тестування заносять до спеціальної форми*. Наприклад, на рисунку зображено таку форму, де встановлено відповідність: 1–А; 2–Д; 3–Г; 4–Б.

	А	Б	В	Г	Д
1	×				
2					×
3				×	
4		×			

Завдання на встановлення послідовності. Учаснику тестування пропонується серед наведених логічних кроків, які позначено літерами, вибрати необхідні та з них, як із своєрідних «пазлів», скласти алгоритм розв'язування певної математичної задачі — відтворити правильну послідовність дій. Здебільшого такі завдання призначені для перевірки знання *відомих алгоритмів*, що стосуються тієї чи іншої теми курсу математики.

Завдання з короткою відповіддю. Учаснику тестування пропонується розв'язати завдання, відповіді до яких можуть бути подані у вигляді чисел або числових виразів. Саме їх і потрібно записати у бланк відповіді у спеціально відведені для цього поля.

* При тестуванні учасники отримують спеціальні бланки, у які заносять правильні відповіді.

Для зручності технічної обробки результатів доволі часто вимагається, щоб коротка відповідь до завдання подавалася у вигляді *десятькового дроби або цілого числа*. Зокрема, така вимога зараз ставиться під час проведення ЗНО. У пропонованому посібнику нами не передбачається обов'язкове дотримання цієї вимоги, що дозволяє дещо розширити клас задач, сформульованих у вигляді завдань із короткою відповіддю. Однак якщо відповідь до завдання можна записати *скінченим десятиковим дробом або цілим числом*, то ми пропонуємо читачам це зробити і подаємо відповіді саме в такому вигляді.

Завдання з повним розв'язанням. За своєю суттю ці завдання є «звичайними задачами», до яких більшість із вас звикла під час навчання в школі. Учаснику тестування слід не тільки отримати відповідь до завдання, а й навести всі необхідні логічні кроки, які в підсумку дають результат. При цьому вимагається здійснювати посилення на відомі аксіоми, означення, твердження, формули. У разі потреби міркування ілюструються таблицями, діаграмами, графіками тощо.

Наявність таких завдань у тесті є дуже бажаною, бо однією з основних цілей навчання математики є формування вміння логічно мислити й обґрунтовувати хід власних думок. У посібнику завдання з повним розв'язанням переважно є непростими, іноді носять дослідницький характер. Ми подали їх у кінці кожного підрозділу. А прості завдання з повним розв'язанням у вигляді *усних вправ* відкривають кожен із підрозділів, про які йтиметься далі.

Матеріал посібника структуровано не тільки за типами тестових завдань, а й за тематичними блоками, які відтворюють змістові лінії сучасного шкільного курсу математики. У посібнику виділено 10 основних блоків, назви яких є назвами розділів: «Числа і вирази», «Функції та їх графіки», «Рівняння і системи рівнянь», «Нерівності та системи нерівностей», «Текстові задачі», «Елементи математичного аналізу», «Планіметрія», «Стереометрія», «Координати і вектори», «Елементи стохастики». Розділи, у свою чергу, поділено на підрозділи, кожний із яких містить 36 завдань із вибором однієї правильної відповіді, у тому числі 6 — на достатність даних (4 — у формі аналізу достатності даних, 2 — у формі порівняння величин), 4 завдання на встановлення відповідності (логічних пар), 2 завдання на встановлення правильної послідовності, 30 завдань із короткою відповіддю, 8 завдань з повним розв'язанням. На початку кожного підрозділу наведено 20 усних вправ, які дозволяють учневі повторити основні теоретичні відомості та основні формули перед вивченням теми. До того ж наявність усних вправ обумовлена принципом побудови кожного підрозділу — від простого до складного: спочатку найпростіші (усні) вправи, потім завдання з альтернативами за наростанням рівня складності, потім (за аналогічним принципом) — завдання з короткою відповіддю, а завершується кожний підрозділ доволі складними завданнями з повним обґрунтуванням. Таким чином, кожен підрозділ посібника містить 100 завдань.

Автори, подавши найпопулярніші на сьогодні типи тестових завдань з математики, прагнули допомогти всім зацікавленим якісно повторити й систематизувати свої знання з математики. Ми б хотіли, щоб посібник став реальним помічником як учня, так і вчителя математики чи репетитора. Саме тому, зокрема, усі завдання посібника (крім усних вправ та завдань із розгорнутою відповіддю) побудовано *парами*: за авторським задумом завдання з непарними номерами учень повинен розв'язувати з учителем, а подібні до них завдання з парними номерами — самостійно.

Ми пропонуємо свого роду енциклопедію, але *енциклопедію практичну*, її покликання — не стояти на полиці, а «жити» поряд з учнем протягом його навчання у школі, стати його настільною книжкою.

Автори щиро сподіваються, що завдяки цьому посібнику ви не тільки досягнете бажаних результатів, а й отримаєте насолоду від процесу їх одержання.

Все у вас вийде! Вірте в себе!

Юрій Олексійович Захарійченко,
доцент НаУКМА, канд. фіз.-мат. наук

Олександр Володимирович Шкільний,
доцент НПУ ім. М. П. Драгоманова, канд. фіз.-мат. наук

Ліліана Ігорівна Захарійченко,
методист УЦОЯО, канд. фіз.-мат. наук

Олена Володимирівна Шкільна,
викладач вищої категорії КІТЗ НАУ

Розділ 1. ЧИСЛА І ВИРАЗИ**1.1. Цілі і дробові раціональні вирази****Найпростіші завдання з повним розв'язанням**

Завдання 1–20 розв'яжіть УСНО.

1. Обчисліть: $2,37 \cdot 10$.
2. Обчисліть: $0,56 \cdot 10 : 100$.
3. Обчисліть: $2 \cdot 4,9 + 2 \cdot 0,1$.
4. Обчисліть: $6 : (2,5 - 0,5)$.
5. Обчисліть: $\frac{4 \cdot 6 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 4}$.
6. Обчисліть: $\frac{3}{5} - \frac{2}{10}$.
7. Порівняйте числа a і b , якщо $a = \frac{2}{5}$, $b = \frac{22}{55}$.
8. Порівняйте числа a і b , якщо $a = \frac{8}{56}$, $b = \frac{6}{42}$.
9. Порівняйте числа a і b , якщо $a = \frac{51}{49}$, $b = \frac{59}{63}$.
10. Знайдіть значення виразу $\frac{1}{a}$, якщо $a = \frac{2}{5}$.
11. Знайдіть значення виразу $\frac{1}{a}$, якщо $a = 0,25$.
12. Спростіть вираз $2x^2y \cdot (-3xy^3)$.
13. Спростіть вираз $-m^2 + 3mp + p^2 - 6mp + 2p^2 + 3m^2$.
14. Розкрийте дужки: $a^3b(a - b^2)$.
15. Розкрийте дужки: $(x + 3y)(3y - x)$.
16. Розкладіть на множники: $m^2n - 2mn^2$.
17. Розкладіть на множники: $16 - 25a^2$.
18. Скоротіть дріб $\frac{ab^2}{a^2b}$.

19. Скоротіть дріб $\frac{3x^3y}{-12x^2y^5}$.

20. Скоротіть дріб $\frac{x+xy}{x^2}$.

Завдання з вибором однієї правильної відповіді

Проаналізуйте умови та вимоги завдань 21–50 та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

21. Серед наведених дробів укажіть найбільший.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{29}{28}$	$\frac{30}{29}$	$\frac{31}{30}$	$\frac{32}{31}$	$\frac{33}{32}$

22. Серед наведених дробів укажіть найменший.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{54}{55}$	$\frac{53}{54}$	$\frac{52}{53}$	$\frac{51}{52}$	$\frac{50}{51}$

23. Укажіть числовий вираз, значення якого є найбільшим.

А	Б	В	Г	Д
$2 - \frac{1}{3}$	$2 + \frac{1}{3}$	$2 : \frac{1}{3}$	$2 \cdot \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} : 2$

24. Укажіть числовий вираз, значення якого є найменшим.

А	Б	В	Г	Д
$5 \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} - 5$	$5 + \frac{1}{4}$	$5 - \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} : 5$

25. Обчисліть: $2^3 \cdot 5^0$.

А	Б	В	Г	Д
6	8	10	30	40

26. Обчисліть: $(4+6)^0 \cdot 2$.

А	Б	В	Г	Д
0	2	4	10	20

27. Спростіть вираз $x^{-10} \cdot x^{-2}$.

А	Б	В	Г	Д
x^{-12}	x^{20}	x^{100}	x^{-8}	x^5

28. Спростіть вираз $a^6 : a^{-2}$.

А	Б	В	Г	Д
a^{-3}	a^{-12}	a^4	a^8	a^{-36}

29. $(a^2b^3)^4 = \dots$

А	Б	В	Г	Д
a^6b^7	$(ab)^{20}$	a^8b^{12}	$(ab)^9$	$a^{16}b^{81}$

30. $(x^{-1} : y^{-2})^3 = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{x^3}{y^6}$	$\left(\frac{x}{y}\right)^{-9}$	$\frac{y^6}{x^3}$	$\left(\frac{y}{x}\right)^{-6}$	$\frac{1}{x^3y^6}$

31. Укажіть правильну подвійну нерівність, якщо $a = 2^{-5}$, $b = 2 \cdot (-5)$, $c = 5^{-2}$.

А	Б	В	Г	Д
$c < a < b$	$a < c < b$	$a < b < c$	$b < c < a$	$b < a < c$

32. Укажіть правильну подвійну нерівність, якщо $x = 5^{10}$, $y = 2^{20}$, $z = 20^5$.

А	Б	В	Г	Д
$y < z < x$	$y < x < z$	$x < z < y$	$x < y < z$	$z < y < x$

33. Розкладіть на множники вираз $a^3 + a^2 + a + 1$.

А	Б	В	Г	Д
$(a^2 + 1)(a + 1)$	$a^2(a + 1)$	$a(a^2 + 1)$	$a(a + 1)^2$	$(a^2 + 1)^2$

34. Розкладіть на множники вираз $c^3 + c^2 - 2c - 2$.

А	Б	В	Г	Д
$(c^2 + 1)(c - 2)$	$(c^2 + 2)(c - 1)$	$(c^2 - 1)(c + 2)$	$(c^2 - 2)(c + 1)$	$c(c^2 - 2)$

35. $(a^2 - 3b)(3b + a^2) = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$9b^2 - a^4$	$a^4 + 6a^2b - 9b^2$	$a^4 - 9b^2$	$a^4 - 6a^2b + 9b^2$	$9b^2 + a^4$

36. $(2 - 10x)(1 + 5x) = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$2 + 20x - 50x^2$	$2 - 50x^2$	$2 - 20x + 50x^2$	$50x^2 - 2$	$50x^2 - 20x + 2$

37. Укажіть значення, якого МОЖЕ набувати вираз $n^2 + 6n + 9$ при $n \in \mathbb{N}$.

А	Б	В	Г	Д
1	4	15	25	33

38. Укажіть значення, якого МОЖЕ набувати вираз $n^2 + 1$ при $n \in \mathbb{N}$.

А	Б	В	Г	Д
0	1	24	40	50

39. Укажіть вираз, що є квадратом двочлена.

А	Б	В	Г	Д
$4x^2 - 2x + 1$	$4x^2 - 1$	$4x^2 - 4x + 1$	$4x^2 + 1$	$4x^2 - 4x - 1$

40. Укажіть вираз, що є квадратом двочлена.

А	Б	В	Г	Д
$a^2 + 0,4ab - 0,04b^2$	$a^2 + 0,04b^2$	$a^2 - 0,2ab + 0,04b^4$	$a^2 - 0,04b^2$	$a^2 - 0,4ab + 0,04b^2$

41. Знайдіть b , якщо $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = a^2 + \frac{1}{a^2} + b$.

А	Б	В	Г	Д
$b = 0$	$b = 1$	$b = 2$	$b = a$	$b = 2a$

42. Знайдіть c , якщо $\left(a - \frac{2}{a}\right)^2 = a^2 + \frac{4}{a^2} + c$.

А	Б	В	Г	Д
$c = -2$	$c = -4$	$c = 0$	$c = 2$	$c = 4$

43. Знайдіть k , якщо $\frac{6}{n} = \frac{5}{k}$.

А	Б	В	Г	Д
$k = \frac{30}{n}$	$k = \frac{6}{5n}$	$k = \frac{6n}{5}$	$k = \frac{5n}{6}$	$k = \frac{n}{30}$

44. Знайдіть $\frac{1}{b}$, якщо $4 \cdot a = \frac{2}{b}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{b} = \frac{1}{2a}$	$\frac{1}{b} = 8a$	$\frac{1}{b} = \frac{2}{a}$	$\frac{1}{b} = \frac{1}{8a}$	$\frac{1}{b} = 2a$

45. Обчисліть: $\frac{31+31+31+31+31}{31+31}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2}{5}$	31	93	5	$\frac{5}{2}$

46. Обчисліть: $\frac{23+2 \cdot 23+3 \cdot 23}{23+23}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{3}{2}$	23	3	$\frac{2}{3}$	2

47. Скоротіть дріб $\frac{9x^2+6x+1}{3x+1}$.

А	Б	В	Г	Д
$9x^2+3x$	2	$3x+1$	3	$\frac{1}{3x+1}$

48. Скоротіть дріб $\frac{2x-4}{x^2-4x+4}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{x-2}$	$\frac{x-2}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{x-2}$

49. Спростіть вираз $\frac{x^3y^2 - x^2y^3}{x^2 - y^2}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{x^2y^2}{x+y}$	$xy^2 - x^2y$	$\frac{x^3y^3}{x+y}$	$x - y$	$\frac{x^2y^2}{x-y}$

50. Спростіть вираз $\frac{x^3 + y^3}{xy^2 + x^2y}$.

А	Б	В	Г	Д
$x^2 + y^2 - 1$	$\frac{x^2 + xy + y^2}{xy}$	$\frac{x - y}{xy}$	$\frac{x^2 - xy + y^2}{xy}$	$x^2 + y^2 + 1$

У завданнях 51–54 сформульовано проблему (питання), яку потрібно розв'язати (отримати однозначну відповідь на питання), використовуючи для цього додаткові дані — твердження (1) і (2). Визначте, чи достатньо цих даних для розв'язання проблеми, і оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь*.

51. Знайдіть значення виразу $x^2 - 2x + 1$.

(1) $(x+1)^4 = 16$.

(2) $3(x-1) = 6$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

52. Знайдіть значення виразу $a - 3b$.

(1) $5a - 15b + 5 = 0$.

(2) $6b - 2a = 2$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

* Саму проблему розв'язувати не обов'язково.

53. Чи є число $a > 0$ раціональним?

(1) Число \sqrt{a} раціональне.

(2) Число a^2 раціональне.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

54. Чи є число b натуральним?

(1) Число $b+2$ натуральне.

(2) Число b^2 натуральне.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

У завданнях 55–56 порівняйте величини X і Y та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

55. Задано вираз $(b-1)(b+2)(b-3)(b+4)(b-5)$.

Величина X : значення виразу при $b=0$.

Величина Y : значення виразу при $b=-2$.

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

56. Відомо, що $\frac{a+b-c}{c} = 1$.

Величина X : $\frac{a}{c} + \frac{b}{c}$.

Величина Y : 2.

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

Завдання на встановлення відповідності

У завданнях 57–60 до кожного рядка, позначеного цифрою, доберіть один відповідник, позначений літерою.

57. Установіть відповідність між значеннями числових виразів (1–4) і проміжками (А–Д), яким вони належать.

1	$\frac{2}{3-4}$	А	$(-5; -3)$
2	$(5-3)(3-2)$	Б	$(-3; -1)$
3	$\frac{2-2}{3+3}$	В	$(-1; 1)$
4	$(1+3)(1-2)$	Г	$(1; 3)$
		Д	$(3; 5)$

58. Установіть відповідність між проміжками (1–4), яким належать значення числових виразів (А–Д), і цими числовими виразами.

1	$(-\infty; -1)$	А	$(10-1)(10+1)$
2	$(-1; 0)$	Б	$\frac{10-1}{10+1}$
3	$(0; 1)$	В	$\frac{1-10}{1+10}$
4	$(1; +\infty)$	Г	$\frac{1-10}{10-1}$
		Д	$(1-10)(1+10)$

59. Установіть відповідність між виразами (1–4) і тотожно рівними їм виразами (А–Д).

1	$(a+2)^2$	А	a^2+4
2	$(a+2)(a-2)$	Б	a^2-4a+4
3	$(a-2)^2$	В	a^2-4
4	$(a+2)(2-a)$	Г	a^2+4a+4
		Д	$4-a^2$

60. Установіть відповідність між виразами (1–4) і тотожно рівними їм виразами (А–Д).

1	$a^2 + ab$	А	$b(b - a)$
2	$b^2 + ab$	Б	$a(a + b)$
3	$a^2 - ab$	В	$a(a - b)$
4	$ab - b^2$	Г	$b(a - b)$
		Д	$b(a + b)$

Завдання на встановлення послідовності

У завданнях 61–62 виберіть тільки необхідні для розв'язання поставленої задачі дії і розмістіть їх у правильній послідовності. У відповідь запишіть отриману послідовність літер.

61. Як обчислити значення виразу $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$?

- А Чисельник і знаменник першого дробу помножити на 2.
- Б До 3 додати 1.
- В До 3 додати 2.
- Г До 4 додати 2.
- Д Результат поділити на 6.
- Е Результат поділити на 4.
- Є Результат поділити на 2.

62. Як знайти показник n у рівності $(a^6 : a^3)^2 = a^n$?

- А До 6 додати 3.
- Б Від 6 відняти 3.
- В 6 поділити на 3.
- Г До результату додати 2.
- Д Результат помножити на 2.
- Е Результат піднести до другого степеня.

Завдання з короткою відповіддю

Розв'яжіть завдання 63–92 і запишіть відповідь **ОДНИМ ЧИСЛОМ**.

63. Обчисліть: $7,3 \cdot 10,5 + 7,3 \cdot 15 + 2,7 \cdot 10,5 + 15 \cdot 2,7$.

64. Обчисліть: $5\frac{1}{3} \cdot 8\frac{7}{9} - 2\frac{1}{3} \cdot 2\frac{2}{7} + 5\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9} - 2\frac{1}{3} \cdot 6\frac{5}{7}$.

65. Обчисліть: $(18+11) \cdot (18-11) + 121$.
66. Обчисліть: $111 \cdot 129 + 9^2$.
67. Обчисліть: $8^2 - 7^2 + 6^2 - 5^2 + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2$.
68. Обчисліть: $(3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2) - (4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2)$.
69. Знайдіть значення виразу $a+b+c$, якщо $a+b=16$, $a+c=20$, $b+c=24$.
70. Знайдіть значення виразу $a+b+x+y$, якщо $a+b+z=53$, $z-x-y=81$.
71. Знайдіть значення виразу x^2+2x+1 при $x=\sqrt{20}-1$.
72. Знайдіть значення виразу y^2-6y+9 при $y=3+2\sqrt{3}$.
73. Знайдіть значення виразу $x^2+x+6xy+3y+9y^2$, якщо $x+3y=-7$.
74. Знайдіть значення виразу $4a^2-6a+b^2-4ab+3b$, якщо $2a-b=9$.
75. Знайдіть значення виразу a^2+b^2 , якщо $a+b=8$, $a \cdot b=13$.
76. Знайдіть значення виразу $(m+k)^4$, якщо $m^2+k^2=29$, $m \cdot k=-10$.
77. Обчисліть: $\left(1+\frac{1}{10}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{11}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{12}\right) \cdot \dots \cdot \left(1+\frac{1}{25}\right)$.
78. Обчисліть: $\left(1-\frac{1}{100}\right) \cdot \left(1-\frac{1}{99}\right) \cdot \left(1-\frac{1}{98}\right) \cdot \dots \cdot \left(1-\frac{1}{50}\right)$.
79. Обчисліть значення виразу $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8}$.
80. Обчисліть значення виразу $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56}$.
81. Подайте нескінченний періодичний дріб $0,(36)$ у вигляді НЕСКОРОТНОГО звичайного дроби $\frac{m}{k}$. У відповідь запишіть значення $m+k$.
82. Подайте нескінченний періодичний дріб $5,(5)$ у вигляді НЕСКОРОТНОГО звичайного дроби $\frac{m}{k}$. У відповідь запишіть значення $m-k$.
83. Подайте значення виразу $2 \cdot 0,(6) - 0,1(6)$ у вигляді нескоротного звичайного дроби.
84. Подайте значення виразу $\frac{0,(5)}{1+0,8(3)}$ у вигляді нескоротного звичайного дроби.

85. Знайдіть найменше значення виразу $\frac{a}{b}$, якщо $a \in \{5; 13; 27\}$, $b \in \{-2; 1; 4\}$.
86. Знайдіть найбільше значення виразу $a \cdot b - c$, якщо $a \in \{1; 2; 3\}$, $b \in \{4; 5; 6\}$, $c \in \{-1; 0; 1\}$.
87. Знайдіть значення виразу $\frac{u-8t}{t}$, якщо $\frac{u}{t} = 20$.
88. Знайдіть значення виразу $\frac{11c+d}{d}$, якщо $\frac{d}{c} = 2$.
89. Знайдіть найменше значення виразу $\frac{a}{b}$, якщо $\frac{a^2+4ab}{b^2} = 21$.
90. Знайдіть найбільше значення виразу $\frac{x}{y}$, якщо $x^2 - 7xy = 18y^2$.
91. Знайдіть значення виразу $\frac{a^2+8b^2}{2ab}$, якщо $\frac{a^2-6b^2}{ab} = -1$, причому $a < 0$, $b < 0$.
92. Відомо, що $\frac{x^2-4y^2}{xy} = 3$, причому $x > 0$, $y < 0$. Знайдіть значення виразу $\frac{2x^2+y^2}{3xy}$.

Завдання з повним розв'язанням

Завдання 93–100 розв'яжіть із повним обґрунтуванням, посилаючись на відповідні означення, твердження, формули. У разі потреби проілюструйте розв'язання таблицями, діаграмами, графіками тощо.

93. Запишіть будь-які три раціональних числа, більші за $\frac{1}{6}$ і менші за $\frac{1}{5}$.
94. Знайдіть усі нескоротні дроби, більші за $\frac{1}{6}$ і менші за $\frac{1}{5}$, чисельник яких дорівнює 6.
95. Доведіть або спростуйте твердження:
- якщо значення виразу $a+b+c$ є раціональним числом, то числа a , b і c раціональні;
 - якщо значення виразу $a+b+c$ є раціональним числом і a , b — раціональні числа, то число c також раціональне;
 - якщо значення виразу $a+b+c$ — раціональне число і a — раціональне число, то хоча б одне з чисел b або c є раціональним.

- 96.** Доведіть або спростуйте твердження:
- якщо значення виразу $a \cdot b \cdot c$ є раціональним числом, то всі числа a , b і c раціональні;
 - якщо і сума, і добуток деяких чисел a і b — раціональні числа, то числа a і b є раціональними;
 - якщо значення виразу $a \cdot b \cdot c$ — раціональне число і a — раціональне число, то добуток чисел b і c є раціональним числом.
- 97.** Знайдіть усі значення параметра a , при яких значення виразу $8 - 1,4 \cdot a$ є цілим числом.
- 98.** Знайдіть усі значення параметра a , при яких значення виразу $5, (6) + \frac{1}{3} + a$ є:
- натуральним числом;
 - раціональним числом.
- 99.** Задано вираз $\frac{4x^4 - 1}{x^6 - x^4 - x^2 + 1} : \left(\frac{x^2}{x^4 - 2x^2 + 1} - \frac{1}{1 - x^2} \cdot \frac{x^2}{x^2 + 1} - \frac{2}{x^2 + 1} \right)$. Знайдіть множину D допустимих значень змінної x . Доведіть, що для всіх $x \in D$ значення виразу є додатним числом.
- 100.** Задано вираз $\left(\frac{3x}{9x^2 - 25} - \frac{3x}{9x^2 - 30x + 25} \right) \cdot \frac{(5 - 3x)^2}{6x} + \frac{5}{5 + 3x}$. Знайдіть множину D допустимих значень змінної x . Доведіть, що для всіх $x \in D$ значення виразу дорівнює нулю.

1.2. Ірраціональні вирази

Найпростіші завдання з повним розв'язанням

Завдання 1–20 розв'яжіть УСНО.

1. Обчисліть: $\sqrt{625}$.

4. Обчисліть: $\left(\sqrt[3]{5}\right)^6$.

2. Обчисліть: $\sqrt[3]{27}$.

5. Обчисліть: $\sqrt[5]{(-3)^{15}}$.

3. Обчисліть: $(\sqrt{10})^4$.

6. Обчисліть: $\sqrt[4]{(-4)^8}$.

7. Винесіть множник з-під знака кореня: $\sqrt{36 \cdot 7}$.
8. Винесіть множник з-під знака кореня: $\sqrt{200}$.
9. Винесіть множник з-під знака кореня: $\sqrt[3]{125 \cdot 3}$.
10. Винесіть множник з-під знака кореня: $\sqrt[3]{40}$.
11. Внесіть множник під знак кореня: $5\sqrt{2}$.
12. Внесіть множник під знак кореня: $3\sqrt[3]{2}$.
13. Внесіть множник під знак кореня: $2\sqrt[4]{3}$.
14. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу $\frac{2}{\sqrt{5}}$.
15. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу $\frac{10}{\sqrt{8}}$.
16. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$.
17. Спростіть вираз $\sqrt[6]{x^3 y^9}$.
18. Спростіть вираз $\sqrt[4]{a^8 b^2}$.
19. Спростіть вираз $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}$.
20. Спростіть вираз $\frac{\sqrt[6]{y}}{\sqrt[3]{y}}$.

Завдання з вибором однієї правильної відповіді

Проаналізуйте умови та вимоги завдань 21–50 та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

21. Обчисліть: $\sqrt{16+9}$.

А	Б	В	Г	Д
5	7	12	25	50

22. Обчисліть: $\sqrt{100-64}$.

А	Б	В	Г	Д
2	6	8	18	36

23. Обчисліть значення виразу $\sqrt{4} - \sqrt{(-3)^2}$.

А	Б	В	Г	Д
-5	-1	7	1	5

24. Обчисліть значення виразу $\sqrt{(-15)^2} + \sqrt{25}$.

А	Б	В	Г	Д
-10	10	15	40	20

25. $\sqrt{18} + \sqrt{8} - \sqrt{2} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{24}$	$2\sqrt{2}$	$6\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$	$\sqrt{28}$

26. $\sqrt{6} \cdot \sqrt{8} - \sqrt{12} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
6	$6\sqrt{3}$	$\sqrt{60}$	$2\sqrt{3}$	2

27. Обчисліть: $\sqrt[3]{5^3 \cdot 2^9}$.

А	Б	В	Г	Д
10	20	40	80	160

28. Обчисліть: $\sqrt[4]{9^4 \cdot 2^8}$.

А	Б	В	Г	Д
12	24	36	48	144

29. Якому з наведених проміжків належить число $\sqrt{2^3 \cdot 3}$?

А	Б	В	Г	Д
(2; 3)	(3; 4)	(4; 5)	(5; 6)	(6; 7)

30. Укажіть проміжок, якому належить число $\sqrt[3]{3^2 \cdot (-2)}$.

А	Б	В	Г	Д
(-5; -3)	(-3; -1)	(-1; 1)	(1; 3)	(3; 5)

31. Відомо, що $a = 4\sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{10}$, $c = 6$. Укажіть правильну подвійну нерівність.

А	Б	В	Г	Д
$b < c < a$	$b < a < c$	$a < c < b$	$a < b < c$	$c < b < a$

32. Відомо, що $x = 7$, $y = 4\sqrt{3}$, $z = 5\sqrt{2}$. Укажіть правильну подвійну нерівність.

А	Б	В	Г	Д
$y < x < z$	$y < z < x$	$x < y < z$	$x < z < y$	$z < y < x$

33. Виконайте тотожне перетворення виразу $\sqrt[7]{a^2}$.

А	Б	В	Г	Д
$a^{\frac{2}{7}}$	a^5	$a^{7,2}$	a^{-5}	$a^{\frac{7}{2}}$

34. Виконайте тотожне перетворення виразу $\sqrt{\sqrt{x^3}}$.

А	Б	В	Г	Д
$x^{\frac{4}{3}}$	$x^{\frac{3}{2}}$	$x^{3,4}$	$x^{\frac{2}{3}}$	$x^{\frac{3}{4}}$

35. Виконайте тотожне перетворення виразу $c^{\frac{2}{3}}$.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{c^3}$	$\frac{2}{c^3}$	$\sqrt[3]{c^2}$	$\frac{3}{c^2}$	$\frac{2}{\sqrt[3]{c}}$

36. Виконайте тотожне перетворення виразу $a^{-\frac{1}{2}}$.

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{\sqrt{a}}$	$-\frac{1}{\sqrt{a}}$	$\frac{1}{a^2}$	$-\sqrt{a}$

37. $x^2 : x^{-\frac{1}{2}} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{x^3}$	$\sqrt{x^5}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^4}$	$\frac{1}{\sqrt{x^3}}$

38. $\sqrt[3]{y} : \sqrt{y} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$y^{-\frac{1}{6}}$	$y^{\frac{1}{6}}$	$y^{-\frac{2}{3}}$	$y^{\frac{2}{3}}$	$y^{\frac{3}{2}}$

39. Спростіть вираз $\frac{a - a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} - 1}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{a^2 + 1}$	$\frac{1}{a^2}$	$a^{-\frac{1}{2}}$	$-a^{\frac{1}{2}}$	$1 - a^{\frac{1}{2}}$

40. Спростіть вираз $\frac{b-1}{1-b^{\frac{1}{2}}}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{1-b^2}$	$\frac{1}{b^2}$	$\frac{1}{1+b^2}$	$-b^{\frac{1}{2}}$	$-1 - b^{\frac{1}{2}}$

41. Укажіть знаки змінних a і b , якщо $\sqrt{b \cdot a^2} = -a\sqrt{b}$.

А	Б	В	Г	Д
$\begin{cases} a \square 0, \\ b \square 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a \square 0, \\ b \square 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a \square 0, \\ b \square 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a \square 0, \\ b \square 0 \end{cases}$	Наведена рівність неможлива

42. Укажіть знаки змінних a і b , якщо $\sqrt{ab} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$.

А	Б	В	Г	Д
$\begin{cases} a \square 0, \\ b \square 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a \square 0, \\ b \square 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a \square 0, \\ b \square 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a \square 0, \\ b \square 0 \end{cases}$	Наведена рівність неможлива

43. Якщо $x > 4$, то $\sqrt{(4-x)^2} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$4-x$	$(x-4)^2$	$x+4$	$(x+4)^2$	$x-4$

44. Якщо $y < 0$, то $\sqrt{4y^2} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$4y$	$2y$	$2y^2$	$-2y$	$-4y$

45. Відомо, що $x < 0$. Тоді $2\sqrt[3]{(-x)^3} + \sqrt[4]{x^4} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$-x$	$-3x$	x	$3x$	0

46. Відомо, що $a > b$. Тоді $\sqrt{(a-b)^2} - \sqrt[3]{(b-a)^3} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$-2a - 2b$	$2a - 2b$	$2a + 2b$	$2b - 2a$	0

47. $\sqrt{(3-\sqrt{12})^2} + \sqrt{(3+\sqrt{12})^2} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$4\sqrt{3}$	$6 + 2\sqrt{3}$	6	$6 + 4\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$

48. $\sqrt{(\sqrt{24}-5)^2} - \sqrt{(\sqrt{24}+5)^2} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$-8\sqrt{6}$	-10	10	0	$-4\sqrt{6}$

49. $\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$2 - 2\sqrt{3}$	$\sqrt{3} - 1$	$2 - \sqrt{2\sqrt{3}}$	$1 - \sqrt{3}$	$2 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$

50. $\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{2} - \sqrt{3}$	$1 - \sqrt{6}$	$\sqrt{3} - \sqrt{2}$	$\sqrt{6} - 1$	$\sqrt{5} - \sqrt{2\sqrt{6}}$

У завданнях 51–54 сформульовано проблему (питання), яку потрібно розв’язати (отримати однозначну відповідь на питання), використовуючи для цього додаткові дані — твердження (1) і (2). Визначте, чи достатньо цих даних для розв’язання проблеми, і оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь*.

51. Знайдіть значення виразу $3a + \sqrt{-a}$.

(1) $|a| = 4$.

(2) $3a = -12$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

52. Знайдіть значення виразу $\frac{\sqrt{9a} + 6a}{2a + \sqrt{a}}$.

(1) $a > 0$.

(2) $4a = 4$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

53. Знайдіть x .

(1) $(-x)^6 = 64$.

(2) $(-x)^9 = 512$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

54. Знайдіть $\sqrt{a} + \sqrt{b}$.

(1) $a + 2\sqrt{ab} + b = 4$.

(2) $a - b = 1$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

* Саму проблему розв’язувати не обов’язково.

У завданнях 55–56 порівняйте величини X і Y та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

55. Відомо, що $\sqrt{\frac{-a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}}$.

Величина X : значення параметра a .

Величина Y : значення параметра b .

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

56. Відомо, що $\sqrt{\frac{a}{-4}} = \frac{\sqrt{-a}}{2}$.

Величина X : значення параметра a .

Величина Y : 0.

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

Завдання на встановлення відповідності

У завданнях 57–60 до кожного рядка, позначеного цифрою, доберіть один відповідник, позначений літерою.

57. Установіть відповідність між виразами (1–4) і тотожно рівними їм виразами (А–Д) при $a \neq 0$.

1 $\sqrt[6]{a^3}$

2 $\sqrt[3]{\sqrt{a^6}}$

3 $\sqrt[3]{a^6}$

4 $\sqrt{a^6}$

А $a^{\frac{1}{3}}$;

Б $a^{\frac{1}{2}}$

В a

Г a^2

Д a^3

58. Установіть відповідність між виразами (1–4) і тотожно рівними їм виразами (А–Д) при $a \neq 0$.

1 $\sqrt{a+a+a}$

2 $\sqrt[3]{27a}$

3 $\sqrt[3]{a \cdot a \cdot a}$

4 $\sqrt{9a}$

А a

Б $\sqrt{3a}$

В $3\sqrt{3a}$

Г $3 \cdot \sqrt[3]{a}$

Д $3\sqrt{a}$

59. Установіть відповідність між властивостями чисел (1–4) і числами (А–Д), які мають ці властивості.

- | | |
|--|------------------------|
| 1 Число є натуральним | А $\sqrt[9]{(-0,5)^3}$ |
| 2 Число є цілим, але не є натуральним | Б $\sqrt[4]{(-0,5)^2}$ |
| 3 Число є раціональним, але не є цілим | В $\sqrt{(-0,5)^2}$ |
| 4 Число є ірраціональним і додатним | Г $\sqrt[3]{(-5)^3}$ |
| | Д $\sqrt{(-5)^2}$ |

60. Установіть відповідність між властивостями чисел (1–4) і числами (А–Д), які мають ці властивості.

- | | |
|--|-----------------------------|
| 1 Число є натуральним | А $\sqrt[3]{3-30}$ |
| 2 Число є цілим, але не є натуральним | Б $\sqrt[4]{16-1}$ |
| 3 Число є раціональним, але не є цілим | В $\sqrt[3]{3 \cdot (-30)}$ |
| 4 Число є ірраціональним і від'ємним | Г $\sqrt[4]{1:16}$ |
| | Д $\sqrt[3]{30-3}$ |

Завдання на встановлення послідовності

У завданнях 61–62 виберіть тільки необхідні для розв'язання поставленої задачі дії і розмістіть їх у правильній послідовності. У відповідь запишіть отриману послідовність літер.

61. Як знайти показник a у рівності $\frac{\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}}}{x^2} = x^a$?

- А Знайти m як суму 3 і 4.
 Б Знайти m як добуток 3 і 4.
 В Позначити $n = -m$.
 Г Позначити $n = \frac{1}{m}$.
 Д Від n відняти 2.
 Е Поділити n на 2.
 Є Піднести n до другого степеня.

62. Як знайти показник b у рівності $\sqrt[3]{\frac{a^2}{a^3 \cdot a^4}} = a^b$?

А Знайти m як суму 3 і 4.

Б Знайти m як добуток 3 і 4.

В Позначити $n = 2 - m$.

Г Позначити $n = \frac{2}{m}$.

Д Від n відняти 3.

Е Помножити n на 3.

Є Поділити n на 3.

Завдання з короткою відповіддю

Розв'яжіть завдання 63–92 і запишіть відповідь **ОДНИМ ЧИСЛОМ**.

63. Обчисліть: $\sqrt{0,09 \cdot 64}$.

64. Обчисліть: $\sqrt[4]{0,0016 \cdot 16^4}$.

65. Обчисліть: $\frac{3}{\sqrt[3]{250}} \cdot \sqrt[3]{2}$.

66. Обчисліть: $\frac{\sqrt[3]{135}}{4 \cdot \sqrt[3]{-5}}$.

67. Знайдіть a , якщо $\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{5}}} = 5^a$.

68. Знайдіть b , якщо $\sqrt[4]{\sqrt{7} \cdot \sqrt[3]{7}} = 7^b$.

69. Знайдіть n , якщо $\sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}}} = 2^n$.

70. Знайдіть n , якщо $\sqrt{\frac{1}{3} \sqrt{3 \sqrt{\frac{1}{3}}}} = 3^n$.

71. Спростіть вираз $\frac{a-1}{\frac{1}{a^4}-1}$ і знайдіть його значення при $a = 16$.

72. Спростіть вираз $\frac{b+1}{\frac{2}{b^3}-1}$ і знайдіть його значення при $b = 64$.

73. Спростіть вираз $\frac{xy^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{3}{2}}}{yx^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}}$ і знайдіть його значення при $x=25$ та $y=81$.
74. Спростіть вираз $\frac{m^{\frac{3}{2}} - m^{\frac{1}{2}}k}{m - 2m^{\frac{1}{2}}k^{\frac{1}{2}} + k}$ і знайдіть його значення при $m=25$ та $k=9$.
75. Знайдіть значення виразу $\sqrt{(a+2,5)^2} + \sqrt{(a-3)^2}$ при $a=1$.
76. Знайдіть значення виразу $\sqrt{x^2} - \sqrt{(x-4,1)^2}$ при $x=1$.
77. Обчисліть значення виразу $y \cdot \sqrt{y^2 + 2y + 1}$ при $y=-21$.
78. Обчисліть значення виразу $\frac{\sqrt{b^2 - 8b + 16}}{b + 6,9}$ при $b=3,1$.
79. Знайдіть значення виразу $\frac{(\sqrt{x})^3 + 2x + \sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 1)^2}$ при $x=0,49$.
80. Знайдіть значення виразу $\frac{(2\sqrt{a} - 6)^2}{(\sqrt{a})^3 - 6a + 9\sqrt{a}}$ при $a=0,25$.
81. Знайдіть значення виразу $\sqrt{x+75} + \sqrt{x}$, якщо $\sqrt{x+75} - \sqrt{x} = 5$.
82. Знайдіть значення виразу $\sqrt{z+120} - \sqrt{z}$, якщо $\sqrt{120+z} + \sqrt{z} = 20$.
83. Обчисліть: $\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{9} + \sqrt{8}} + \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{8} + \sqrt{7}} + \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{7} + \sqrt{6}} + \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{6} + \sqrt{5}} + \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{5} + \sqrt{4}}$.
84. Обчисліть: $\frac{40}{8 - \sqrt{24}} + \frac{10}{\sqrt{34} + \sqrt{24}} + \frac{110}{12 + \sqrt{34}}$.
85. Обчисліть: $\sqrt{5\sqrt{6} + \sqrt{29}} \cdot \sqrt{5\sqrt{6} - \sqrt{29}}$.
86. Обчисліть: $\sqrt[3]{4\sqrt{35} - 4\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{4\sqrt{35} + 4\sqrt{3}}$.
87. Обчисліть: $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} - \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$.
88. Обчисліть: $\sqrt{28 - 10\sqrt{3}} + \sqrt{28 + 10\sqrt{3}}$.

89. Обчисліть: $(\sqrt{2} - 3)\sqrt{5 + 6\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}$.

90. Обчисліть: $(\sqrt{2} - 1)\sqrt{4 + \sqrt{9 - 4\sqrt{2}}}$.

91. Обчисліть: $\sqrt{71 - 16\sqrt{7}} + \sqrt{11 - 4\sqrt{7}}$.

92. Обчисліть: $\sqrt{41 + 12\sqrt{5}} - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$.

Завдання з повним розв'язанням

Завдання 93–100 розв'яжіть із повним обґрунтуванням, посилаючись на відповідні означення, твердження, формули. У разі потреби проілюструйте розв'язання таблицями, діаграмами, графіками тощо.

93. Спростіть вираз і доведіть, що його значення не залежить від значення змінної:

а) $\left(\frac{\sqrt[4]{x} - 5}{\sqrt[4]{x} + 5} - \frac{\sqrt[4]{x} + 5}{\sqrt[4]{x} - 5} \right) : \frac{10\sqrt[4]{x}}{25 - \sqrt{x}}$;

б) $\left(\frac{\sqrt[8]{y} + 4}{\sqrt[8]{y} - 4} + \frac{\sqrt[8]{y} - 4}{\sqrt[8]{y} + 4} \right) : \frac{4\sqrt[4]{y} + 64}{16 - \sqrt[4]{y}}$.

94. Доведіть, що значення виразу є раціональним числом:

а) $\sqrt[3]{4 + 2\sqrt{6}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} - 3} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} + 3}$; б) $(\sqrt{10} - \sqrt{6}) \cdot \sqrt{4 - \sqrt{15}} \cdot (4 + \sqrt{15})$.

95. Знайдіть значення виразу:

а) $\sqrt[3]{5 - 2\sqrt{6}} \cdot \sqrt[6]{49 + 20\sqrt{6}}$;

б) $\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}} \cdot \sqrt[6]{3 - 2\sqrt{2}}$.

96. Обчисліть: $\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}}$.

97. Спростіть вираз $\frac{\sqrt{(5x+2)^2 - 40x}}{5\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}}$ і знайдіть його значення при $x = 0,04$.

98. Спростіть вираз $\frac{a^2 + 1}{\sqrt{\left(\frac{a^2 - 1}{2a}\right)^2 + 1}}$ і знайдіть його значення при $a = -9$.

99. Спростіть вираз:

а) $\left(\frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1} - \frac{4\sqrt{a}}{a - 1} \right) : \frac{\sqrt{a} - 1}{a + \sqrt{a}}$;

б) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} : \left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} - \frac{\sqrt{b} + \sqrt{a}}{\sqrt{b}} \right)$.

100. Спростіть вираз:

$$\text{а) } \frac{9b^{\frac{4}{3}} - \frac{a^{\frac{3}{2}}}{b^2}}{\sqrt{a^{\frac{3}{2}}b^{-2} + 6a^{\frac{3}{4}}b^{-\frac{1}{3}} + 9b^{\frac{4}{3}}}} \cdot \frac{b^2}{a^{\frac{3}{4}} - 3b^{\frac{5}{3}}};$$

$$\text{б) } \frac{(a-b)^3(\sqrt{a} + \sqrt{b})^{-3} + 2a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}} + \frac{3(\sqrt{ab} - b)}{a-b}.$$

1.3. Тригонометричні вирази

Найпростіші завдання з повним розв'язанням

Завдання 1–20 розв'яжіть УСНО.

1. Виразіть у радіанах кути 30° ; 60° .
2. Виразіть у радіанах кути 120° ; 135° .
3. Виразіть у радіанах кути 10° ; 36° .
4. Виразіть у радіанах кути 720° ; 450° .
5. Виразіть у градусах кути $\frac{\pi}{4}$; $\frac{2\pi}{3}$.
6. Виразіть у градусах кути $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{11\pi}{6}$.
7. Виразіть у градусах кути $\frac{\pi}{12}$; $\frac{7\pi}{10}$.
8. Виразіть у градусах кути 3π ; $2,5\pi$.
9. Обчисліть: $\sin 90^\circ$; $\cos 180^\circ$.
10. Обчисліть: $\operatorname{tg} 360^\circ$; $\operatorname{ctg} 270^\circ$.
11. Обчисліть: $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; $\cos(-\pi)$.
12. Обчисліть: $\sin(-45^\circ)$; $\cos(-60^\circ)$.
13. Обчисліть: $\operatorname{tg}(-30^\circ)$; $\operatorname{ctg}(-30^\circ)$.

14. Обчисліть: $\sin^2 \frac{\pi}{6}$; $\operatorname{tg}^3 \frac{\pi}{4}$.

15. Обчисліть значення виразу:

а) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{10} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{10}$;

б) $\cos^2 \frac{\pi}{5} + \sin^2 \frac{\pi}{5}$.

16. Обчисліть значення виразу:

а) $2\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ$;

б) $\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8}$.

17. Обчисліть значення виразу:

а) $\sin 45^\circ \cdot \cos 15^\circ - \cos 45^\circ \cdot \sin 15^\circ$;

б) $\cos 75^\circ \cdot \cos 15^\circ - \sin 75^\circ \cdot \sin 15^\circ$.

18. Обчисліть значення виразу:

а) $\sin \frac{5\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{5\pi}{12} \cdot \sin \frac{\pi}{12}$;

б) $\cos \frac{3\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{3\pi}{8} \cdot \sin \frac{\pi}{8}$.

19. Обчисліть значення виразу:

а) $\frac{\operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ}{1 - \operatorname{tg} 10^\circ \cdot \operatorname{tg} 50^\circ}$;

б) $\frac{2\operatorname{tg} \frac{\pi}{12}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{12}}$.

20. Обчисліть значення виразу:

а) $\frac{2\operatorname{tg} 15^\circ}{1 + \operatorname{tg}^2 15^\circ}$;

б) $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}}$.

————— Завдання з вибором однієї правильної відповіді —————

Проаналізуйте умови та вимоги завдань 21–50 та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

21. Якій координатній чверті належить кут 10 радіан?

А	Б	В	Г	Д
I	II	III	IV	Визначити неможливо

22. Якій координатній чверті належить кут $\alpha = -4$ радіан?

А	Б	В	Г	Д
I	II	III	IV	Визначити неможливо

23. Яких значень МОЖЕ набувати вираз $\sin(\pi n)$, якщо $n \in \mathbb{N}$?

А	Б	В	Г	Д
Тільки (-1)	Тільки 1	Тільки 0	Тільки (-1) або 1	Будь-якого значення з проміжку $[-1; 1]$

24. Яких значень МОЖЕ набувати вираз $\cos(\pi n)$, якщо $n \in \mathbb{N}$?

А	Б	В	Г	Д
Тільки (-1)	Тільки 1	Тільки 0	Тільки (-1) або 1	Будь-якого значення з проміжку $[-1; 1]$

25. На одиничному колі зображено точку $P\left(-\sqrt{\frac{7}{8}}; \sqrt{\frac{1}{8}}\right)$ (рис. 1). Знайдіть $\cos \alpha$.

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}}$	$-\frac{1}{\sqrt{8}}$	$-\frac{1}{\sqrt{7}}$	$\frac{1}{\sqrt{8}}$	$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}}$

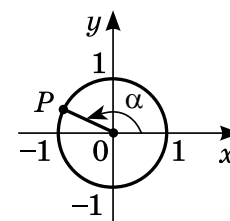


Рис. 1

26. На одиничному колі зображено точку $M\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ (рис. 2). Знайдіть $\sin \beta$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2}{\sqrt{5}}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{5}}$	$-\frac{2}{\sqrt{5}}$

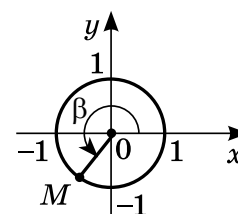


Рис. 2

27. На одиничному колі зображено точку S (рис. 3). Якому з наведених проміжків належить значення $\operatorname{ctg} \gamma$?

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -1)$	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	$(1; +\infty)$	Визначити неможливо

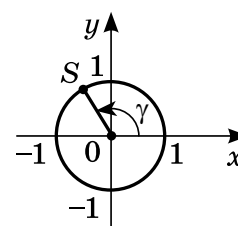


Рис. 3

28. Користуючись умовою попереднього завдання, укажіть проміжок, якому належить значення $\operatorname{tg} \gamma$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -1)$	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	$(1; +\infty)$	Визначити неможливо

29. Укажіть числовий вираз, значення якого є найбільшим.

А	Б	В	Г	Д
$\operatorname{ctg} 5$	$\sin 4$	$\operatorname{tg} 3$	$\cos 2$	$\sin 1$

30. Укажіть числовий вираз, значення якого є найменшим.

А	Б	В	Г	Д
$\cos 1$	$\sin 2$	$\sin 3$	$\cos 4$	$\cos 5$

31. Відомо, що $a = \sin 1$, $b = \sin^2 1$, $c = 1$. Укажіть правильне співвідношення.

А	Б	В	Г	Д
$b < a < c$	$a < c < b$	$c < b < a$	$a < b < c$	$a = b = c$

32. Відомо, що $x = \sin 2$, $y = \sin^2 2$, $z = \cos 2$. Укажіть правильну подвійну нерівність.

А	Б	В	Г	Д
$x < y < z$	$x < z < y$	$z < y < x$	$z < x < y$	$y < x < z$

33. Спростіть вираз $\sin\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right)$.

А	Б	В	Г	Д
$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	1	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$

34. Спростіть вираз $\cos(9\pi + \beta)$.

А	Б	В	Г	Д
$\cos \beta$	$\sin \beta$	1	$-\sin \beta$	$-\cos \beta$

35. Відомо, що $\operatorname{tg}(x + \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$. Якого значення МОЖЕ набувати градусна міра кута x ?

А	Б	В	Г	Д
45°	135°	180°	270°	360°

36. Відомо, що $\cos(x+\beta) = -\sin\beta$. Якого значення МОЖЕ набувати градусна міра кута x ?

А	Б	В	Г	Д
45°	90°	180°	270°	360°

37. Знайдіть $\cos\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$, а $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

А	Б	В	Г	Д
$3\sqrt{10}$	$\frac{3}{\sqrt{10}}$	$\frac{1}{\sqrt{10}}$	$\frac{\sqrt{10}}{3}$	$\frac{1}{3\sqrt{10}}$

38. Знайдіть $\sin\beta$, якщо $\operatorname{ctg}\beta = \sqrt{8}$, а $\cos\beta = \frac{\sqrt{8}}{3}$.

А	Б	В	Г	Д
3	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{\sqrt{8}}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$

39. Спростіть вираз $\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta} + \frac{\cos\beta}{1+\sin\beta}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2}{\sin\beta}$	$\frac{2}{1+\sin\beta}$	1	$\frac{2}{1+\cos\beta}$	$\frac{2}{\cos\beta}$

40. Спростіть вираз $\operatorname{tg}^2\alpha - \frac{1}{\cos^2\alpha}$.

А	Б	В	Г	Д
1	$-\operatorname{tg}^2\alpha$	-1	$-\operatorname{ctg}^2\alpha$	0

41. Спростіть вираз $\cos^4\alpha + \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$.

А	Б	В	Г	Д
$\cos^2\alpha$	$1+\cos^2\alpha$	1	$1+\sin^2\alpha$	$\sin^2\alpha$

42. Спростіть вираз $\operatorname{tg}\beta \cdot (\cos\beta + \operatorname{ctg}\beta)$.

А	Б	В	Г	Д
$1 + \operatorname{tg}\beta$	$1 + \cos\beta$	1	$1 + \sin\beta$	$1 + \operatorname{ctg}\beta$

43. Спростіть вираз $\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \sqrt{3}\cos\alpha}{2\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + \sqrt{3}\sin\alpha}$.

А	Б	В	Г	Д
$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$

44. Спростіть вираз $\frac{\cos(45^\circ + \beta) + \sin(45^\circ + \beta)}{\cos(45^\circ + \beta) - \sin(45^\circ + \beta)}$.

А	Б	В	Г	Д
$\operatorname{tg}\beta$	$\operatorname{ctg}\beta$	0	$-\operatorname{ctg}\beta$	$-\operatorname{tg}\beta$

45. Спростіть вираз $\sin^2 4\alpha - \cos^2 4\alpha$.

А	Б	В	Г	Д
$-\cos 2\alpha$	$-\cos 8\alpha$	1	$\cos 8\alpha$	$\cos 2\alpha$

46. Спростіть вираз $\cos^2 6\beta + \sin^2(-6\beta)$.

А	Б	В	Г	Д
$-\cos 2\beta$	$-\cos 12\beta$	1	$\cos 12\beta$	$\cos 2\beta$

47. Спростіть вираз $\frac{\sin 18\alpha + \sin 6\alpha}{\cos 6\alpha}$.

А	Б	В	Г	Д
$2\sin 12\alpha$	$2\cos 12\alpha$	$\operatorname{tg} 3\alpha + \operatorname{tg} \alpha$	$2\cos 24\alpha$	$2\sin 24\alpha$

48. Спростіть вираз $\frac{\cos 6\beta - \cos 10\beta}{2\sin 4\beta \cdot \cos 4\beta}$.

А	Б	В	Г	Д
$-2\sin 2\beta$	$-2\sin 4\beta$	$\sin 2\beta$	$2\sin 4\beta$	$2\sin 2\beta$

49. Укажіть числовий вираз, значення якого є найбільшим.

А	Б	В	Г	Д
$\arcsin 1$	$\arccos 1$	$\operatorname{arctg} 1$	$\operatorname{arcctg} 1$	1

50. Укажіть числовий вираз, значення якого є найменшим.

А	Б	В	Г	Д
$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$	$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$	$\operatorname{arctg}(-1)$	$\operatorname{arcctg}(-1)$	$\arccos(-1)$

У завданнях 51–54 сформульовано проблему (питання), яку потрібно розв'язати (отримати однозначну відповідь на питання), використовуючи для цього додаткові дані — твердження (1) і (2). Визначте, чи достатньо цих даних для розв'язання проблеми, і оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь*.

51. Знайдіть $5 \cdot \operatorname{ctg} \alpha$.

$$(1) \sin \alpha = \sqrt{\frac{2}{7}}.$$

$$(2) \cos \alpha = \sqrt{\frac{5}{7}}.$$

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

52. Знайдіть $4 + \cos^2 \beta$.

$$(1) \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$(2) \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

* Саму проблему розв'язувати не обов'язково.

53. Знайдіть $\sin^2 \beta - \cos^2 \beta$.

(1) $\sin \beta - \cos \beta = -0,2$.

(2) $\cos 2\beta = 0,28$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

54. Знайдіть $\sin \gamma \cdot \cos \gamma$.

(1) $\sin \gamma + \cos \gamma = 1,4$.

(2) $\sin 2\gamma = 0,96$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

У завданнях 55–56 порівняйте величини X і Y та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

55. Відомо, що $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

Величина X : $\sin \alpha$.

Величина Y : $\cos \alpha$.

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

56. Відомо, що $\beta \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Величина X : $\cos \beta$.

Величина Y : $\operatorname{tg} \beta$.

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

Завдання на встановлення відповідності

У завданнях 57–60 до кожного рядка, позначеного цифрою, доберіть один відповідник, позначений літерою.

57. Установіть відповідність між виразами (1–4) і тотожно рівними їм виразами (А–Д).

1	$-\sin\alpha$	А	$\cos(\pi + \alpha)$
2	$\sin\alpha$	Б	$\sin(\pi - \alpha)$
3	$\cos\alpha$	В	$\cos\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right)$
4	$-\cos\alpha$	Г	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$
		Д	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

58. Установіть відповідність між виразами (1–4) і тотожно рівними їм виразами (А–Д).

1	$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$	А	$2\operatorname{ctg}\alpha$
2	$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha$	Б	$\sin 2\alpha$
3	$2\cos\alpha \cdot \sin\alpha$	В	$\cos 2\alpha$
4	$\frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha}$	Г	$2\operatorname{tg}\alpha$
		Д	1

59. Установіть відповідність між виразами (1–4) і їх числовими значеннями (А–Д).

1	$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$	А	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
2	$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$	Б	$\frac{1}{2}$
3	$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$	В	$-\frac{1}{2}$
4	$\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$	Г	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
		Д	$-\sqrt{3}$

60. Установіть відповідність між виразами (1–4) і їх числовими значеннями (А–Д).

1	$\arcsin 1$	А	$\frac{\pi}{4}$
2	$\arccos(-1)$	Б	$\frac{\pi}{2}$
3	$\operatorname{arctg} 1$	В	$\frac{3\pi}{4}$
4	$\operatorname{arcctg}(-1)$	Г	π
		Д	$-\frac{\pi}{4}$

Завдання на встановлення послідовності

У завданнях 61–62 виберіть тільки необхідні для розв'язання поставленої задачі дії і розмістіть їх у правильній послідовності. У відповідь запишіть отриману послідовність літер.

61. Як спростити вираз $\operatorname{tg} 80^\circ \cdot \operatorname{tg} 10^\circ$?

- А Знайти добуток 80 і 10.
- Б Подати кут 80° у вигляді різниці: $80^\circ = 90^\circ - 10^\circ$.
- В Виконати перетворення за формулою $\operatorname{tg}(90^\circ - 10^\circ) = \operatorname{tg} 10^\circ$.
- Г Виконати перетворення за формулою $\operatorname{tg}(90^\circ - 10^\circ) = \operatorname{ctg} 10^\circ$.
- Д Записати відповідь: $\operatorname{tg}^2 10^\circ$.
- Е Записати відповідь: $\operatorname{tg} 800^\circ$.
- Є Записати відповідь: 1.

62. Як спростити вираз $\cos(-\alpha) \cdot \operatorname{ctg} \alpha$?

- А Виразити $\operatorname{ctg} \alpha$ через $\sin \alpha$ і $\cos \alpha$.
- Б Виконати перетворення $\cos(-\alpha) = -\cos \alpha$.
- В Виконати перетворення $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$.
- Г Записати відповідь: $-\frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha}$.
- Д Записати відповідь: $\frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha}$.
- Е Записати відповідь: $-\sin \alpha$.
- Є Записати відповідь: $\sin \alpha$.

Завдання з короткою відповіддю

Розв'яжіть завдання 63–92 і запишіть відповідь **ОДНИМ ЧИСЛОМ**.

63. Знайдіть $\cos\alpha$, якщо $\sin\alpha = -0,2$ і $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.
64. Знайдіть $\sin\beta$, якщо $\cos\beta = -\frac{7}{25}$ і $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$.
65. Знайдіть $\sin\alpha$, якщо $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{15}$ і $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.
66. Знайдіть $\operatorname{tg}\gamma$, якщо $\sin\gamma = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ і $\frac{3\pi}{2} < \gamma < 2\pi$.
67. Знайдіть значення виразу $\frac{3\cos\gamma + 10\sin\gamma}{\cos\gamma}$, якщо $\operatorname{tg}\gamma = 4$.
68. Знайдіть значення виразу $\frac{16\sin\varphi + 2\cos\varphi}{\cos\varphi}$, якщо $\operatorname{ctg}\varphi = -\frac{1}{2}$.
69. Знайдіть значення виразу $\cos(30^\circ - \alpha)$, якщо $\sin\alpha = 0,6$ і $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Відповідь округліть до сотих, вважаючи, що $\sqrt{3} \approx 1,73$, $\sqrt{2} \approx 1,41$.
70. Знайдіть значення виразу $\sin\left(\beta - \frac{\pi}{3}\right)$, якщо $\sin\beta = -0,6$ і $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$. Відповідь округліть до сотих, вважаючи, що $\sqrt{3} \approx 1,73$, $\sqrt{2} \approx 1,41$.
71. Знайдіть значення виразу $\frac{\operatorname{tg} 100^\circ + \operatorname{tg} 35^\circ}{1 - \operatorname{tg} 100^\circ \cdot \operatorname{tg} 35^\circ}$.
72. Знайдіть значення виразу $\frac{\operatorname{tg} 340^\circ - \operatorname{tg} 100^\circ}{1 + \operatorname{tg} 340^\circ \cdot \operatorname{tg} 100^\circ}$.
73. Обчисліть: $18 \cdot \sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ$.
74. Обчисліть: $10\sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{8}$.
75. Знайдіть значення виразу $\sin(5\pi - 2\varphi)$, якщо $\cos\varphi = -0,8$ і $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$.
76. Знайдіть значення виразу $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2\gamma\right)$, якщо $\sin\gamma = -0,8$ і $\pi < \gamma < \frac{3\pi}{2}$.
77. Знайдіть значення виразу $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 9$.

78. Знайдіть значення виразу $\sin^4 \beta + \cos^4 \beta$, якщо $\sin \beta \cdot \cos \beta = 0,4$.
79. Відомо, що $\cos \alpha + \sin \alpha = 1,4$, а $\cos \alpha - \sin \alpha = -0,2$. Знайдіть $\cos 2\alpha$.
80. Відомо, що $\cos 2\varphi = 0,7$. Знайдіть значення виразу $\sin^4 \varphi - \cos^4 \varphi$.
81. Знайдіть $\sin \alpha$, якщо $\cos 2\alpha = -0,62$ і $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.
82. Знайдіть $\operatorname{tg} \beta$, якщо $\cos 2\beta = -0,8$ і $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$.
83. Відомо, що $\operatorname{tg} 2\alpha = 7$. Знайдіть $\cos 4\alpha$.
84. Відомо, що $\operatorname{ctg} 3\gamma = -\frac{1}{2}$. Знайдіть $\sin 6\gamma$.
85. Знайдіть значення виразу $\frac{\sin 2\alpha + \sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{\sin \alpha (1 + \cos \alpha - 2\sin^2 2\alpha)}$ при $\alpha = 10^\circ$.
86. Знайдіть значення виразу $\sin 7\beta - \sin \beta - 2\sin \beta \cdot (\cos 2\beta + \cos 4\beta + \cos 6\beta)$ при $\beta = 18^\circ$.
87. Спростіть вираз $\frac{(\sin(90^\circ + 3\alpha) + \cos(180^\circ + \alpha)) \cdot (\sin(180^\circ - 3\alpha) - \cos(270^\circ + \alpha))}{1 + \cos(180^\circ - 2\alpha)}$ і знайдіть його значення при $\alpha = 7,5^\circ$.
88. Спростіть вираз $\frac{\left(\cos(2\pi - \beta) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 5\beta\right)\right) \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) - \sin(\pi + 5\beta)\right)}{1 + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 6\beta\right)}$ і знайдіть його значення при $\alpha = \frac{\pi}{16}$.
89. Обчисліть: $\operatorname{ctg}(4\pi + \operatorname{arctg} 6)$.
90. Обчисліть: $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{4}{3}\right)$.
91. Використовуючи прямокутний трикутник (рис. 4), обчисліть $\sin\left(\operatorname{arctg} \frac{6}{8}\right)$.
92. Використовуючи прямокутний трикутник (рис. 4), обчисліть $\operatorname{ctg}(\operatorname{arccos}(0,6))$.

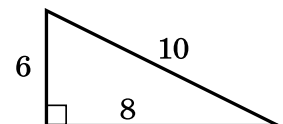


Рис. 4

Завдання з повним розв'язанням

Завдання 93–100 розв'яжіть із повним обґрунтуванням, посилаючись на відповідні означення, твердження, формули. У разі потреби проілюструйте розв'язання таблицями, діаграмами, графіками тощо.

93. Доведіть тотожність:

а) $8 \sin \alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos \alpha + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 8\alpha\right) = 0$;

б) $\cos 3\gamma \cdot \cos 6\gamma \cdot \cos 12\gamma \cdot \cos 24\gamma = \frac{\sin 45\gamma \cos 3\gamma + \cos 45\gamma \sin 3\gamma}{16 \sin 3\gamma}$, $\gamma \neq \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.

94. Доведіть рівність:

а) $\cos \frac{\pi}{19} + \cos \frac{3\pi}{19} + \cos \frac{5\pi}{19} + \dots + \cos \frac{17\pi}{19} = \frac{1}{2}$;

б) $\cos \frac{6\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{11\pi}{14} = -\frac{1}{2}$.

95. Доведіть рівність:

а) $16 \cos \frac{\pi}{9} \cdot \cos \frac{2\pi}{9} \cdot \cos \frac{4\pi}{9} = 2$;

б) $\cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{8}$.

96. Знайдіть найбільше та найменше значення виразу:

а) $8\sqrt{3} \cos \alpha + 8 \sin \alpha$;

б) $15 \sin \beta - 8 \cos \beta$.

97. Виразіть $\cos(\alpha - \beta)$ через a і b , якщо $\cos \alpha + \cos \beta = a$, а $\sin \alpha + \sin \beta = b$.

98. Виразіть $\sin(\alpha + \beta)$ через a і b , якщо $\sin \alpha + \cos \beta = a$, а $\cos \alpha + \sin \beta = b$.

99. Доведіть рівність:

а) $\operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} = \frac{\pi}{4}$;

б) $\operatorname{arctg} A + \operatorname{arctg} \frac{1}{A} = \frac{\pi}{2}$ при $A > 0$.

100. Обчисліть значення виразу:

а) $\arccos(\cos 6)$;

б) $\arccos(\sin 6)$.

1.4. Логарифмічні вирази

Найпростіші завдання з повним розв'язанням

Обчисліть УСНО значення логарифмів і логарифмічних виразів, наведених у завданнях 1–20.

- | | |
|--------------------------------------|-------------------------------------|
| 1. $\log_{12} 1$. | 11. $\log_{125} \frac{1}{5}$. |
| 2. $\log_6 6$. | 12. $\log_4 8$. |
| 3. $\log_2 8$. | 13. $\log_3 3^{10}$. |
| 4. $\lg 100$. | 14. $\log_2 4^5$. |
| 5. $\log_{\frac{1}{4}} 4$. | 15. $7^{\log_7 15}$. |
| 6. $\log_5 \frac{1}{25}$. | 16. $10^{2\lg 3}$. |
| 7. $\log_2 \sqrt{2}$. | 17. $\log_{15} 3 + \log_{15} 5$. |
| 8. $\log_9 3$. | 18. $\log_{20} 100 - \log_{20} 5$. |
| 9. $\log_4 \sqrt[3]{4}$. | 19. $\frac{\ln 100}{\ln 10}$. |
| 10. $\log_3 \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$. | 20. $\frac{\log_4 6}{\log_4 36}$. |

Завдання з вибором однієї правильної відповіді

Проаналізуйте умови та вимоги завдань 21–50 та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

21. Укажіть проміжок, якому належить число $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-2; -1)$	$(-1; 0)$	$\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$	$(1; 2)$	$(2; 3)$

22. Укажіть інтервал, якому належить число $\log_7 \frac{1}{5}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-2; -1)$	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	$(1; 5)$	$(5; 7)$

23. Відомо, що $a = \log_{\frac{1}{2}} 5$, $b = \log_2 5$, $c = \log_5 2$. Укажіть правильну подвійну нерівність.

А	Б	В	Г	Д
$c < b < a$	$a < c < b$	$a < b < c$	$b < c < a$	$b < a < c$

24. Відомо, що $a = \log_4 3$, $b = \log_{\frac{1}{3}} 4$, $c = \log_3 4$. Укажіть правильну подвійну нерівність.

А	Б	В	Г	Д
$c < b < a$	$a < c < b$	$a < b < c$	$b < c < a$	$b < a < c$

25. Обчисліть: $\log_{\sqrt{5}} \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \right)$.

А	Б	В	Г	Д
5	$\sqrt{5}$	$\frac{1}{2}$	1	0

26. Обчисліть: $\log_8 \left(\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{8}} \right)$.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt[3]{8}$	0	$\frac{1}{3}$	1	8

27. $\lg(\operatorname{tg}5^\circ) \cdot \lg(\operatorname{tg}15^\circ) \cdot \lg(\operatorname{tg}25^\circ) \cdot \dots \cdot \lg(\operatorname{tg}85^\circ) = \dots$

А	Б	В	Г	Д
0	$\lg(\operatorname{tg}5^\circ \cdot \operatorname{tg}15^\circ \cdot \operatorname{tg}25^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{tg}85^\circ)$	1	$\lg(\operatorname{tg}5^\circ + \operatorname{tg}15^\circ + \operatorname{tg}25^\circ + \dots + \operatorname{tg}85^\circ)$	-1

28. $2^{\ln(\sin 10^\circ) \cdot \ln(\sin 20^\circ) \cdot \ln(\sin 30^\circ) \cdot \dots \cdot \ln(\sin 170^\circ)} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
0	$2^{\ln(\sin 10^\circ \cdot \sin 20^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \dots \cdot \sin 170^\circ)}$	1	$2^{\ln(\sin 10^\circ + \sin 20^\circ + \sin 30^\circ + \dots + \sin 170^\circ)}$	2

29. Укажіть правильну рівність.

А	Б	В	Г	Д
$2 + \log_2 8 = 8$	$2^{\log_8 2} = 8$	$2 - \log_2 8 = 8$	$2^{\log_2 8} = 8$	$2 \cdot \log_2 8 = 8$

30. Укажіть правильну рівність для довільних $a > 1$, $b > 1$, $c > 1$.

А	Б	В	Г	Д
$b^{\log_c a} = c$	$a^{\log_b c} = c$	$c^{\log_c a} = c$	$a^{\log_c b} = a$	$b^{\log_b c} = c$

31. Знайдіть $\log_2(4a)$, якщо $\log_2 a = 5$.

А	Б	В	Г	Д
7	6	9	8	20

32. Знайдіть $\log_3\left(\frac{b}{3}\right)$, якщо $\log_3 b = 6$.

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	5	9

33. Укажіть правильну рівність.

А	Б	В	Г	Д
$\lg 5 + \lg 3 = \lg 8$	$\lg 5 + \lg 3 = \lg 2$	$\lg 5 + \lg 3 = \lg 15$	$\lg 5 + \lg 3 = \log_{20} 8$	$\lg 5 + \lg 3 = \log_{20} 15$

34. Укажіть правильну рівність для довільних $a > 1$, $b > 1$, $c > 1$.

А	Б	В	Г	Д
$\log_a b + \log_c b =$ $= \log_{ac} b$	$\log_a b + \log_c b =$ $= \log_{a+c} b$	$\log_b a + \log_b c =$ $= \log_b(a+c)$	$\log_b a + \log_b c =$ $= \log_b(ac)$	$\log_b a + \log_c b =$ $= \log_{bc}(ab)$

35. Знайдіть $\lg \frac{8}{7}$, якщо $\lg \frac{7}{8} = a$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{a}$	a	$1-a$	$-a$	$-\frac{1}{a}$

36. Знайдіть $\log_2 \frac{b}{a}$, якщо $\log_2 \frac{a}{b} = 7$.

А	Б	В	Г	Д
-7	$\frac{1}{7}$	-49	$-\frac{1}{7}$	7

37. Укажіть правильну рівність.

А	Б	В	Г	Д
$2 \cdot \log_3 5 = \log_3 10$	$2 \cdot \log_3 5 = \log_6 5$	$2 \cdot \log_3 5 = \log_9 25$	$2 \cdot \log_3 5 = \log_3 25$	$2 \cdot \log_3 5 = \log_9 25$

38. Укажіть правильну рівність для довільних $a > 1$, $b > 1$, $c > 1$.

А	Б	В	Г	Д
$\log_a (b^c) = \log_{a^c} b$	$\log_{a^c} b = \frac{\log_a b}{c}$	$\log_a (b^c) = b \cdot \log_a c$	$\log_{a^c} b = \frac{\log_a c}{b}$	$\log_{a^c} b = c \cdot \log_a b$

39. Знайдіть $\log_5 2$, якщо $\log_2 5 = b$.

А	Б	В	Г	Д
$1 - b$	$-b$	$\frac{1}{b}$	$-\frac{1}{b}$	b

40. Знайдіть $\log_b c$, якщо $\log_c b = 3$.

А	Б	В	Г	Д
3	$-\frac{1}{3}$	-2	-3	$\frac{1}{3}$

41. Обчисліть: $25^{\log_5 4}$.

А	Б	В	Г	Д
2	4	5	8	16

42. Обчисліть: $3^{\log_9 16}$.

А	Б	В	Г	Д
3	4	8	16	256

43. Знайдіть значення виразу $\log_{11}^2 11^3$.

А	Б	В	Г	Д
1	5	6	9	11

44. Знайдіть значення виразу $\log_9^3 9^4$.

А	Б	В	Г	Д
81	64	12	7	1

45. Знайдіть: $\log_{(\sqrt{2}-1)}(\sqrt{2}+1)$.

А	Б	В	Г	Д
$1-\sqrt{2}$	1	0	-1	$1+\sqrt{2}$

46. Знайдіть: $\log_{(2+\sqrt{3})}(2-\sqrt{3})$.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{3}-2$	-1	0	1	$2-\sqrt{3}$

47. Укажіть правильну рівність.

А	Б	В	Г	Д
$\log_5 3 = \frac{\log_2 3}{\log_5 2}$	$\log_5 3 = \frac{\log_5 2}{\log_2 3}$	$\log_5 3 = \frac{\log_2 3}{\log_2 5}$	$\log_5 3 = \frac{\log_2 5}{\log_2 3}$	$\log_5 3 = \frac{\log_3 2}{\log_5 2}$

48. Укажіть правильну рівність для довільних $a > 1$, $b > 1$, $c > 1$.

А	Б	В	Г	Д
$\log_a b = \frac{\lg(bc)}{\lg(ac)}$	$\log_a b = \frac{\log_b c}{\log_a c}$	$\log_a b = \frac{\log_c a}{\log_c b}$	$\log_a b = \frac{\log_a c}{\log_b c}$	$\log_a b = \frac{\lg(ac)}{\lg(bc)}$

49. Відомо, що $a = \log_4 \sin \frac{\pi}{6}$, $b = -6^{-2 \log_6 2}$, $c = -2^{\frac{-1}{2 \log_9 2}}$. Укажіть правильну подвійну нерівність.

А	Б	В	Г	Д
$a < b < c$	$a < c < b$	$c < b < a$	$b < c < a$	$b < a < c$

50. Відомо, що $x = \log_9 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6}$, $y = 27^{1 - \log_3 5}$, $z = 7^{\frac{-2}{\log \sqrt{5} 7}}$. Укажіть правильну подвійну нерівність.

А	Б	В	Г	Д
$z < y < x$	$y < z < x$	$x < y < z$	$z < x < y$	$x < z < y$

У завданнях 51–54 сформульовано проблему (питання), яку потрібно розв’язати (отримати однозначну відповідь на питання), використовуючи для цього додаткові дані — твердження (1) і (2). Визначте, чи достатньо цих даних для розв’язання проблеми, і оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь*.

51. Знайдіть значення $\log_a b$.

(1) $b = a^4$.

(2) $b = 4^a$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

52. Знайдіть значення $\log_{x^2}(y^2)$.

(1) $x + y = 0,75$.

(2) $y = 2x$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

53. У скільки разів число a більше за число b ?

(1) $\log_2 a - \log_2 b = 3$.

(2) $\log_2 a + \log_2 b = 5$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

54. Знайдіть значення добутку $a \cdot b \cdot c$.

(1) $\lg a + \lg b = \lg c$.

(2) $\lg a + \lg b + \lg c = 2$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

* Саму проблему розв’язувати не обов’язково.

У завданнях 55–56 порівняйте величини X і Y та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

55. Відомо, що $\log_5(-a \cdot b) = \log_5 a + \log_5(-b)$.

Величина X : значення параметра a . Величина Y : значення параметра b .

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

56. Відомо, що $\log_6\left(\frac{a}{b}\right) = \log_6(-a) - \log_6(-b)$.

Величина X : значення параметра a . Величина Y : значення параметра b .

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

Завдання на встановлення відповідності

У завданнях 57–60 до кожного рядка, позначеного цифрою, доберіть один відповідник, позначений літерою.

57. Установіть відповідність між виразами (1–4) і тотожно рівними їм виразами (А–Д) при $a > 0$.

1 $\lg(10a)$	А 10
2 $\lg a^{10}$	Б $1 - \lg a$
3 $\lg\left(\frac{10}{a}\right)$	В $1 + \lg a$
4 $10^{\lg a}$	Г $10 \cdot \lg a$
	Д a

58. Установіть відповідність між виразами (1–4) і їх числовими значеннями (А–Д).

1 $\log_3 \sqrt{3}$	А -1
2 $\log_{\sqrt{3}}(\sqrt{4} - 1)$	Б 0
3 $\log_{\sqrt{3}} 3$	В $\frac{1}{2}$
4 $\log_3\left(\frac{30}{10}\right)$	Г 1
	Д 2

59. Установіть відповідність між властивостями (1–4) чисел і числами (А–Д), які мають ці властивості.
- | | |
|--|---------------------------------|
| 1 Число є натуральним | А $\log_{\sqrt{5}} 1$ |
| 2 Число є цілим і від'ємним | Б $\log_{\sqrt[4]{3}} \sqrt{3}$ |
| 3 Число є раціональним, але не є цілим | В $\log_3 4$ |
| 4 Число є ірраціональним | Г $\log_9 3$ |
| | Д $\log_{0,5} 4$ |
60. Установіть відповідність між властивостями (1–4) чисел і виразами (А–Д), значення яких мають ці властивості при $a > 0$, $a \neq 1$.
- | | |
|---|---------------------|
| 1 Число є натуральним | А $\log_a (a^3)$ |
| 2 Число є цілим і від'ємним | Б $\log_{a^3} (a)$ |
| 3 Число є нецілим, раціональним і від'ємним | В $-a^{-\log_a 5}$ |
| 4 Число є нецілим, раціональним і додатним | Г $\log_{3a} (5^a)$ |
| | Д $-a^{\log_a 5}$ |

Завдання на встановлення послідовності

У завданнях 61–62 виберіть тільки необхідні для розв'язання поставленої задачі дії і розмістіть їх у правильній послідовності. У відповідь запишіть отриману послідовність літер.

61. Відомо, що $\log_a b = 4$ ($a > 1$, $b > 1$). Як знайти значення виразу $\log_b \left(\frac{1}{a} \right)$?
- А Використати тотожність $\log_b \left(\frac{1}{a} \right) = \frac{1}{\log_b a}$.
- Б Використати тотожність $\log_b \left(\frac{1}{a} \right) = -\log_b a$.
- В Використати тотожність $\log_b \left(\frac{1}{a} \right) = \log_b (-a)$.
- Г Використати властивість $\log_b (-a) = -\log_b a$.
- Д Використати тотожність $\log_b a = -\log_a b$.
- Е Використати тотожність $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$.
- Є Підставити замість виразу $\log_a b$ його значення.

62. Відомо, що $\log_x y = 2$ ($0 < x < 1$, $0 < y < 1$). Як знайти значення виразу $\log_y(xy)$?
- А Використати тотожність $\log_y(xy) = \log_y x + \log_y y$.
- Б Використати тотожність $\log_y(xy) = \log_y x \cdot \log_y y$.
- В Врахувати, що $\log_y y = 0$.
- Г Врахувати, що $\log_y y = 1$.
- Д Використати тотожність $\log_y x = -\log_x y$.
- Е Використати тотожність $\log_y x = \frac{1}{\log_x y}$.
- Є Підставити замість виразу $\log_x y$ його значення.

Завдання з короткою відповіддю

Розв'яжіть завдання 63–92 і запишіть відповідь **ОДНИМ ЧИСЛОМ**.

63. Обчисліть: $\log_2(\log_4(\log_8 64))$.
64. Обчисліть: $\log_2\left(\log_2\sqrt{\sqrt[4]{2}}\right)$.
65. Обчисліть: $\log_{\frac{8}{27}}(\log_{25} 125)$.
66. Обчисліть: $\log_{\frac{9}{16}}(\log_{81} 27)$.
67. Обчисліть: $\frac{1}{\log_{\sqrt[2]{27}} 3} - \frac{1}{\log_{\sqrt[2]{3}} 3}$.
68. Обчисліть: $\frac{1}{\log_{\sqrt[2]{2}} 2} - \frac{1}{\log_{\sqrt[2]{8}} 2}$.
69. Знайдіть значення виразу $\log_2 48 + \log_2 \frac{5}{3} + \log_2 \frac{4}{5}$.
70. Знайдіть значення виразу $\log_2 \frac{1}{4} + 2\log_2 \frac{3}{2} + \log_2 \frac{1}{18}$.

71. Обчисліть: $\frac{\log_{\sqrt{7}} 81}{\log_{\sqrt{7}} \sqrt[5]{3}}$.

72. Обчисліть: $\frac{\log_4 \sqrt[4]{5}}{\log_4 25}$.

73. Обчисліть: $\frac{\log_5 2 + \log_5 8}{\log_5 80 - \log_5 20}$.

74. Обчисліть: $\frac{2\log_2 6 - \log_2 12}{\log_2 27 + \log_2 3}$.

75. Знайдіть значення виразу $10^{3-\lg 5} - 49^{\log_7 12}$.

76. Знайдіть значення виразу $5^{2+\log_5 6} + 100^{\lg 9}$.

77. Обчисліть: $0,125 \cdot \left(1 + 8^{\log_2 5}\right)^{\log_{126} 2}$.

78. Обчисліть: $0,4 \cdot \left(\log_5 625 + 16^{\log_2 3}\right)^{\log_{85} 35}$.

79. Знайдіть значення виразу $\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^{\log_{12} 16} + \log_8 (4 + \sqrt{16})$.

80. Знайдіть значення виразу $\left(\frac{10}{\sqrt{5}}\right)^{\log_{20} 9} - \log_{20} (4 \cdot \sqrt{25})$.

81. Обчисліть: $\lg 50 \cdot \log_{50} 500 \cdot \log_{500} 1000$.

82. Обчисліть: $\log_2 3 \cdot \log_9 16 \cdot \log_4 10 \cdot \lg 128$.

83. Обчисліть: $3^{\frac{2}{\log_{\sqrt{5}} 3} + \frac{1}{3} \log_3 8} - 27 \log_2 \sqrt[4]{2^3 \sqrt{2}} + 1$.

84. Обчисліть: $3 \cdot 7^{\frac{2}{\log_{\sqrt{2}} 7} + \frac{1}{3} \log_7 8} - 3 \log_3 \sqrt[4]{9^3 \sqrt{9}} - 7$.

85. Обчисліть: $\left(9^{\frac{1}{2}-\log_9 4} + 36^{\log_{216} 8}\right) \cdot 25^{\log_5 2}$.

86. Обчисліть: $15 \cdot \log_{\frac{1}{11}} \left(\sqrt[5]{11} \cdot \frac{1}{121} \cdot 7^{\log_{\sqrt{7}} \sqrt[4]{121}} \right)$.

87. Знайдіть значення виразу $\log_8(64a) + \log_8 b$, якщо $\log_8(ab) = -11$.

88. Знайдіть значення виразу $\lg(4x) + \lg(25y)$, якщо $\lg(xy) = 35$.

89. Відомо, що $\lg(ab) = 4$, $\lg(bc) = 8$. Знайдіть $\lg \sqrt{\frac{a}{c}}$.

90. Відомо, що $\log_3 \frac{x}{y} = 5$, $\log_3 \frac{z}{y} = 13$. Знайдіть $\log_3 \left(\frac{x^2}{z^2} \right)$.

91. Знайдіть значення виразу $\log_{\frac{a^3}{b^2}} \left(\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{b}} \right)$, якщо $\log_a b = 2$.

92. Знайдіть значення виразу $\log_{x\sqrt{y}} \left(\frac{\sqrt{y}}{x^2} \right) + \log_{y\sqrt{x}} (x\sqrt{y})$, якщо $\log_x y = 0,5$.

Завдання з повним розв'язанням

Завдання 93–100 розв'яжіть із повним обґрунтуванням, посилаючись на відповідні означення, твердження, формули. У разі потреби проілюструйте розв'язання таблицями, діаграмами, графіками тощо.

93. Спростіть вираз $\frac{(\log_a b + \log_b a + 1) \cdot \log_a \frac{a}{b}}{1 - \log_a^3 b}$.

94. Спростіть вираз $\frac{1 + \log_x^3 y}{(\log_y x + \log_x y - 1) \cdot \log_x(xy)}$.

95. Обчисліть: $\log_n \left(\log_n \underbrace{\sqrt[n]{\sqrt[n]{\dots \sqrt[n]{n}}}}_{2012 \text{ радикалів}} \right)$.
96. Обчисліть значення виразу $\frac{1}{\log_2 M} + \frac{1}{\log_3 M} + \dots + \frac{1}{\log_{2012} M}$, якщо $M = 2012!$
97. Виразіть $\log_{70} 625$ через a і b , якщо $a = \lg 2$, $b = \lg 7$.
98. Виразіть $\ln(13,5)$ через x і y , якщо $x = \ln 3$, $y = \log_2 3$.
99. Відомо, що $\log_{xy} y = \frac{1}{3}$. Знайдіть значення виразу $\log_y^2 x + \log_y x^2 + 5$.
100. Відомо, що $\log_a \frac{b}{a} = 9$. Знайдіть значення виразу $\log_a^2 b - \frac{1}{\log_b \sqrt{a}} + 2$.

Розділ 2. ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ГРАФІКИ

2.1. Поняття функції. Основні властивості функцій

Найпростіші завдання з повним розв'язанням

Розв'яжіть УСНО завдання 1–10, користуючись тим, що функцію $y = f(x)$ задано графіком (рис. 1).

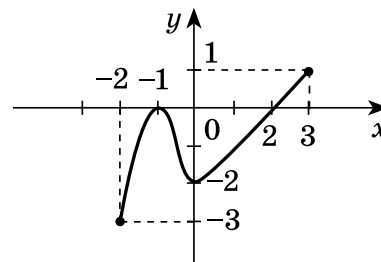


Рис. 1

1. Укажіть область визначення $D(y)$ функції $y = f(x)$.
2. Укажіть множину значень $E(y)$ функції $y = f(x)$.
3. Знайдіть за графіком функції $y = f(x)$ значення $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(3)$.
4. Для функції $y = f(x)$ знайдіть усі значення аргументу $x \in D(y)$, при яких виконується рівність $f(x) = 0$.
5. Скільки існує значень аргументу $x \in D(y)$ функції $y = f(x)$, при яких виконується рівність $f(x) = -1$?
6. Укажіть проміжки значень аргументу функції $y = f(x)$, на яких виконується нерівність $f(x) > 0$; $f(x) < 0$.
7. Чи є функція $y = f(x)$ парною? непарною?
8. Укажіть проміжки, на яких функція $y = f(x)$ зростає; спадає.
9. Укажіть найбільше та найменше значення функції $y = f(x)$ на області визначення.
10. Укажіть проміжки, на яких до функції $y = f(x)$ існує обернена функція.

Розв'яжіть УСНО завдання 11–15, користуючись тим, що функцію $y = f(x)$ задано формулою $f(x) = x^2 - 4x + 4$.

11. Укажіть область визначення $D(y)$ функції $y = f(x)$.
12. Знайдіть значення $f(0)$, $f(-1)$, $f(1)$ функції $y = f(x)$.

13. Для функції $y = f(x)$ знайдіть усі значення аргументу $x \in D(y)$, при яких виконується рівність $f(x) = 0$.
14. Скільки існує значень аргументу $x \in D(y)$ функції $y = f(x)$, при яких виконується рівність $f(x) = 4$?
15. Чи є функція $y = f(x)$ парною? непарною?

Розв'яжіть УСНО завдання 16–20, користуючись тим, що функцію $y = f(x)$ задано таблицею:

x	5	10	15	20	25	30	35
$f(x)$	-1	0	1	0	-1	0	1

16. Укажіть область визначення $D(y)$ функції $y = f(x)$.
17. Укажіть множину значень $E(y)$ функції $y = f(x)$.
18. Знайдіть значення $f(5)$, $f(20)$, $f(35)$ функції $y = f(x)$.
19. Для функції $y = f(x)$ знайдіть усі значення аргументу $x \in D(y)$, при яких виконується рівність $f(x) = 0$.
20. Скільки існує значень аргументу $x \in D(y)$ функції $y = f(x)$, при яких виконується рівність $f(x) = -1$?

Завдання з вибором однієї правильної відповіді

Проаналізуйте умови та вимоги завдань 21–50 та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

21. Укажіть рисунок, на якому позначено множину точок, що НЕ МОЖЕ належати графіку деякої функції.

А	Б	В	Г	Д

22. Укажіть рисунок, на якому зображено графік деякої функції.

А	Б	В	Г	Д

23. Укажіть точку, яка належить графіку функції $y = \frac{x^3 + x^2}{x}$.

А	Б	В	Г	Д
(0; 0)	(1; 1)	(-1; 0)	(-1; -1)	(2; 1)

24. Укажіть точку, яка НЕ НАЛЕЖИТЬ графіку функції $y = \sqrt{4 - x^2}$.

А	Б	В	Г	Д
(0; 2)	$(-2; \sqrt{8})$	(2; 0)	$(\sqrt{2}; \sqrt{2})$	$(-1; \sqrt{3})$

25. Функцію $y = f(x)$ задано графіком (рис. 2).
Знайдіть її область визначення.

А	Б	В
$[-4; 0) \cup (0; 4]$	$(-3; 0) \cup (0; 3)$	$[-4; 4]$
Г	Д	
$(-3; 3)$	$\{-4; -3; 3; 4\}$	

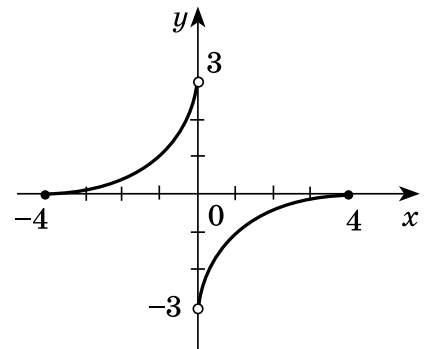


Рис. 2

26. За умовою попередньої задачі знайдіть множину значень функції $f(x)$.

А	Б	В	Г	Д
$[-4; 0) \cup (0; 4]$	$(-3; 0) \cup (0; 3)$	$[-4; 4]$	$(-3; 3)$	$\{-4; -3; 3; 4\}$

27. Функцію $y = g(x)$ задано графіком (рис. 3). Знайдіть її область визначення.

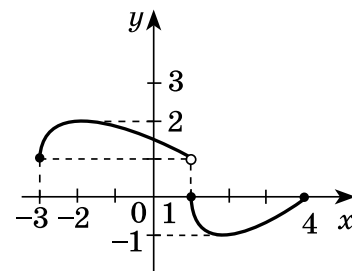


Рис. 3

А	Б	В
$[-3; 4]$	$[-1; 2]$	$[-3; 1) \cup (1; 4]$
Г		Д
$[-1; 0] \cup [1; 2]$		$[-3; 0] \cup [1; 2]$

28. За умовою попередньої задачі знайдіть множину значень функції $g(x)$.

А	Б	В	Г	Д
$[-3; 4]$	$[-1; 2]$	$[-3; 1) \cup (1; 4]$	$[-1; 0] \cup [1; 2]$	$[-3; 0] \cup [1; 2]$

29. Укажіть функцію, областю визначення якої є проміжок $(-\infty; 1)$.

А	Б	В	Г	Д
$y = \sqrt{1-x}$	$y = \ln(x-1)$	$y = \frac{1}{1-x}$	$y = \sqrt{x-1}$	$y = \ln(1-x)$

30. Укажіть функцію $y = f(x)$, для якої $D(y) = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

А	Б	В	Г	Д
$y = \sqrt{x^2 - 1}$	$y = \ln(x^2 - 1)$	$y = \frac{1}{x^2 - 1}$	$y = \ln(1 - x^2)$	$y = \sqrt{1 - x^2}$

31. Укажіть рисунок, на якому може бути зображений фрагмент графіка парної функції.

А	Б	В	Г	Д

32. Укажіть рисунок, на якому може бути зображений фрагмент графіка не-парної функції.

А	Б	В	Г	Д

33. Укажіть парну функцію.

А	Б	В	Г	Д
$y = x^4 + x$	$y = x^4 + x^2 + 1$	$y = x^3 + x$	$y = x^4 + x^3 + 1$	$y = x^3 + x^2 + 1$

34. Укажіть непарну функцію.

А	Б	В	Г	Д
$y = -\frac{1}{x^2 + 1}$	$y = \frac{1}{x^3 - x}$	$y = -\frac{1}{x^2 - 1}$	$y = \frac{1}{x^3 + 1}$	$y = -\frac{1}{x^3 - 1}$

35. На рис. 4 зображено фрагмент графіка функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $(-\infty; +\infty)$ і періодичної з періодом $T = 2$. Укажіть рисунок, на якому може бути зображений інший фрагмент графіка цієї функції.

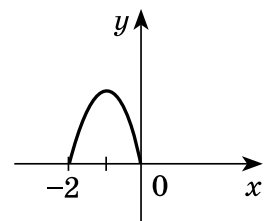


Рис. 4

А	Б	В	Г	Д

36. На рис. 5 зображено фрагмент графіка функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $(-\infty; +\infty)$ і періодичної з періодом $T = 1$. Укажіть рисунок, на якому може бути зображений інший фрагмент графіка цієї функції.

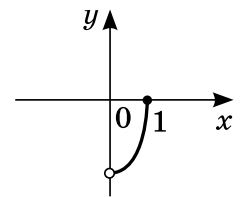


Рис. 5

А	Б	В	Г	Д

37. На рис. 6 зображено фрагмент графіка функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $(-\infty; +\infty)$ і періодичної з періодом $T = 8$. Укажіть проміжок, для всіх точок якого виконується нерівність $f(x) < 0$.

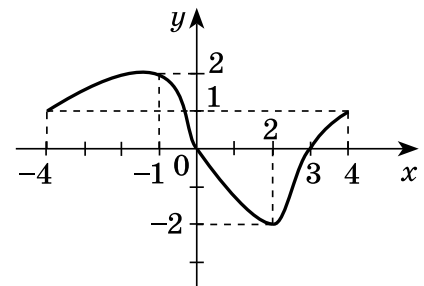


Рис. 6

А	Б	В	Г	Д
(4; 8)	(8; 12)	(10; 13)	(16; 19)	(11; 15)

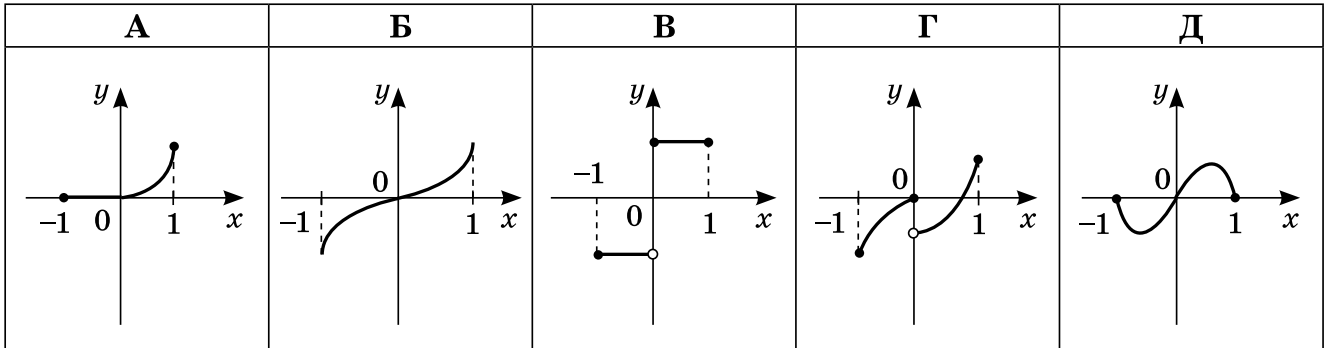
38. За умовою попередньої задачі укажіть проміжок, на якому функція $f(x)$ є зростаючою.

А	Б	В	Г	Д
(-12; -8)	(-7; -4)	(7; 10)	(11; 15)	(16; 19)

39. Укажіть графік функції, що є спадною на проміжку $[-1; 1]$.

А	Б	В	Г	Д

40. Укажіть графік функції, що є зростаючою на проміжку $[-1; 1]$.



41. Функція $y = f(x)$ є зростаючою на проміжку $[-1; +\infty)$, причому $f(-1) = -3$. Укажіть рівність, яка НЕ МОЖЕ бути правильною.

А	Б	В	Г	Д
$f(10) = -1$	$f(0) = 0$	$f(5) = -4$	$f(15) = -2$	$f(8) = 8$

42. Функція $y = f(x)$ є спадною на проміжку $(-\infty; +\infty)$. Укажіть правильну нерівність.

А	Б	В	Г	Д
$f(-2) < f(2)$	$f(-1) > f(-3)$	$f(5) < f(10)$	$f(-5) > f(-10)$	$f(3) < f(-3)$

43. Функції $f(x)$ і $g(x)$ є зростаючими на проміжку $(0; +\infty)$. Які з наведених тверджень є правильними?

- I. Функція $f(x) + g(x)$ ЗАВЖДИ є зростаючою на проміжку $(0; +\infty)$.
- II. Функція $f(x) \cdot g(x)$ ЗАВЖДИ є зростаючою на проміжку $(0; +\infty)$.
- III. Функція $\frac{f(x)}{g(x)}$ МОЖЕ БУТИ зростаючою на проміжку $(0; +\infty)$.

А	Б	В	Г	Д
Тільки I	Тільки I і II	Тільки II і III	Тільки I і III	Усі твердження

44. Функція $\varphi(x)$ є спадною на проміжку $(-\infty; +\infty)$. Які з наведених тверджень є правильними?

I. Функція $\frac{1}{\varphi(x)}$ ЗАВЖДИ є зростаючою на проміжку $(-\infty; +\infty)$.

II. Функція $(-\varphi(x))$ ЗАВЖДИ є зростаючою на проміжку $(-\infty; +\infty)$.

III. Функція $(\varphi(x))^2$ МОЖЕ БУТИ зростаючою на проміжку $(-\infty; +\infty)$.

А	Б	В	Г	Д
Тільки II	Тільки I і II	Тільки II і III	Тільки I і III	Усі твердження

45. Дано дві функції $f(x) = \sqrt{x}$ і $g(x) = \cos x$. Укажіть функцію $y = g(f(x))$.

А	Б	В	Г	Д
$y = \sqrt{\cos x}$	$y = \cos \sqrt{x}$	$y = \sqrt{x} \cdot \cos x$	$y = \cos(x\sqrt{x})$	$y = \sqrt{x \cdot \cos x}$

46. Дано функцію $h(x) = \frac{1}{x-1}$. Укажіть функцію $y = h(h(x))$.

А	Б	В	Г	Д
$y = \frac{x-1}{2-x}$	$y = \frac{1}{(x-1)^2}$	$y = 1$	$y = \frac{2-x}{x-1}$	$y = x-1$

47. На рис. 7 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної і спадної на проміжку $(-\infty; +\infty)$. Укажіть рисунок, на якому може бути зображений графік функції, оберненої до функції $f(x)$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$.

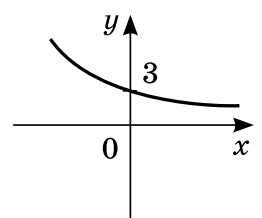


Рис. 7

А	Б	В	Г	Д

48. На рис. 8 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної і зростаючої на проміжку $(-\infty; 0]$. Укажіть рисунок, на якому може бути зображений графік функції, оберненої до функції $f(x)$ на проміжку $(-\infty; 0]$.

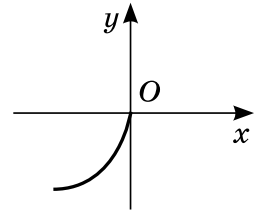


Рис. 8

А	Б	В	Г	Д

49. Укажіть функцію, яка є оберненою до функції $y = 3x - 2$.

А	Б	В	Г	Д
$y = -3x + 2$	$y = \frac{1}{3x - 2}$	$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$	$y = \sqrt{3x - 2}$	$y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

50. Укажіть функцію, що є оберненою до функції $y = 10^{1-x}$.

А	Б	В	Г	Д
$y = 10^{x-1}$	$y = \lg(1 - x)$	$y = 1 - \sqrt[10]{x}$	$y = -10^{1-x}$	$y = 1 - \lg x$

У завданнях 51–54 сформульовано проблему (питання), яку потрібно розв'язати (отримати однозначну відповідь на питання), використовуючи для цього додаткові дані — твердження (1) і (2). Визначте, чи достатньо цих даних для розв'язання проблеми, і оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь*.

51. Знайдіть значення $f(0)$.

(1) Графік функції $y = f(x)$ проходить через точку $(5; 0)$.

(2) Графік функції $y = f(x)$ проходить через точку $(0; 5)$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

* Саму проблему розв'язувати не обов'язково.

52. Функція $y = f(x)$, визначена на проміжку $(-\infty; +\infty)$, є періодичною з найменшим додатним періодом $T = 5$. Знайдіть значення $f(10)$.

(1) $f(0) = -1$.

(2) $f(15) = -1$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

53. Чи є функція $y = f(x)$, визначена на проміжку $[-2; 2]$, зростаючою на цьому проміжку?

(1) $f(2) > f(0) > f(-2)$.

(2) Функція $f(x)$ є непарною.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

54. Чи є функція $y = f(x)$, визначена на проміжку $(-\infty; +\infty)$, парною?

(1) $f(-n) = f(n)$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

(2) Функція $f(x)$ спадає на проміжку $(-\infty; 0)$ і зростає на проміжку $(0; +\infty)$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

У завданнях 55–56 порівняйте величини X і Y та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

55. На рис. 9 зображено фрагмент графіка непарної функції $y = f(x)$.

Величина X : значення $f(-1)$.

Величина Y : значення $f(1)$.

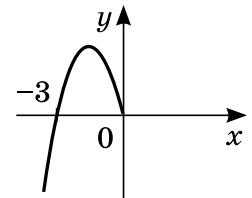


Рис. 9

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

56. На рис. 10 зображено фрагмент графіка парної функції $y = f(x)$.

Величина X : значення $f(-1)$.

Величина Y : значення $f(1)$.

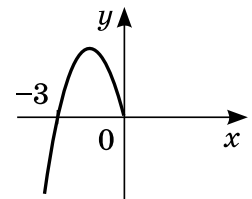


Рис. 10

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

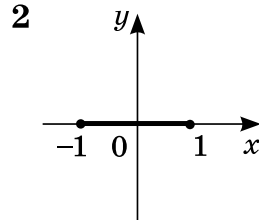
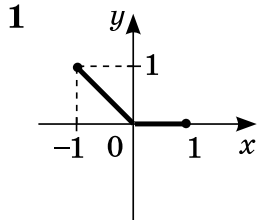
Завдання на встановлення відповідності

У завданнях 57–60 до кожного рядка або рисунка, позначеного цифрою, доберіть один відповідник, позначений літерою.

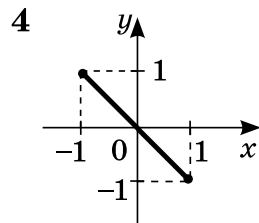
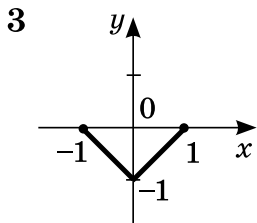
57. Установіть відповідність між функціями (1–4) і точками (А–Д), які належать графікам цих функцій.

- | | |
|---------------------|----------|
| 1 $y = 4$ | А (4; 0) |
| 2 $y = \frac{4}{x}$ | Б (0; 4) |
| 3 $y = \log_4 x$ | В (1; 0) |
| 4 $y = 4^x$ | Г (0; 1) |
| | Д (2; 2) |

58. Установіть відповідність між графіками (1–4), якими задані функції, визначені на проміжку $[-1; 1]$, і множинами значень цих функцій (А–Д).

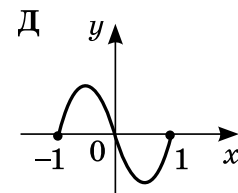
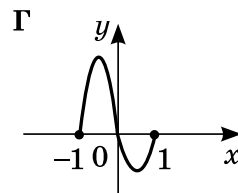
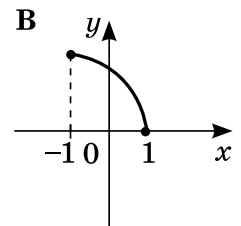
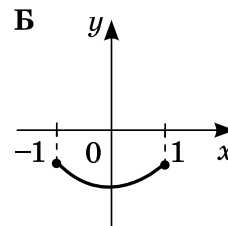
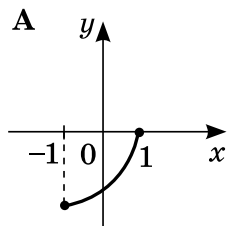


- А $\{0\}$
 Б $[-1; 0]$
 В $[-1; 1]$
 Г $[0; 1]$
 Д $\{1\}$



59. Установіть відповідність між властивостями (1–4), які мають функції, і графіками (А–Д), якими задані ці функції, визначені на проміжку $[-1; 1]$.

- 1 Функція є парною
 2 Функція є непарною
 3 Функція зростає на проміжку $[-1; 1]$
 4 Функція спадає на проміжку $[-1; 1]$



60. Установіть відповідність між властивостями (1–4), які мають функції, і цими функціями (А–Д).

- 1 Функція є парною
 2 Функція є непарною
 3 Графік функції проходить через точку $(2; 0)$
 4 Графік функції проходить через точку $(0; 2)$

- А $y = 2 - x + \sin(x^2)$.
 Б $y = \frac{x - 2}{x^2 + 1}$
 В $y = \sqrt{x^2 + 1}$
 Г $y = \sin(x^3 - x)$
 Д $y = \frac{x + 1}{x^2 - 1}$

Завдання на встановлення послідовності

У завданнях 61–62 виберіть тільки необхідні для розв'язання поставленої задачі дії і розмістіть їх у правильній послідовності. У відповідь запишіть отриману послідовність літер.

61. Як довести, що функція $y = f(x)$ є зростаючою на проміжку $[a; b]$?
- А Знайти значення $f(a)$ і $f(b)$.
 - Б Знайти значення $f(x_1)$ і $f(x_2)$.
 - В Знайти різницю $f(b) - f(a)$.
 - Г Знайти різницю $f(x_1) - f(x_2)$.
 - Д Розглянути довільні $x_1 < x_2$, $x_1 \in [a; b]$, $x_2 \in [a; b]$.
 - Е Довести, що ця різниця є від'ємною.
 - Є Довести, що ця різниця є додатною.
62. Як перевірити, чи є функція $y = f(x)$ непарною?
- А Знайти множину M — область визначення функції $D(y)$.
 - Б Знайти множину M — множину значень функції $E(y)$.
 - В Перевірити, чи містить множина M точку $x = 0$.
 - Г Перевірити, чи є множина M симетричною відносно точки $x = 0$.
 - Д Розглянути дві довільні точки x_1 і $x_2 = -x_1$, які належать множині M .
 - Е Позначити $A = f(x_1) + f(x_2)$.
 - Є Позначити $A = f(x_1) - f(x_2)$.
 - Ж Зробити висновок — якщо $A = 0$, то функція $f(x)$ є непарною.
 - З Зробити висновок — якщо $A > 0$, то функція $f(x)$ є непарною.
 - И Зробити висновок — якщо $A < 0$, то функція $f(x)$ є непарною.

Завдання з короткою відповіддю

Розв'яжіть завдання 63–92 і запишіть відповідь **ОДНИМ ЧИСЛОМ**.

63. Знайдіть значення виразу $f(-1) - f(1)$, якщо $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$.
64. Знайдіть значення виразу $g(1) \cdot g(4,5)$, якщо $g(x) = \sqrt{2x + 7}$.

65. Знайдіть значення аргументу x , при якому значення функції $y = \frac{5+9x}{x}$ дорівнює 11.
66. Знайдіть значення аргументу x , при якому значення функції $y = \frac{8-3x}{x}$ дорівнює 1.
67. Знайдіть **НАЙМЕНШЕ** значення аргументу x , при якому $f(x)=0$, якщо $f(x) = \arccos(x^2 - 15)$.
68. Знайдіть **НАЙБІЛЬШЕ** значення аргументу t , при якому $\varphi(t)=0$, якщо $\varphi(t) = \arcsin(t^2 - 64)$.
69. Область визначення функції $y = \sqrt{2-x} + \sqrt{x+5}$ є відрізком. Знайдіть довжину цього відрізка.
70. Скільки цілих чисел містить область визначення функції $y = \log_2(x+4) - \log_3(5-2x)$?
71. Укажіть найбільше число, яке **НЕ** належить області визначення функції $y = \frac{3x-12}{x^2+10x+16}$.
72. Укажіть найменше число, яке **НЕ** належить області визначення функції $y = \frac{4+x}{x^2-10x+21}$.
73. На рис. 11 зображено фрагмент графіка парної функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $(-\infty; +\infty)$. Знайдіть значення виразу $f(0) + 5 \cdot f(5)$, якщо $f(-5) = 4$.

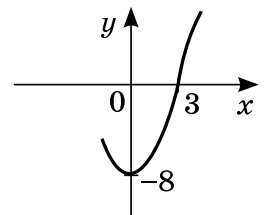


Рис. 11

74. На рис. 12 зображено фрагмент графіка непарної функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $(-\infty; +\infty)$. Знайдіть значення виразу $9 \cdot f(-4) - 5 \cdot f(2)$, якщо $f(-2) = -2$.

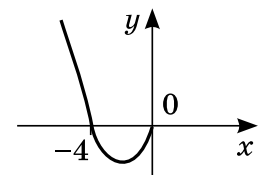


Рис. 12

75. Дано п'ять функцій: 1) $y = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x}$; 2) $y = \frac{x^3 + x - 1}{x}$; 3) $y = \sqrt{-x} + \sqrt{x}$;
4) $y = \frac{\lg(2-x) - \lg(2+x)}{x^2 + 1}$; 5) $y = \sqrt{x+7} + \sqrt{7-x}$. Скільки з них є парними?
76. За умовою попередньої задачі укажіть суму номерів функцій, які є непарними.
77. Функцію $y = x^2 + 10x + 2$ подайте у вигляді суми двох функцій $f(x) + g(x)$, де $f(x)$ — парна функція, а $g(x)$ — непарна функція. У відповідь запишіть значення виразу $f(-3) + g(2)$.
78. Функцію $y = 4x - 3|x| - 1$ подайте у вигляді суми двох функцій $f(x) + g(x)$, де $f(x)$ — парна функція, а $g(x)$ — непарна функція. У відповідь запишіть значення виразу $f(5) + g(-3)$.
79. Число $T = 5$ є періодом функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $(-\infty; +\infty)$. Знайдіть значення виразу $6 - 3 \cdot f(11)$, якщо $f(1) = 7$.
80. Число $T = 3$ є періодом функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $(-\infty; +\infty)$. Знайдіть значення виразу $f(-5) + 3 \cdot f(4)$, якщо $f(-2) = 2$.
81. Функцію $y = x^3 + 2 + \cos x + x$ подайте у вигляді суми двох функцій $f(x) + g(x)$, де $f(x)$ — періодична функція, а $g(x)$ — непарна функція. У відповідь запишіть значення $g(-2)$.
82. Функцію $y = x^5 - 2x^3 + 5$ подайте у вигляді суми двох функцій $f(x) + g(x)$, де $f(x)$ — періодична функція, а $g(x)$ — непарна функція. У відповідь запишіть значення $g(2)$.
83. На рис. 13 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-4; 4]$. Знайдіть суму $m + k$, якщо m — кількість проміжків зростання функції $y = f(x)$, k — кількість точок локального мінімуму цієї функції.

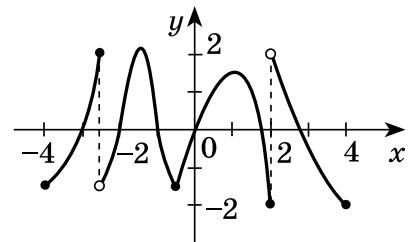


Рис. 13

84. За умовою попередньої задачі знайдіть частку $\frac{a}{b}$, якщо a — кількість проміжків спадання функції $y = f(x)$, b — кількість точок локального максимуму цієї функції.
85. Задано дві функції $f(x) = \frac{8}{x}$ і $g(x) = x + 4$. Знайдіть значення $h(4)$, якщо $h(x) = g(f(x))$.
86. Задано дві функції $f(x) = \frac{8}{x}$ і $g(x) = x + 4$. Знайдіть значення $u(4)$, якщо $u(x) = f(g(x))$.
87. Знайдіть усі значення аргументу x , при яких $\varphi(\psi(x)) = 25$, якщо $\psi(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $\varphi(x) = x^4$. У відповідь запишіть ДОБУТОК цих значень.
88. Знайдіть усі значення аргументу x , при яких $g(h(x)) = 36$, якщо $h(x) = \log_2(x^2)$, $g(x) = 2^x$. У відповідь запишіть НАЙМЕНШЕ з цих значень.
89. Функція $g(x)$ є оберненою до функції $f(x) = 2x - 15$. Знайдіть значення $g(1)$.
90. Функція $\psi(x)$ є оберненою до функції $\varphi(x) = x^2 + 9$ на проміжку $(-\infty; 0]$. Знайдіть значення $\psi(25)$.
91. Графік функції $g(x)$ симетричний графіку функції $f(x)$ відносно прямої $y = x$. Знайдіть значення $f(5)$, якщо $20 - 4 \cdot g(3) = 0$.
92. Графік функції $\psi(x)$ симетричний графіку функції $\varphi(x)$ відносно прямої $y = x$. Знайдіть значення $\varphi(10)$, якщо $50 - 5 \cdot \psi(17) = 0$.

Завдання з повним розв'язанням

Завдання 93–100 розв'яжіть із повним обґрунтуванням, посилаючись на відповідні означення, твердження, формули. У разі потреби проілюструйте розв'язання таблицями, діаграмами, графіками тощо.

93. Доведіть твердження: «Якщо число T є періодом функції $y = f(x)$, то для довільних значень $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ число $\frac{T}{a}$ є періодом функції $y = f(ax + b) + c$ ».

94. Доведіть твердження: «Якщо для функції $y = f(x)$ виконується рівність $f(x+2) = \frac{1-f(x)}{1+f(x)}$ при всіх $x \in \mathbb{R}$, то число $T = 4$ є періодом функції $y = f(x)$ ».
95. Дано прямокутник, діагональ якого дорівнює 10, а одна із сторін — x . Знайдіть функцію $S(x)$, яка описує залежність площі прямокутника S від довжини сторони x . Знайдіть область визначення і множину значень функції $S(x)$. Дослідіть функцію $S(x)$ на парність та періодичність.
96. Дано правильний трикутник, площа якого дорівнює x . Знайдіть функцію $a(x)$, яка описує залежність довжини сторони a від площі x . Знайдіть область визначення і множину значень функції $a(x)$. Дослідіть функцію $a(x)$ на парність та періодичність.
97. Відомо, що $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$. Знайдіть область визначення і множину значень функції $g(x) = f(f(x))$. Побудуйте її графік.
98. Відомо, що $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Знайдіть область визначення та множину значень функції $g(x) = f(f(f(x)))$. Побудуйте її графік.
99. Дано дві функції: $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ і $g(x) = \sin \frac{\pi x}{4}$. Знайдіть:
- функцію $h(x)$, яка є оберненою до функції $f(x)$;
 - найменший додатний період T функції $g(x)$ (див. завдання 93);
 - область визначення і множину значень функції $\varphi(x) = h(g(x))$; дослідіть цю функцію на парність.
100. Дано дві функції: $f(x) = \cos(2\pi x)$ і $g(x) = \frac{1}{x-1}$. Знайдіть:
- функцію $h(x)$, яка є оберненою до функції $g(x)$;
 - найменший додатний період T функції $f(x)$ (див. завдання 93);
 - область визначення і множину значень функції $\psi(x) = f(h(x))$; дослідіть цю функцію на парність.

2.2. Основні елементарні функції

Найпростіші завдання з повним розв'язанням

Завдання 1–20 розв'яжіть УСНО. Для наведених функцій укажіть області визначення та множини значень; точки перетину з осями координат; проміжки знакосталості; точки екстремуму (якщо вони існують); проміжки зростання і спадання.

- | | |
|--------------------------|--|
| 1. $y = 2x$. | 11. $y = \operatorname{tg} x$. |
| 2. $y = -\frac{1}{3}x$. | 12. $y = \operatorname{ctg} x$. |
| 3. $y = x^2$. | 13. $y = \arcsin x$. |
| 4. $y = -x^2$. | 14. $y = \arccos x$. |
| 5. $y = \sqrt{x}$. | 15. $y = \operatorname{arctg} x$. |
| 6. $y = \sqrt[3]{x}$. | 16. $y = \operatorname{arcctg} x$. |
| 7. $y = \frac{1}{x}$. | 17. $y = 2^x$. |
| 8. $y = \frac{1}{x^2}$. | 18. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. |
| 9. $y = \sin x$. | 19. $y = \log_5 x$. |
| 10. $y = \cos x$. | 20. $y = \log_{\frac{1}{6}} x$. |

Завдання з вибором однієї правильної відповіді

Проаналізуйте умови та вимоги завдань 21–50 та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

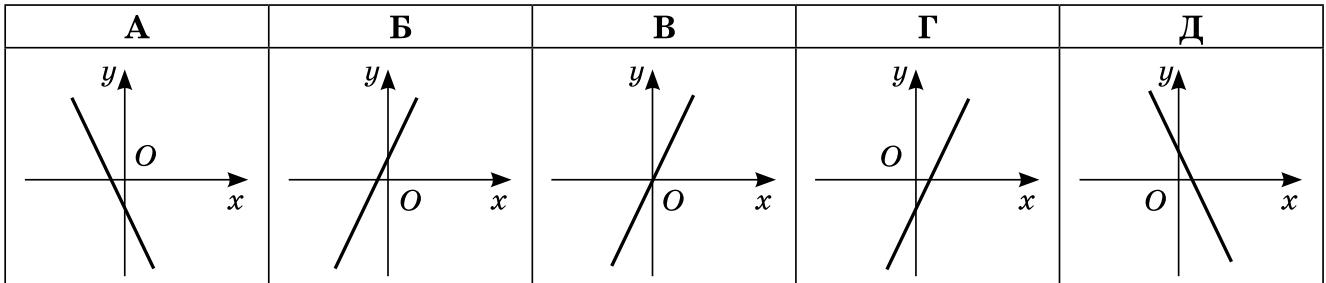
21. Укажіть рисунок, на якому може бути зображено графік функції

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}.$$

А	Б	В	Г	Д

22. Укажіть рисунок, на якому може бути зображено графік функції

$$y = 2x - \frac{1}{4}.$$



23. Укажіть функцію, графік якої проходить через дві точки, позначені на рис. 14.

А	Б	В	Г	Д
$y = -\frac{1}{2}x$	$y = 2x + 1$	$y = x + 1$	$y = -2x + 1$	$y = 1$

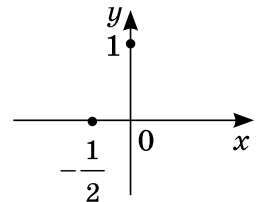


Рис. 14

24. Укажіть функцію, графік якої може проходити через дві точки, позначені на рис. 15.

А	Б	В	Г	Д
$y = 1$	$y = x$	$y = x + 1$	$y = -x$	$y = -1$

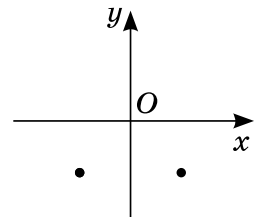


Рис. 15

25. На рис. 16 зображено графік функції $y = kx + b$. Укажіть правильне твердження стосовно параметрів k і b .

А	Б	В	Г	Д
$\begin{cases} k > 0, \\ b < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} k > 0, \\ b > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} k < 0, \\ b < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} k < 0, \\ b > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} k = 0, \\ b = 0 \end{cases}$

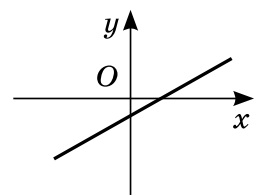


Рис. 16

26. На рис. 17 зображено графік функції $y = kx + b$. Укажіть правильне твердження стосовно параметрів k і b .

А	Б	В	Г	Д
$\begin{cases} k > 0, \\ b < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} k > 0, \\ b > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} k < 0, \\ b < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} k < 0, \\ b > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} k = 0, \\ b = 0 \end{cases}$

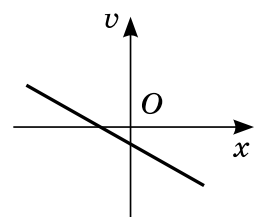


Рис. 17

27. На рис. 18 зображено графік залежності змінної z від змінної x . Відомо, що $z = x + y$. Укажіть графік залежності змінної y від змінної x .

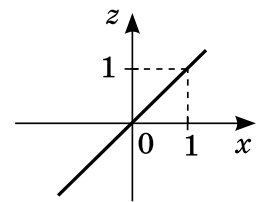


Рис. 18

А	Б	В	Г	Д
<p>A coordinate system with a vertical y-axis and a horizontal x-axis. The origin is labeled O. A horizontal line is drawn along the x-axis.</p>	<p>A coordinate system with a vertical y-axis and a horizontal x-axis. The origin is labeled O. A straight line passes through the origin and the point $(2, 1)$. Dashed lines indicate the coordinates of this point.</p>	<p>A coordinate system with a vertical y-axis and a horizontal x-axis. The origin is labeled O. A straight line passes through the origin and the point $(1, 1)$. Dashed lines indicate the coordinates of this point.</p>	<p>A coordinate system with a vertical y-axis and a horizontal x-axis. The origin is labeled O. A straight line passes through the origin and the point $(1, 2)$. Dashed lines indicate the coordinates of this point.</p>	<p>A coordinate system with a vertical y-axis and a horizontal x-axis. The origin is labeled O. A horizontal line is drawn at $y = 1$.</p>

28. За рис. 18 укажіть графік залежності змінної y від змінної x , якщо $z = y - x$.

А	Б	В	Г	Д
<p>A coordinate system with a vertical y-axis and a horizontal x-axis. The origin is labeled O. A horizontal line is drawn along the x-axis.</p>	<p>A coordinate system with a vertical y-axis and a horizontal x-axis. The origin is labeled O. A straight line passes through the origin and the point $(2, 1)$. Dashed lines indicate the coordinates of this point.</p>	<p>A coordinate system with a vertical y-axis and a horizontal x-axis. The origin is labeled O. A straight line passes through the origin and the point $(1, 1)$. Dashed lines indicate the coordinates of this point.</p>	<p>A coordinate system with a vertical y-axis and a horizontal x-axis. The origin is labeled O. A straight line passes through the origin and the point $(1, 2)$. Dashed lines indicate the coordinates of this point.</p>	<p>A coordinate system with a vertical y-axis and a horizontal x-axis. The origin is labeled O. A horizontal line is drawn at $y = 1$.</p>

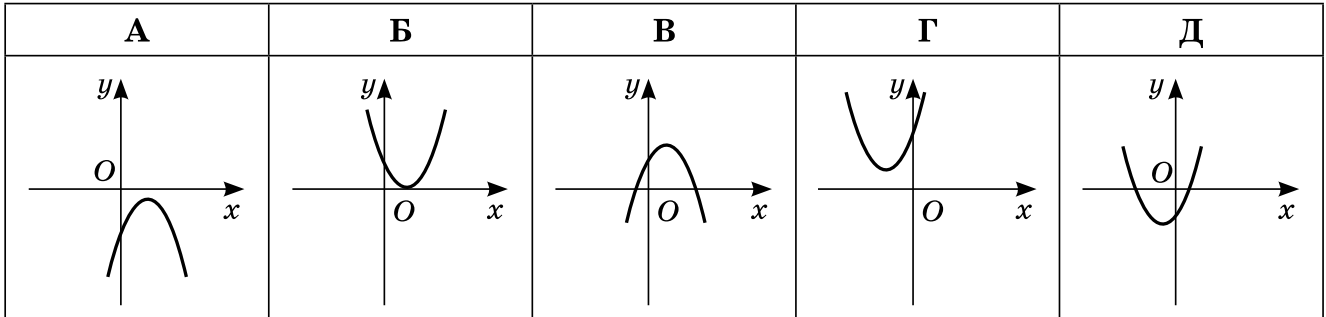
29. Укажіть рисунок, на якому може бути зображено графік функції $y = -x^2 + 4$.

А	Б	В	Г	Д
<p>A coordinate system with a vertical y-axis and a horizontal x-axis. The origin is labeled O. A parabola opens upwards with its vertex at $(0, 4)$.</p>	<p>A coordinate system with a vertical y-axis and a horizontal x-axis. The origin is labeled O. A parabola opens downwards with its vertex at $(0, -4)$.</p>	<p>A coordinate system with a vertical y-axis and a horizontal x-axis. The origin is labeled O. A parabola opens downwards with its vertex at $(0, 4)$.</p>	<p>A coordinate system with a vertical y-axis and a horizontal x-axis. The origin is labeled O. A parabola opens upwards with its vertex at $(0, -4)$.</p>	<p>A coordinate system with a vertical y-axis and a horizontal x-axis. The origin is labeled O. A parabola opens downwards with its vertex at $(0, 4)$.</p>

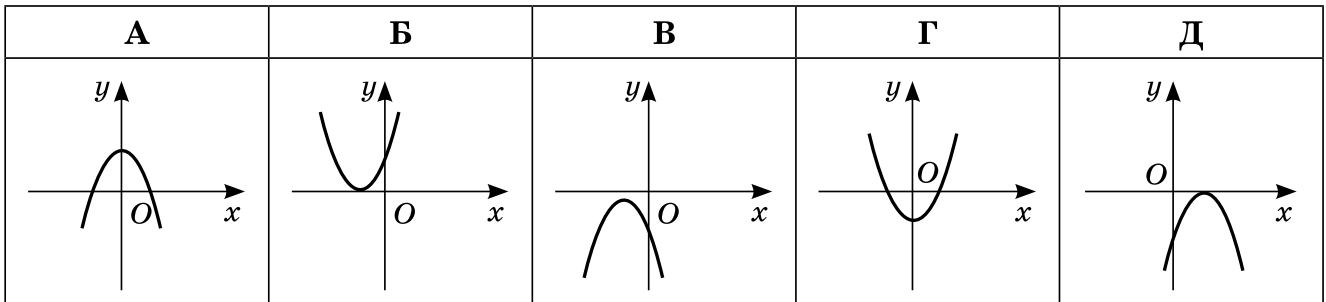
30. Укажіть рисунок, на якому може бути зображено графік функції $y = x^2 + 4x$.

А	Б	В	Г	Д
<p>A coordinate system with a vertical y-axis and a horizontal x-axis. The origin is labeled O. A parabola opens upwards with its vertex at $(0, 4)$.</p>	<p>A coordinate system with a vertical y-axis and a horizontal x-axis. The origin is labeled O. A parabola opens upwards with its vertex at $(-2, -4)$.</p>	<p>A coordinate system with a vertical y-axis and a horizontal x-axis. The origin is labeled O. A parabola opens downwards with its vertex at $(0, 4)$.</p>	<p>A coordinate system with a vertical y-axis and a horizontal x-axis. The origin is labeled O. A parabola opens upwards with its vertex at $(0, -4)$.</p>	<p>A coordinate system with a vertical y-axis and a horizontal x-axis. The origin is labeled O. A parabola opens downwards with its vertex at $(2, -4)$.</p>

31. Укажіть рисунок, на якому може бути зображено графік функції $y = x^2 + bx + c$, якщо $b^2 - 4c < 0$.



32. Укажіть рисунок, на якому може бути зображено графік функції $y = -x^2 + bx + c$, якщо $b^2 + 4c = 0$.



33. На рис. 19 зображено ескіз графіка функції $y = 2x^2 + bx + c$. Укажіть правильне твердження стосовно параметрів b і c .

А	Б	В	Г	Д
$\begin{cases} b > 0, \\ c > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} b < 0, \\ c > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} b > 0, \\ c < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} b < 0, \\ c < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} b < 0, \\ c = 0 \end{cases}$

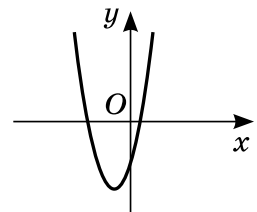


Рис. 19

34. На рис. 20 зображено ескіз графіка функції $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$. Укажіть правильне твердження стосовно параметрів b і c .

А	Б	В	Г	Д
$\begin{cases} b > 0, \\ c > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} b < 0, \\ c > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} b > 0, \\ c < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} b < 0, \\ c < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} b < 0, \\ c = 0 \end{cases}$

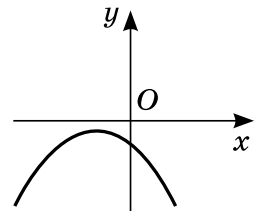


Рис. 20

35. Укажіть проміжок, на якому функція $y = 3x^2 - 6x + 12$ спадає.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; +\infty)$	$[9; +\infty)$	$(-\infty; 1]$	$[1; +\infty)$	$(-\infty; 9]$

36. Укажіть проміжок, що є множиною значень функції $y = -x^2 + 8x - 16$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; +\infty)$	$[0; +\infty)$	$(-\infty; 4]$	$[4; +\infty)$	$(-\infty; 0]$

37. Укажіть функцію, фрагмент ескіза графіка якої зображено на рис. 21.

А	Б	В	Г	Д
$y = \sqrt[3]{x^2}$	$y = \sqrt[3]{x}$	$y = \sqrt{x}$	$y = \sqrt{x^3}$	$y = \sqrt{x^2}$

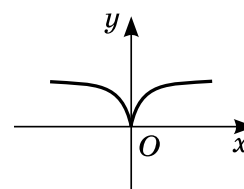


Рис. 21

38. Укажіть функцію, ескіз графіка якої може бути зображено на рис. 22.

А	Б	В	Г	Д
$y = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$y = \sqrt[3]{x}$	$y = \frac{1}{x^2}$	$y = \sqrt{x}$	$y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

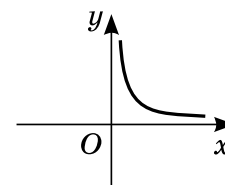


Рис. 22

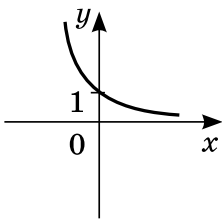
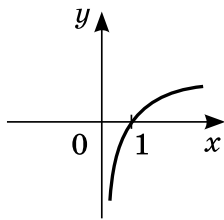
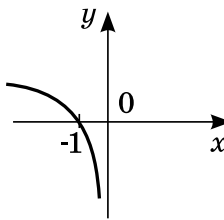
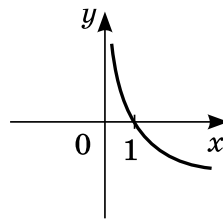
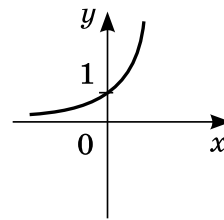
39. Укажіть парну функцію.

А	Б	В	Г	Д
$y = \sqrt{x}$	$y = \sqrt[3]{x}$	$y = (\sqrt{x})^2$	$y = \sqrt[3]{x^3}$	$y = \sqrt{x^2}$

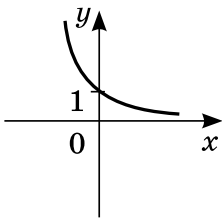
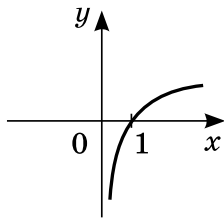
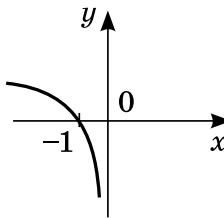
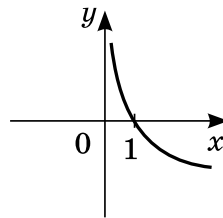
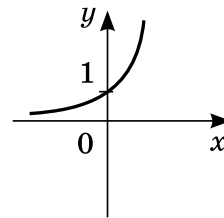
40. Укажіть непарну функцію.

А	Б	В	Г	Д
$y = \sqrt[3]{x^2}$	$y = \sqrt{x^3}$	$y = \frac{1}{x}$	$y = -\frac{1}{x^2}$	$y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

41. Укажіть ескіз графіка функції $y = (\sin 1)^x$.

А	Б	В	Г	Д
				

42. Укажіть ескіз графіка функції $y = \log_{\pi} x$.

А	Б	В	Г	Д
				

43. Укажіть функцію, графік якої може проходити через точку, позначену на рис. 23.

А	Б	В	Г	Д
$y = \log_{\frac{1}{2}} x$	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	$y = 2x$	$y = 2^x$	$y = \log_2 x$

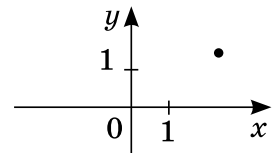


Рис. 23

44. Укажіть функцію, графік якої може проходити через точку, позначену на рис. 24.

А	Б	В	Г	Д
$y = \log_{\frac{1}{3}} x$	$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	$y = -3x$	$y = 3^x$	$y = \log_3 x$

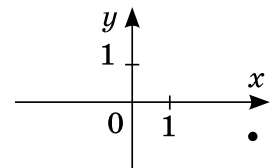


Рис. 24

45. Укажіть функцію, фрагмент графіка якої може бути зображено на рис. 25.

А	Б	В	Г	Д
$y = \sin x$	$y = \operatorname{tg} x$	$y = 0$	$y = \operatorname{ctg} x$	$y = \cos x$

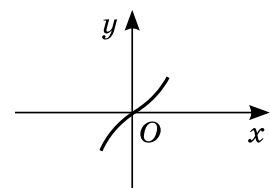


Рис. 25

46. Укажіть функцію, фрагмент графіка якої може бути зображено на рис. 26.

А	Б	В	Г	Д
$y = \arccos x$	$y = \operatorname{arctg} x$	$y = \frac{\pi}{2}$	$y = \operatorname{arctg} x$	$y = \arcsin x$

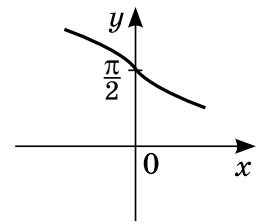


Рис. 26

47. Укажіть функцію $y = f(x)$, яка задовольняє ОБИДВІ умови:

- 1) $f(0) = 0$;
- 2) множина значень функції $E(f) = (-\infty; +\infty)$.

А	Б	В	Г	Д
$y = \sin x$	$y = \operatorname{ctg} x$	$y = \arcsin x$	$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{arctg} x$

48. Укажіть функцію $y = f(x)$, яка задовольняє ОБИДВІ умови:

- 1) область визначення функції $D(f) = (-\infty; +\infty)$;
- 2) функція $f(x)$ є спадною на $D(f)$.

А	Б	В	Г	Д
$y = \operatorname{ctg} x$	$y = \cos x$	$y = \operatorname{arctg} x$	$y = \arccos x$	$y = \sin x$

49. Укажіть функцію, графік якої може проходити через дві точки, позначені на рис. 27.

А	Б	В	Г	Д
$y = 3^x$	$y = \cos x$	$y = x^4$	$y = \frac{1}{x^2}$	$y = \log_{\frac{1}{2}} x$

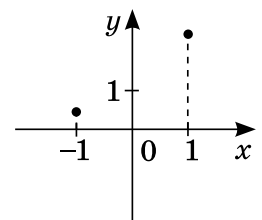


Рис. 27

50. Укажіть функцію, графік якої може проходити через дві точки, позначені на рис. 28.

А	Б	В	Г	Д
$y = x^6$	$y = \sqrt[4]{x}$	$y = \sin x$	$y = \frac{1}{x^3}$	$y = -2x$

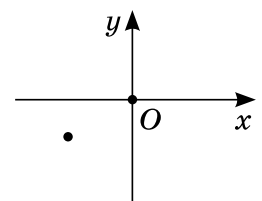


Рис. 28

У завданнях 51–54 сформульовано проблему (питання), яку потрібно розв'язати (отримати однозначну відповідь на питання), використовуючи для цього додаткові дані — твердження (1) і (2). Визначте, чи достатньо цих даних для розв'язання проблеми, і оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь*.

51. Для функції $f(x) = a^x$ знайдіть, якому проміжку належить a : $(0; 1)$ чи $(1; +\infty)$.

(1) Область визначення функції $f(x)$: $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

(2) Функція $f(x)$ є зростаючою на $D(f)$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

52. Для функції $g(x) = \log_a x$ знайдіть, якому проміжку належить a : $(0; 1)$ чи $(1; +\infty)$.

(1) Область визначення функції $g(x)$: $D(g) = (0; +\infty)$.

(2) Множина значень функції $g(x)$: $E(g) = (-\infty; +\infty)$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

53. Для функції $f(x) = kx + 3$ визначте знак параметра k .

(1) Функція $f(x)$ є спадною на проміжку $(-\infty; +\infty)$.

(2) Графік функції $f(x)$ проходить через точку $(2; -1)$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

* Саму проблему розв'язувати не обов'язково.

54. Для функції $g(x) = -x^2 + bx + c$ знайдіть параметри b і c .

(1) Функція $g(x)$ зростає на проміжку $(-\infty; 2)$ і спадає на проміжку $(2; +\infty)$.

(2) Множина значень функції $g(x)$: $E(g) = (-\infty; 1]$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

У завданнях 55–56 порівняйте величини X і Y та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

55. Задано дві функції: $f(x) = x^2 - 2x + 4$ і $g(x) = \log_4 x$.

Величина X : кількість точок перетину графіка функції $f(x)$ з віссю абсцис.

Величина Y : кількість точок перетину графіка функції $g(x)$ з віссю абсцис.

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

56. Задано дві функції: $\varphi(x) = x^2 - 2x - 4$ і $\psi(x) = \sin x$.

Величина X : кількість точок перетину графіка функції $\varphi(x)$ з віссю ординат.

Величина Y : кількість точок перетину графіка функції $\psi(x)$ з віссю ординат.

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

Завдання на встановлення відповідності

У завданнях 57–60 до кожного рядка або рисунка, позначеного цифрою, доберіть один відповідник, позначений літерою.

57. Установіть відповідність між властивостями (1–4) функцій і функціями, що мають ці властивості (А–Д).

- | | | | |
|---|--|---|----------------------------------|
| 1 | Графік функції проходить через точку $(5; 10)$ | А | $y = 5$ |
| 2 | Функція є непарною | Б | $y = 5x$ |
| 3 | Функція є спадною на проміжку $(-\infty; +\infty)$ | В | $y = 5^x$ |
| 4 | Функція є періодичною | Г | $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ |
| | | Д | $y = 5 + x$ |

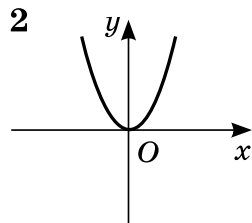
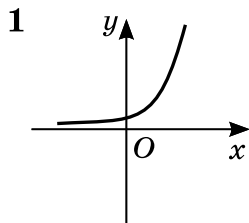
58. Установіть відповідність між функціями (1–4) і властивостями, які мають ці функції (А–Д).

- | | | | |
|---|-----------------|---|---|
| 1 | $y = \sin x$ | А | Функція є зростаючою на всій своїй області визначення |
| 2 | $y = \cos x$ | Б | Функція є парною |
| 3 | $y = \arcsin x$ | В | Функція є ні парною, ні непарною |
| 4 | $y = \arccos x$ | Г | Графік функції проходить через точку $(0; \pi)$ |
| | | Д | Графік функції проходить через точку $(\pi; 0)$ |

59. Установіть відповідність між функціями (1–4) і ескізами графіків цих функцій (А–Д).

- | | | | | | | | |
|---|--------------------|---|--|---|--|---|--|
| 1 | $y = \frac{1}{x}$ | А | | Б | | В | |
| 2 | $y = \frac{-1}{x}$ | Г | | Д | | | |
| 3 | $y = \sqrt[3]{x}$ | | | | | | |
| 4 | $y = \sqrt{x}$ | | | | | | |

60. Установіть відповідність між ескізами графіків функцій (1–4) і цими функціями (А–Д).



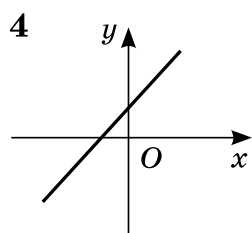
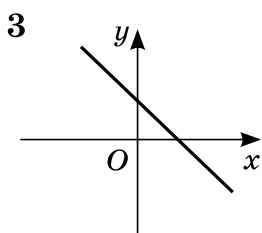
А $y = 2 + x$

Б $y = 2x$

В $y = 2^x$

Г $y = x^2$

Д $y = 2 - x$



Завдання на встановлення послідовності

У завданнях 61–62 виберіть тільки необхідні для розв'язання поставленої задачі дії і розмістіть їх у правильній послідовності. У відповідь запишіть отриману послідовність літер.

61. Як побудувати ескіз графіка функції $y = x^2 + bx + c$?

А Знайти $x_0 = -\frac{b}{2}$.

Б Знайти $y_0 = x_0^2 + bx_0 + c$.

В Побудувати пряму $x = x_0$.

Г Побудувати пряму $y = y_0$.

Д Побудувати точку $M_0(x_0; y_0)$.

Е Побудувати гіперболу, асимптотами якої є прямі $x = x_0$ і $y = y_0$, причому на проміжках $(-\infty; x_0)$ та $(x_0; +\infty)$ ця гіпербола є спадною.

Є Побудувати гіперболу, асимптотами якої є прямі $x = x_0$ і $y = y_0$, причому на проміжках $(-\infty; x_0)$ та $(x_0; +\infty)$ ця гіпербола є зростаючою.

Ж Побудувати параболу з вершиною в точці M_0 , вітки якої напрямлені вгору.

З Побудувати параболу з вершиною в точці M_0 , вітки якої напрямлені вниз.

62. Як побудувати ескіз графіка функції $y = kx + b$, де $k \neq 0$?
- А Знайти $x_0 = -\frac{b}{k}$.
- Б Знайти $y_0 = kx_0 + b$.
- В Знайти $y_0 = b$.
- Г Побудувати точку $M_0(x_0; y_0)$.
- Д Побудувати точки $M_1(x_0; 0)$ і $M_2(0; y_0)$.
- Е Побудувати параболу з вершиною в точці M_0 , вітки якої напрямлені вгору.
- Є Побудувати параболу з вершиною в точці M_0 , вітки якої напрямлені вниз.
- Ж Побудувати пряму, що проходить через точку M_0 і початок координат.
- З Побудувати пряму, що проходить через точки M_1 і M_2 .

Завдання з короткою відповіддю

Розв'яжіть завдання 63–92 і запишіть відповідь **ОДНИМ ЧИСЛОМ**.

63. Графік лінійної функції $y = kx + b$ проходить через точки $A(2; 0)$ і $B(0; 7)$. Знайдіть k .
64. Графік лінійної функції $y = 5x + b$ перетинає вісь ординат у точці $C(0; -4)$, а вісь абсцис — у точці $D(m; 0)$. Знайдіть m .
65. Знайдіть абсцису точки перетину графіків функцій $y = 8 - 3x$ і $y = 2x - 33$.
66. Знайдіть ординату точки перетину графіків функцій $y = 5x - 4$ і $y = x + 20$.
67. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ проходить через точки $A(-1; 0)$, $B(0; 2)$ і $C(3; 0)$. Знайдіть ординату вершини цієї параболи.
68. На рис. 29 зображено фрагменти параболи $y = ax^2 + bx + c$. Знайдіть ординату її вершини.

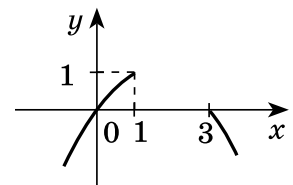


Рис. 29

69. На рис. 30 позначено дві точки, які належать графіку функції $y = x^2 + bx + c$. Знайдіть значення цієї функції при $x = 1$.

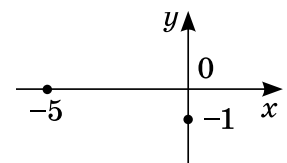


Рис. 30

70. Точка $S(-1; p)$ належить параболі $y = ax^2 + bx + c$, яка проходить через початок координат і має вершину в точці $M(1; -2)$. Знайдіть p .
71. При якому найменшому цілому значенні параметра a графіки функцій $y = 2x^2 + 8x + 1$ і $y = a$ перетинаються у двох точках?
72. При якому значенні параметра b графіки функцій $y = -x^2 + 3x + 2$ і $y = -b$ перетинаються тільки в одній точці?
73. На рис. 31 зображено ескіз графіка функції $y = x^a$. Знайдіть a .

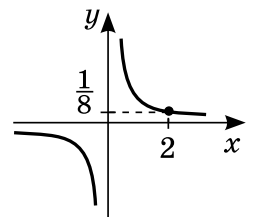


Рис. 31

74. На рис. 32 зображено ескіз графіка функції $y = \sqrt[m]{x}$. Знайдіть m .

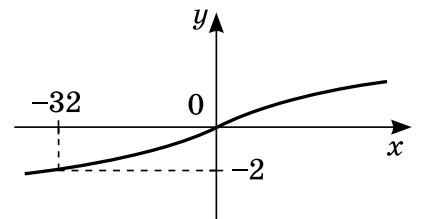


Рис. 32

75. Знайдіть **НАЙМЕНШЕ** значення параметра a , при якому графік функції $g(x) = 5^x$, де $x \in [-1; 2]$, перетинає графік функції $y = a$.
76. Знайдіть **НАЙБІЛЬШЕ** значення параметра b , при якому графік функції $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, де $x \in [-5; 2]$, перетинає графік функції $y = b$.
77. На рис. 33 зображено ескіз графіка функції $y = a^x$. Знайдіть a .

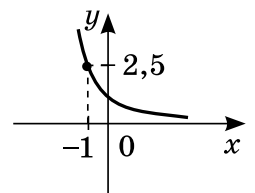


Рис. 33

78. На рис. 34 зображено ескіз графіка функції $y = \log_b x$.
Знайдіть b .

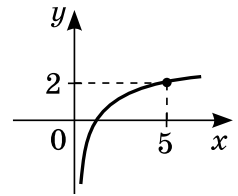


Рис. 34

79. Функція $y = f(x)$ є однією з таких: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ і спадає на проміжках $(0; \pi)$ і $(\pi; 2\pi)$. Знайдіть значення $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$.
80. Функція $y = f(x)$ є однією з таких: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ і зростає на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, а її область визначення $D(f) = (-\infty; +\infty)$. Знайдіть значення $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
81. Функція $g(x)$ є оберненою до функції $f(x) = \operatorname{ctg} x$ на проміжку $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$. Укажіть НОМЕР координатної чверті, в якій міститься графік функції $g(x)$.
82. Функція $g(x)$ є оберненою до функції $f(x) = \operatorname{tg} x$ на проміжку $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Укажіть НОМЕР координатної чверті, в якій міститься графік функції $g(x)$.
83. Знайдіть найбільше значення функції $y = 3^{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$.
84. Знайдіть найменше значення функції $y = 4^{3+\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}$.
85. Знайдіть найбільше значення функції $y = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 4x + 85)$.
86. Знайдіть найменше значення функції $y = 2^{x^2+2x+4}$.

87. Знайдіть найбільше значення функції $y = f(g(x))$, якщо $f(x) = x^2 - 6x + 9$, $g(x) = \arccos x$.
88. Знайдіть найменше значення функції $y = \varphi(\psi(x))$, якщо $\varphi(x) = -x^2 + 4x - 4$, $\psi(x) = \sin x$.
89. Графіки функцій $y = 3^x$ і $y = 3 - x$ перетинаються в точці M . Укажіть НОМЕР координатної чверті, в якій лежить ця точка.
90. Графіки функцій $y = \arctg x$ і $y = x + 1$ перетинаються в точці P . Укажіть НОМЕР координатної чверті, в якій лежить ця точка.
91. Задано три функції: $f(x) = \operatorname{tg} x$, $g(x) = x^3$ і $h(x) = \sqrt{3} \cdot x$. Нехай $a = f(1)$, $b = g(1)$, $c = h(1)$. Укажіть НОМЕР правильного, на вашу думку, співвідношення між значеннями a , b і c .
- | | | |
|------------------|------------------|------------------|
| 1) $a < b < c$; | 3) $b < a < c$; | 5) $c < a < b$; |
| 2) $a < c < b$; | 4) $b < c < a$; | 6) $c < b < a$. |
92. Задано три функції: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $g(x) = \arcsin x$ і $h(x) = \log_3 x$. Нехай $a = f(1)$, $b = g(1)$, $c = h(1)$. Укажіть НОМЕР правильного, на вашу думку, співвідношення між значеннями a , b і c .
- | | | |
|------------------|------------------|------------------|
| 1) $a < b < c$; | 3) $b < a < c$; | 5) $c < a < b$; |
| 2) $a < c < b$; | 4) $b < c < a$; | 6) $c < b < a$. |

Завдання з повним розв'язанням

Завдання 93–100 розв'яжіть із повним обґрунтуванням, посилаючись на відповідні означення, твердження, формули. У разі потреби проілюструйте розв'язання таблицями, діаграмами, графіками тощо.

93. Доведіть, що кут γ між графіками лінійних функцій $y = k_1 x + b_1$ і $y = k_2 x + b_2$ можна обчислити за формулою $\operatorname{tg} \gamma = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|$. Користуючись цією формулою, знайдіть кут між графіками лінійних функцій $f(x)$ і $g(x)$, якщо графік функції $f(x)$ утворює з додатним напрямком осі абсцис кут $\alpha = \arctg 3$, а графік функції $g(x)$ — кут $\beta = -\arctg 2$.

94. Дано функцію $y = 3x + 6$. Знайдіть:

- а) кут α , який утворює графік цієї функції з додатним напрямком осі абсцис;
- б) функцію, що задає пряму, яка містить бісектрису кута α ;
- в) функцію, що задає пряму, яка містить бісектрису кута, суміжного з кутом α .

95. Задано функцію $y = 10^{\lg(5-x)}$. Знайдіть область визначення $D(y)$ і множину значень $E(y)$ та побудуйте графік цієї функції.

96. Задано функцію $y = \log_{x-1}(x^2 - 2x + 1)$. Знайдіть область визначення $D(y)$ і множину значень $E(y)$ та побудуйте графік цієї функції.

97. Задано функцію $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} \cdot 2^x, & \text{якщо } x \in (-\infty; 1), \\ x^2 - 6x + 8, & \text{якщо } x \in [1; +\infty). \end{cases}$ Побудуйте ескіз графіка

цієї функції. За побудованим ескізом знайдіть множину значень $E(f)$, укажіть проміжки зростання та спадання функції $f(x)$.

98. Задано функцію $g(x) = \begin{cases} 3 - 2x - x^2, & \text{якщо } x \in (-\infty; 0], \\ \frac{3}{3^x}, & \text{якщо } x \in (0; +\infty). \end{cases}$ Побудуйте ескіз графіка

цієї функції. За побудованим ескізом знайдіть множину значень $E(g)$, укажіть проміжки зростання та спадання функції $g(x)$.

99. Побудуйте ескіз графіка функції:

$$\text{а) } f(x) = \sqrt{4 \sin x - 4}; \quad \text{б) } g(x) = 4^{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}.$$

За побудованим ескізом знайдіть область визначення та множину значень вказаної функції.

100. Побудуйте ескіз графіка функції;

$$\text{а) } h(x) = \frac{1}{2}(\sin x + |\sin x|); \quad \text{б) } \varphi(x) = \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x - |\operatorname{arctg} x|).$$

За побудованим ескізом знайдіть множину значень вказаної функції; укажіть проміжки її зростання та спадання.

2.3. Побудова графіків функцій та рівнянь за допомогою геометричних перетворень

Найпростіші завдання з повним розв'язанням

Укажіть геометричні перетворення графіка функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $(-\infty; +\infty)$, які слід виконати, щоб отримати графіки функцій $y = g(x)$, наведених у завданнях 1–12. Укажіть координати точки M' , у яку переходить точка $M(6; -2)$, що належить графіку функції $y = f(x)$, внаслідок цих перетворень. Завдання розв'яжіть УСНО.

1. $g(x) = f(x) + 2$.

2. $g(x) = f(x) - 3$.

3. $g(x) = f(x - 4)$.

4. $g(x) = f(x + 5)$.

5. $g(x) = -f(x)$.

6. $g(x) = f(-x)$.

7. $g(x) = 2f(x)$.

8. $g(x) = \frac{1}{2}f(x)$.

9. $g(x) = f(3x)$.

10. $g(x) = f\left(\frac{1}{3}x\right)$.

11. $g(x) = |f(x)|$.

12. $g(x) = f(|x|)$.

Укажіть центри і радіуси кіл, заданих рівняннями, які наведені у завданнях 13–20. Які з цих кіл проходять через початок координат? Завдання розв'яжіть УСНО.

13. $x^2 + y^2 = 16$.

14. $x^2 + y^2 = 7$.

15. $(x - 1)^2 + y^2 = 25$.

16. $(x + 2)^2 + y^2 = 5$.

17. $x^2 + (y - 3)^2 = 9$.

18. $x^2 + (y + 2,5)^2 = 11$.

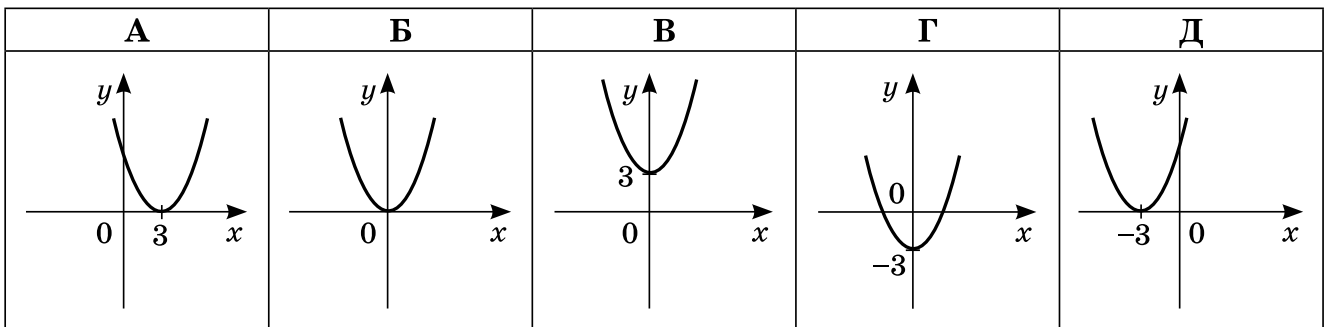
19. $(x - 8)^2 + (y + 6)^2 = 100$.

20. $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 36$.

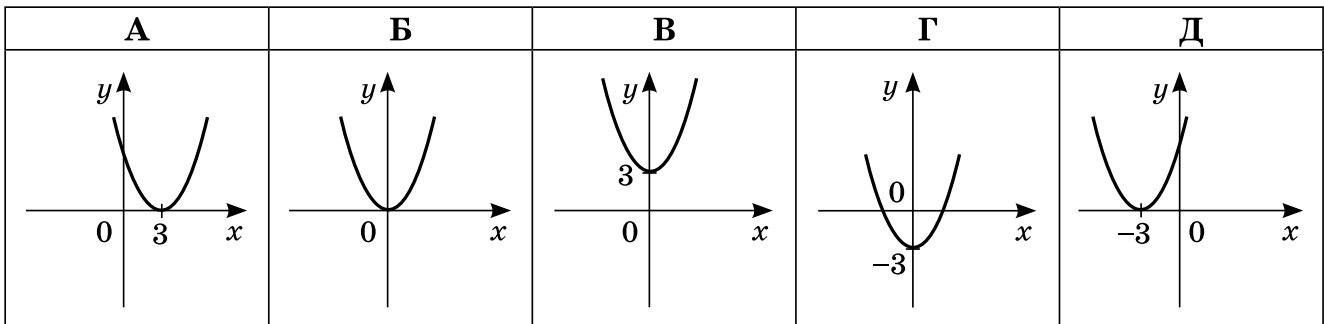
Завдання з вибором однієї правильної відповіді

Проаналізуйте умови та вимоги завдань 21–50 та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

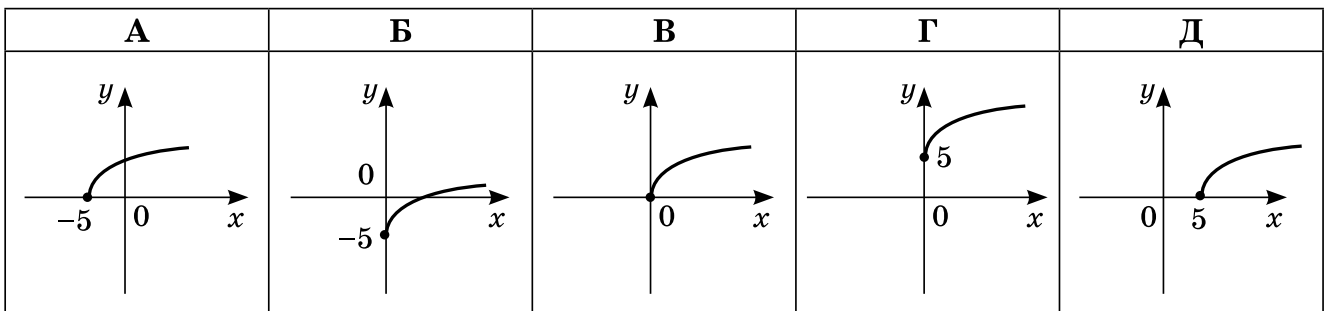
21. Укажіть рисунок, на якому може бути зображений фрагмент графіка функції $y = (x + 3)^2$.



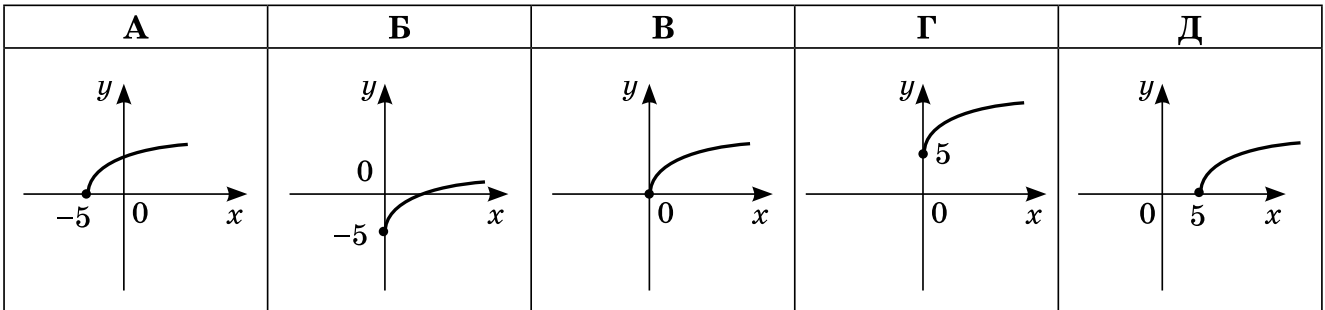
22. Укажіть рисунок, на якому може бути зображений фрагмент графіка функції $y = (x - 3)^2$.



23. Укажіть рисунок, на якому може бути зображений фрагмент графіка функції $y = \sqrt{x} - 5$.



24. Укажіть рисунок, на якому може бути зображений фрагмент графіка функції $y = 5 + \sqrt{x}$.



25. Графік функції $y = \log_5 x$ симетрично відобразили відносно осі абсцис, а потім перенесли на 2 одиниці вгору паралельно осі ординат. Укажіть функцію, графік якої отримали.

А	Б	В	Г	Д
$y = 2 + \log_5(-x)$	$y = -\log_5(x - 2)$	$y = -2 + \log_5(-x)$	$y = -\log_5(x + 2)$	$y = 2 - \log_5 x$

26. Графік функції $y = 3^x$ симетрично відобразили відносно осі ординат, а потім перенесли на 4 одиниці вниз паралельно осі ординат. Укажіть функцію, графік якої отримали.

А	Б	В	Г	Д
$y = 3^{-x} - 4$	$y = -3^{-x} + 4$	$y = -3^x + 4$	$y = 3^{-x} + 4$	$y = -3^x - 4$

27. Графік функції $y = \sin x$ утричі розтягнули вздовж осі ординат. Укажіть функцію, графік якої отримали.

А	Б	В	Г	Д
$y = \sin 3x$	$y = 3 \sin x$	$y = \sin \frac{1}{3} x$	$y = \frac{1}{3} \sin x$	$y = 3 + \sin x$

28. Графік функції $y = \cos x$ удвічі стиснули вздовж осі абсцис. Укажіть функцію, графік якої отримали.

А	Б	В	Г	Д
$y = \cos \frac{1}{2} x$	$y = \frac{1}{2} \cos x$	$y = \cos 2x$	$y = 2 \cos x$	$y = \cos(x - 2)$

2.3. Побудова графіків функцій та рівнянь за допомогою геометричних перетворень

29. На рис. 35 зображено ескіз графіка функції $y = \arccos x$. Укажіть ескіз графіка функції $y = \arccos|x|$.

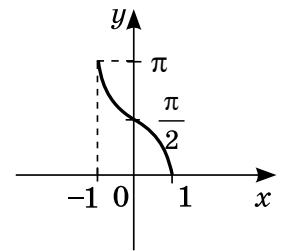


Рис. 35

А	Б	В	Г	Д

30. На рис. 36 зображено ескіз графіка функції $y = \arcsin(x - 1)$. Укажіть ескіз графіка функції $y = |\arcsin(x - 1)|$.

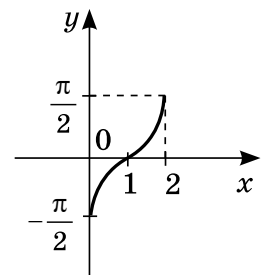


Рис. 36

А	Б	В	Г	Д

31. На рис. 37 зображено ескіз графіка функції $y = 2^x$ і точку M . Графік якої з наведених функцій може проходити через точку M ?

А	Б	В	Г	Д
$y = 2^x + 10$	$y = 2^{x+10}$	$y = 2^{-x}$	$y = 10 \cdot 2^x$	$y = -2^x$

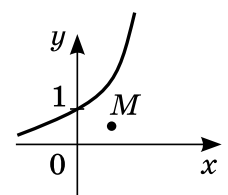


Рис. 37

32. На рис. 38 зображено ескіз графіка функції $y = \log_2 x$ і точку K . Графік якої з наведених функцій може проходити через точку K ?

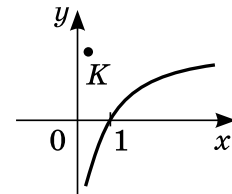


Рис. 38

А	Б	В
$y = \log_2(-x)$	$y = 10 \cdot \log_2 x$	$y = \log_2(x - 10)$
Г		Д
$y = \frac{1}{10} \cdot \log_2 x$		$y = -\log_2 x$

33. На рис. 39 зображено ескіз графіка функції $y = \operatorname{arctg} x$ і точку P . Графік якої з наведених функцій може проходити через точку P ?

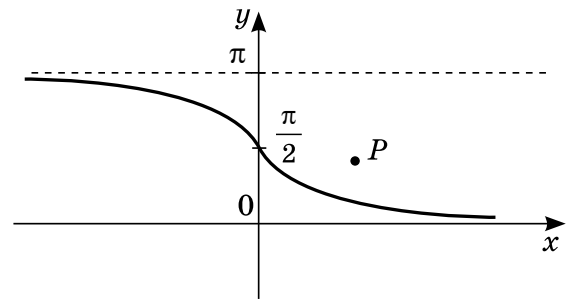


Рис. 39

А	Б	В
$y = -\operatorname{arctg} x$	$y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x$	$y = \operatorname{arctg}(x + 2)$
Г		Д
$y = 2 \operatorname{arctg} x$		$y = -2 + \operatorname{arctg} x$

34. На рис. 40 зображено ескіз графіка функції $y = \operatorname{arctg} x$ і точку S . Графік якої з наведених функцій може проходити через точку S ?

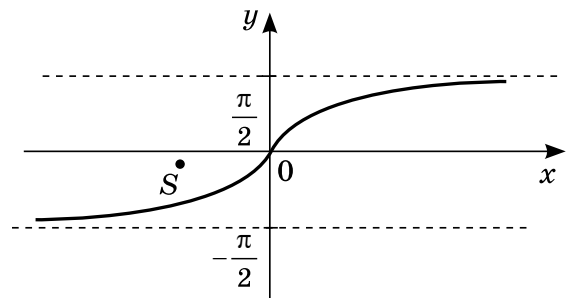


Рис. 40

А	Б	В
$y = 4 + \operatorname{arctg} x$	$y = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x$	$y = \operatorname{arctg}(x - 4)$
Г		Д
$y = 4 \operatorname{arctg} x$		$y = -4 + \operatorname{arctg} x$

35. Укажіть функцію, ескіз графіка якої може бути зображено на рис. 41.

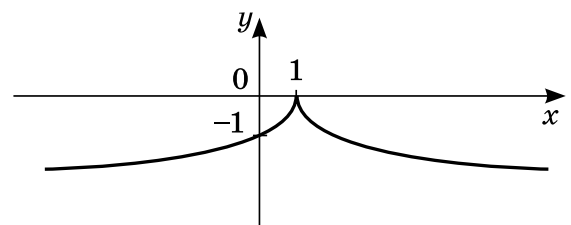


Рис. 41

А	Б	В
$y = -\sqrt{ x - 1 }$	$y = \sqrt{1 - x }$	$y = -\sqrt{x - 1}$
Г		Д
$y = \sqrt{ x + 1 }$		$y = -\sqrt{x + 1}$

2.3. Побудова графіків функцій та рівнянь за допомогою геометричних перетворень

36. Укажіть функцію, ескіз графіка якої може бути зображено на рис. 42.

А	Б	В
$y = 2 + \frac{1}{ x }$	$y = \frac{1}{ x } - 2$	$y = 2 + \frac{1}{x}$
Г	Д	
$y = 2 - \frac{1}{ x }$	$y = 2 - \frac{1}{x}$	

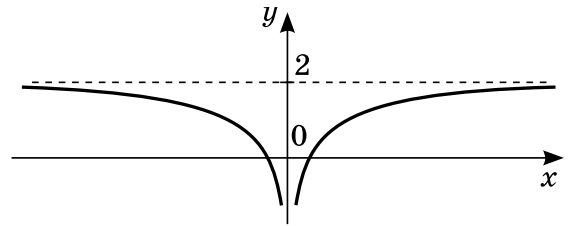


Рис. 42

37. Укажіть функцію, ескіз графіка якої може бути зображено на рис. 43.

А	Б	В
$y = \lg(1 - x)$	$y = \lg(x - 1)$	$y = \lg(1 + x)$
Г	Д	
$y = \lg x - 1 $	$y = \lg x + 1 $	

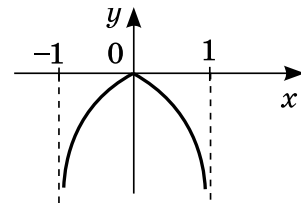


Рис. 43

38. Укажіть функцію, ескіз графіка якої може бути зображено на рис. 44.

А	Б	В
$y = 1 - 10^x $	$y = 1 + 10^x $	$y = 1 - 0,1^x $
Г	Д	
$y = 1 + 0,1^x $	$y = 10^x + 0,1^x$	

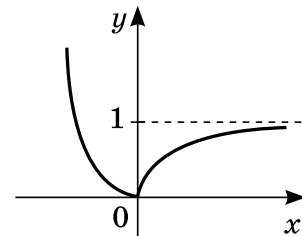


Рис. 44

39. Укажіть рівняння, графік якого проходить через ОБИДВІ точки, позначені на рис. 45.

А	Б	В
$x + 1 = 0$	$x(x + 1) = 0$	$x = 0$
Г	Д	
$x(x - 1) = 0$	$x - 1 = 0$	

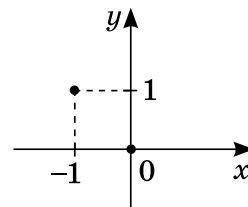


Рис. 45

40. Укажіть рівняння, графік якого проходить через ОБИДВІ точки, позначені на рис. 46.

А	Б	В	Г	Д
$y+1=0$	$x+y=0$	$y=0$	$y-x=0$	$y-1=0$

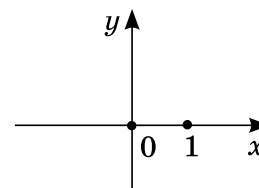


Рис. 46

41. Укажіть графік рівняння $x+|y|=0$.

А	Б	В	Г	Д

42. Укажіть графік рівняння $|x|-|y|=0$.

А	Б	В	Г	Д

43. Яким координатним чвертям належать точки, координати яких задовольняють рівняння $xy-x+2y=2$?

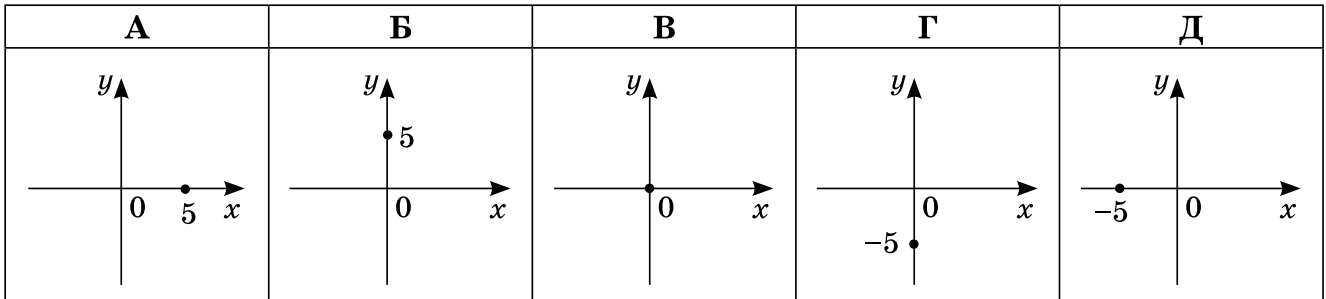
А	Б	В	Г	Д
Усім, крім I	Усім, крім II	Усім, крім III	Усім, крім IV	Усім чвертям

44. Яким координатним чвертям належать точки, координати яких задовольняють рівняння $4x+2xy-y=2$?

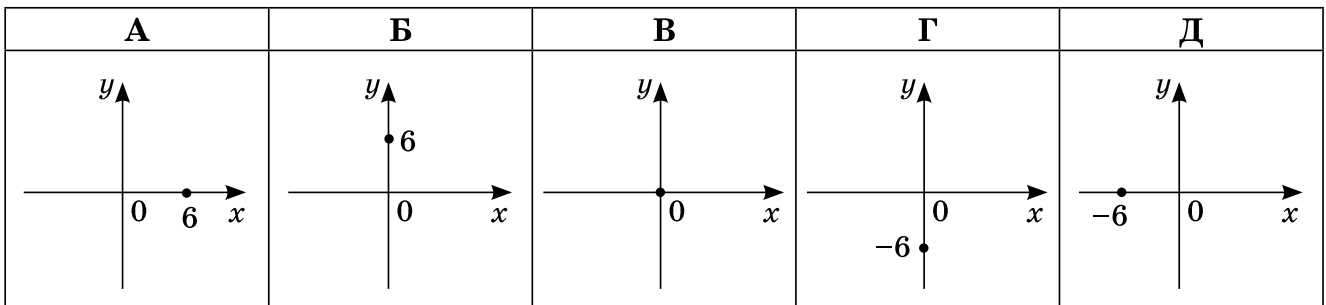
А	Б	В	Г	Д
Усім, крім I	Усім, крім II	Усім, крім III	Усім, крім IV	Усім чвертям

2.3. Побудова графіків функцій та рівнянь за допомогою геометричних перетворень

45. Укажіть рисунок, на якому позначено центр кола, заданого рівнянням $(x+5)^2 + y^2 = 25$.



46. Укажіть рисунок, на якому позначено центр кола, заданого рівнянням $x^2 + (y-6)^2 = 36$.



47. Укажіть рівняння, яке може задавати коло, зображене на рис. 47.

А	Б	В
$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$	$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$	$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 1$
Г		Д
$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 1$		$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$

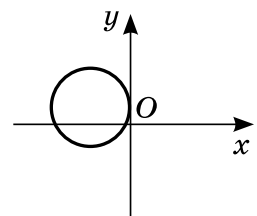


Рис. 47

48. Укажіть рівняння, яке може задавати коло, зображене на рис. 48.

А	Б	В
$(x+2)^2 + (y+2)^2 = 4$	$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$	$(x+2)^2 + (y+2)^2 = 16$
Г		Д
$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 16$		$(x+2)^2 + (y+2)^2 = 1$

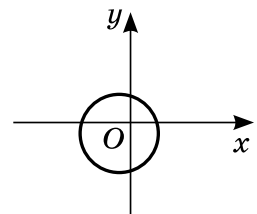


Рис. 48

49. Визначте координати центра кола, заданого рівнянням $x^2 + 2y + y^2 = 1$.

А	Б	В	Г	Д
(0; 0)	(-1; 0)	(0; -1)	(1; 0)	(0; 1)

50. Визначте радіус кола, заданого рівнянням $x^2 + y^2 = 2x$.

А	Б	В	Г	Д
1	2	$\frac{1}{2}$	$2x$	$\sqrt{2x}$

У завданнях 51–54 сформульовано проблему (питання), яку потрібно розв'язати (отримати однозначну відповідь на питання), використовуючи для цього додаткові дані — твердження (1) і (2). Визначте, чи достатньо цих даних для розв'язання проблеми, і оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь*.

51. Відомо, що $h(x) = f(x + 5)$. Знайдіть значення $h(0)$.

(1) Графік функції $y = f(x)$ проходить через точки $(-2; 0)$ і $(5; 0)$.

(2) Графік функції $y = f(x)$ проходить через точку $(0; 5)$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

52. Відомо, що $g(x) = 3f(x)$. Знайдіть значення $g(0)$.

(1) Графік функції $y = f(x)$ проходить через точки $(-2; 0)$ і $(5; 0)$.

(2) Графік функції $y = f(x)$ проходить через точку $(0; 5)$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

* Саму проблему розв'язувати не обов'язково.

2.3. Побудова графіків функцій та рівнянь за допомогою геометричних перетворень

53. Радіус кола $R = 4$. Запишіть рівняння цього кола.

(1) Точка $(0; 4)$ належить цьому колу.

(2) Початок координат є центром цього кола.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

54. Центр кола знаходиться в точці $M_0(0; -7)$. Запишіть рівняння цього кола.

(1) Дане коло дотикається до осі абсцис.

(2) Дане коло проходить через початок координат.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

У завданнях 55–56 порівняйте величини X і Y та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

55. Відомо, що графік функції $y = f(x)$ проходить через точку $L(-1; 5)$, а $g(x) = f(|x|)$.

Величина X : значення $f(-1)$.

Величина Y : значення $g(-1)$.

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

56. Відомо, що графік функції $y = f(x)$ проходить через точку $L(-3; 2)$, а $g(x) = |f(x)|$.

Величина X : значення $f(-3)$.

Величина Y : значення $g(-3)$.

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

Завдання на встановлення відповідності

У завданнях 57–60 до кожного рядка, позначеного цифрою, доберіть один відповідник, позначений літерою.

57. Установіть відповідність між функціями (1–4) і проміжками (А–Д), які є множинами значень цих функцій, якщо множина значень функції $y = f(x)$ $E(f) = [4; 10]$.

1	$y = 2f(x)$	А	$[2; 5]$
2	$y = f(2x)$	Б	$[6; 12]$
3	$y = \frac{1}{2}f(x)$	В	$[8; 20]$
4	$y = 2 + f(x)$	Г	$[2; 8]$
		Д	$[4; 10]$

58. Установіть відповідність між функціями (1–4) і проміжками (А–Д), які є областями визначення цих функцій, якщо область визначення функції $y = g(x)$ $D(g) = [-1; 3]$.

1	$y = g(x)$	А	$[-1; 3]$
2	$y = g(x) $	Б	$[-2; 2]$
3	$y = g(x+1)$	В	$[1; 3]$
4	$y = g(x-1)$	Г	$[0; 4]$
		Д	$[-3; 3]$

59. Установіть відповідність між функціями (1–4) і їх найменшими додатними періодами (А–Д).

1	$y = \sin 4x$	А	4π
2	$y = 4 + \cos x$	Б	2π
3	$y = \frac{1}{4} \operatorname{tg} x$	В	π
4	$y = \operatorname{ctg} \left(\frac{1}{4} x \right)$	Г	$\frac{\pi}{2}$
		Д	$\frac{\pi}{4}$

60. Установіть відповідність між функціями (1–4) і властивостями цих функцій (А–Д).

1 $y = \sin(2x) + \cos(\pi x)$

2 $y = 2\sin x \cos x$

3 $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{ctg} \frac{x}{3}$

4 $y = 2\sin^2 x + 2\cos^2 x$

А Функція є неперіодичною

Б Функція є періодичною з найменшим додатним періодом $T = 6\pi$

В Функція є періодичною з найменшим додатним періодом $T = 2\pi$

Г Функція є періодичною з найменшим додатним періодом $T = \pi$

Д Функція є періодичною, але найменшого додатного періода не існує

Завдання на встановлення послідовності

У завданнях 61–62 виберіть тільки необхідні для розв'язання поставленої задачі дії і розмістіть їх у правильній послідовності. У відповідь запишіть отриману послідовність літер.

61. Як побудувати графік функції $y = 3\sin(x + 3)$?

А Побудувати графік $y = \sin x$.

Б Виконати паралельне перенесення отриманого графіка на 3 одиниці праворуч.

В Виконати паралельне перенесення отриманого графіка на 3 одиниці ліворуч.

Г Виконати паралельне перенесення отриманого графіка на 3 одиниці вгору.

Д Виконати паралельне перенесення отриманого графіка на 3 одиниці вниз.

Е Виконати стиск отриманого графіка у 3 рази вздовж осі абсцис.

Є Виконати стиск отриманого графіка у 3 рази вздовж осі ординат.

Ж Виконати розтяг отриманого графіка у 3 рази вздовж осі абсцис.

З Виконати розтяг отриманого графіка у 3 рази вздовж осі ординат.

62. Як побудувати графік функції $y = \sqrt{2x - 6}$?

А Побудувати графік функції $y = \sqrt{x}$.

Б Виконати стиск отриманого графіка у 2 рази вздовж осі абсцис.

В Виконати розтяг отриманого графіка у 2 рази вздовж осі абсцис.

Г Виконати стиск отриманого графіка у 2 рази вздовж осі ординат.

Д Виконати розтяг отриманого графіка у 2 рази вздовж осі ординат.

Е Виконати паралельне перенесення отриманого графіка на 6 одиниць праворуч.

Є Виконати паралельне перенесення отриманого графіка на 6 одиниць ліворуч.

Ж Виконати паралельне перенесення отриманого графіка на 3 одиниці праворуч.

З Виконати паралельне перенесення отриманого графіка на 3 одиниці ліворуч.

Завдання з короткою відповіддю

Розв'яжіть завдання 63–92 і запишіть відповідь **ОДНИМ ЧИСЛОМ**.

63. На рис. 49 зображено графіки функцій $y = f(x)$ (суцільна лінія) та $y = g(x)$ (пунктирна лінія), причому відомо, що $g(x) = f(x + a)$. Знайдіть a .

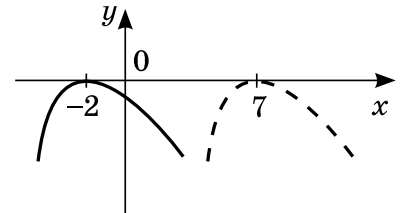


Рис. 49

64. На рис. 50 зображено графіки функцій $y = \varphi(x)$ (суцільна лінія) та $y = \psi(x)$ (пунктирна лінія), причому відомо, що $\psi(x) = \varphi(x) - A$. Знайдіть A .

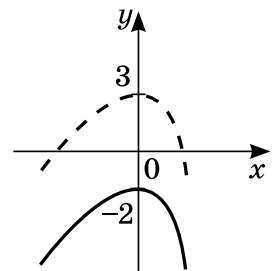


Рис. 50

65. Областю визначення функції $f(x)$ є проміжок $[-3; 5]$. Знайдіть **НАЙМЕНШЕ** значення аргументу функції $g(x) = f(x - 5)$, який належить її області визначення.
66. Областю визначення функції $\varphi(x)$ є проміжок $[-4; 8]$. Знайдіть **НАЙБІЛЬШЕ** значення аргументу функції $\psi(x) = \varphi\left(\frac{1}{4}x\right)$, який належить її області визначення.
67. Знайдіть значення параметра b , при якому графік функції $y = b + 2^x$ проходить через точку $(-1; 4)$.
68. Знайдіть значення параметра a , при якому графік функції $y = a \log_3 x$ проходить через точку $(9; 3)$.

2.3. Побудова графіків функцій та рівнянь за допомогою геометричних перетворень

69. Знайдіть значення параметра c ($c > 0$), при якому найменший додатний період функції $y = \sin(cx)$ дорівнює $7,5\pi$.
70. Знайдіть значення параметра p , при якому областю визначення функції $y = \arcsin(x + p)$ є проміжок $[-4,5; -2,5]$.
71. Множиною значень функції $f(x)$ є відрізок $[-9; 5]$. Знайдіть **НАЙБІЛЬШЕ** значення функції $g(x) = 10 + |f(x)|$.

72. Множиною значень функції $\varphi(x)$ є відрізок $[-11; 8]$. Знайдіть **НАЙБІЛЬШЕ** значення функції $\psi(x) = 5 \cdot |\varphi(x)|$.

73. На рис. 51 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-3; 3]$. Скільки точок перетину з віссю абсцис на цьому проміжку має функція $y = f(|x|)$?

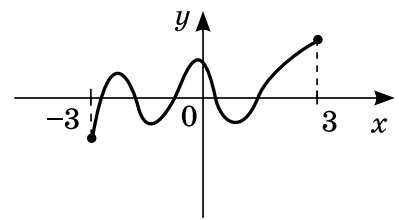


Рис. 51

74. На рис. 52 зображено графік функції $y = g(x)$, визначеної на проміжку $[-5; 5]$. Скільки точок перетину з віссю абсцис на цьому проміжку має функція $y = g(|x|)$?

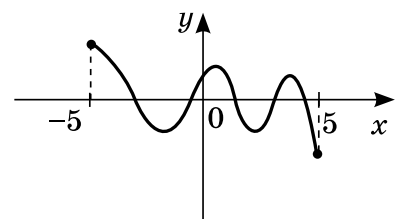


Рис. 52

75. Виконали такі перетворення графіка функції $f(x) = \sin x$: 1) симетрію відносно осі ординат; 2) стиск у 2 рази вздовж осі абсцис; 3) паралельне перенесення на 1 одиницю вниз. Унаслідок цих перетворень отримали графік функції $g(x)$. Знайдіть значення $g\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

76. Виконали такі перетворення графіка функції $\varphi(x) = \cos x$: 1) симетрію відносно осі абсцис; 2) розтяг у 4 рази вздовж осі ординат; 3) паралельне перенесення на $\frac{\pi}{6}$ одиниць праворуч. Унаслідок цих перетворень отримали графік функції $\psi(x)$. Знайдіть значення $\psi\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

77. На рис. 53 зображено ескіз графіка функції $y = \frac{ax+b}{x+c}$.

Визначте знаки параметрів a , b і c . У відповідь запишіть НОМЕР правильного, на вашу думку, варіанта.

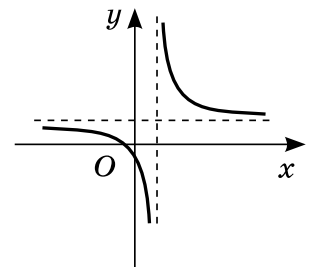


Рис. 53

1) $\begin{cases} a > 0, \\ b > 0, \\ c > 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} a > 0, \\ b > 0, \\ c < 0; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} a < 0, \\ b > 0, \\ c < 0; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} a < 0, \\ b < 0, \\ c > 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} a > 0, \\ b < 0, \\ c > 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} a > 0, \\ b < 0, \\ c < 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} a < 0, \\ b > 0, \\ c > 0; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} a < 0, \\ b < 0, \\ c < 0. \end{cases}$

78. На рис. 54 зображено ескіз графіка функції $y = \frac{ax+b}{x+c}$.

Визначте знаки параметрів a , b і c . У відповідь запишіть НОМЕР правильного, на вашу думку, варіанта.

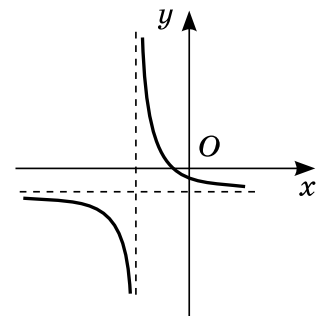


Рис. 54

1) $\begin{cases} a > 0, \\ b > 0, \\ c > 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} a > 0, \\ b > 0, \\ c < 0; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} a < 0, \\ b > 0, \\ c < 0; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} a < 0, \\ b < 0, \\ c > 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} a > 0, \\ b < 0, \\ c > 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} a > 0, \\ b < 0, \\ c < 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} a < 0, \\ b > 0, \\ c > 0; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} a < 0, \\ b < 0, \\ c < 0. \end{cases}$

79. У яких координатних чвертях знаходиться графік рівняння $x^2 + 3x + 2 = 0$? У відповідь запишіть суму НОМЕРІВ цих чвертей.

2.3. Побудова графіків функцій та рівнянь за допомогою геометричних перетворень

80. У яких координатних чвертях знаходиться графік рівняння $y^2 - 5y + 6 = 0$? У відповідь запишіть суму НОМЕРІВ цих чвертей.
81. Графіком рівняння $(x+18)^2 + |y-4| = 0$ є одна точка. Знайдіть СУМУ координат цієї точки.
82. Графіком рівняння $|x-2| + \sqrt{y-21} = 0$ є одна точка. Знайдіть СУМУ координат цієї точки.
83. Знайдіть найменше ЦІЛЕ значення параметра c , при якому пряма $x = c$ перетинає графік рівняння $|x| + 5|y| - 10 = 0$ тільки у двох точках.
84. Знайдіть НАЙБІЛЬШЕ значення параметра a , при якому пряма $y = a$ перетинає графік рівняння $0,1|x| + 0,2|y| - 1 = 0$ принаймні в одній точці.
85. Графік функції $y = f(x)$ складається тільки з чотирьох точок, позначених на рис. 55. Зі скількох точок складається графік рівняння $|y| = f(x)$?

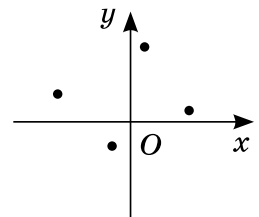


Рис. 55

86. Графік функції $y = g(x)$ складається тільки з п'яти точок, позначених на рис. 56. Зі скількох точок складається графік рівняння $|y| = g(|x|)$?

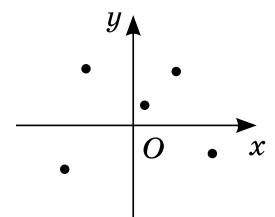


Рис. 56

87. Знайдіть діаметр кола, заданого рівнянням $x^2 + 16x + y^2 = 36$.

88. Коло задано рівнянням $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$. Знайдіть площу круга, обмеженого цим колом. Відповідь округліть до сотих, вважаючи, що $\pi \approx 3,14$.
89. Знайдіть координати $(x_0; y_0)$ центра кола, заданого рівнянням $x^2 - 4x + y^2 + 10y = 1$. У відповідь запишіть значення СУМИ $x_0 + y_0$.
90. Знайдіть координати $(x_0; y_0)$ центра симетрії лінії, заданої рівнянням $x^2 + y^2 - 3x + 7y + 2 = 0$. У відповідь запишіть значення СУМИ $x_0 + y_0$.
91. Скільки точок координатної площини, обидві координати яких є цілими числами, належать графіку рівняння $(|x| - 2)^2 + (|y| - 1)^2 = 5$?
92. Скільки точок координатної площини, обидві координати яких є цілими числами, належать графіку рівняння $(|x| - 1)^2 + (|y| + 2)^2 = 5$?

Завдання з повним розв'язанням

Завдання 93–100 розв'яжіть із повним обґрунтуванням, посилаючись на відповідні означення, твердження, формули. У разі потреби проілюструйте розв'язання таблицями, діаграмами, графіками тощо.

93. На рис. 57 зображено графік функції $y = f(x)$.

Знайдіть:

- а) область визначення функції
 $g(x) = 2f(2x - 2) + 1$;
- б) множину значень функції
 $g(x) = 2f(2x - 2) + 1$;
- в) проміжки зростання і спадання функції $h(x) = |f(x)|$;
- г) точки локального екстремуму та локальні екстремуми функції $\varphi(x) = f(|x|)$.

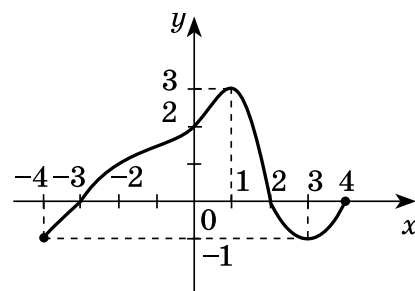


Рис. 57

94. На рис. 58 зображено графік функції $y = f(x)$.

Знайдіть:

а) область визначення функції

$$g(x) = \frac{1}{4}f(3-x) - 2;$$

б) множину значень функції

$$g(x) = \frac{1}{4}f(3-x) - 2;$$

в) проміжки зростання і спадання функції

$$\varphi(x) = f(|x|);$$

г) точки локального екстремуму та локальні екстремуми функції $h(x) = |f(x)|$.

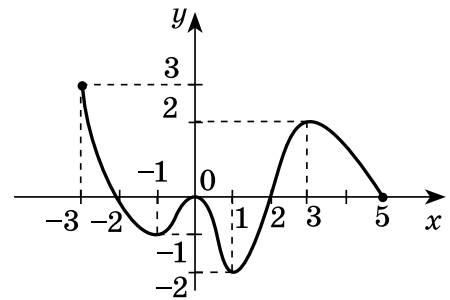


Рис. 58

95. Побудуйте:

а) графік функції $y = 4 - \sqrt{(x-4)^2}$;

б) графік функції $y = 4 - \sqrt{(|x|-4)^2}$;

в) ГМТ, задане рівнянням $|y| + \sqrt{(|x|-4)^2} = 4$.

Знайдіть усі значення параметра c , при яких пряма $x = c$ перетинає графік рівняння $|y| + \sqrt{(|x|-4)^2} = 4$ тільки у двох точках.

96. Побудуйте:

а) графік функції $y = 3^{\log_3|x+5|}$;

б) графік функції $y = 3^{\log_3||x|+5|}$;

в) ГМТ, задане рівнянням $|y| = 3^{\log_3||x|+5|}$.

Знайдіть усі значення параметра b , при яких пряма $y = b$ не перетинає графік рівняння $|y| = 3^{\log_3||x|+5|}$.

97. Лінію задано рівнянням $(|x|+1)^2 + (y-a)^2 = 2$.

- а) Зобразіть указану лінію на координатній площині при $a = 4$.
- б) Знайдіть довжину цієї лінії.
- в) Знайдіть усі значення параметра a , при яких дана лінія перетинає вісь абсцис тільки в одній точці.

98. Лінію задано рівнянням $(|x|-1)^2 + (y+b)^2 = 2$.

- а) Зобразіть указану лінію на координатній площині при $b = 3$.
- б) Знайдіть довжину цієї лінії.
- в) Знайдіть усі значення параметра b , при яких дана лінія перетинає вісь абсцис тільки у двох точках.

99. Побудуйте окремо графіки рівнянь $|x-5|+|y|=1$ і $(x-a)^2 + y^2 = 4$ при $a = -2$. Знайдіть усі значення параметра a , при яких побудовані графіки:

- а) не перетинаються;
- б) перетинаються тільки в одній точці.

100. Побудуйте окремо графіки рівнянь $x^2 + (y-10)^2 = 1$ і $x^2 + y^2 = a^2$ при $a = -3$. Знайдіть усі значення параметра a , при яких побудовані графіки перетинаються:

- а) тільки в одній точці;
- б) принаймні в одній точці.

Розділ 3. РІВНЯННЯ ТА СИСТЕМИ РІВНЯНЬ

3.1. Цілі та дробові раціональні рівняння

Найпростіші завдання з повним розв'язанням

Рівняння 1–20 розв'яжіть УСНО.

- | | |
|----------------------|----------------------------------|
| 1. $5x = 10$. | 11. $x^2 = -4^2$. |
| 2. $4x = 0$. | 12. $x^3 = (-4)^3$. |
| 3. $0 \cdot x = 0$. | 13. $x^2 - 49 = 0$. |
| 4. $0 \cdot x = 3$. | 14. $x^2 + 36 = 0$. |
| 5. $x = x$. | 15. $x^2 - 3x = 0$. |
| 6. $ x = 3$. | 16. $x^2 + 6x + 9 = 0$. |
| 7. $ x = -8$. | 17. $\frac{x-2}{x} = 0$. |
| 8. $x^2 = 3^2$. | 18. $\frac{3}{x-4} = 0$. |
| 9. $x^3 = 5^3$. | 19. $\frac{x^2}{x} = 0$. |
| 10. $x^2 = (-2)^2$. | 20. $\frac{x^2 - 2x}{x-2} = 0$. |

Завдання з вибором однієї правильної відповіді

Проаналізуйте умови та вимоги завдань 21–50 та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

21. Розв'яжіть рівняння $9(x-1) = 9$.

А	Б	В	Г	Д
$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 9$	$x = 10$

22. Розв'яжіть рівняння $\frac{x+1}{6} = 6$.

А	Б	В	Г	Д
$x = -1$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 35$	$x = 37$

23. Скільки коренів має рівняння $2x = x + x$?

А	Б	В	Г	Д
Жодного	Тільки один	Тільки два	Тільки три	Більше трьох

24. Скільки коренів має рівняння $x + 4 = x - 4$?

А	Б	В	Г	Д
Жодного	Тільки один	Тільки два	Тільки три	Більше трьох

25. Розв'яжіть рівняння $x \cdot \lg 2 = \lg 8$.

А	Б	В	Г	Д
$x = \frac{1}{3}$	$x = \frac{1}{4}$	$x = 3$	$x = 4$	$x = 6$

26. Розв'яжіть рівняння $\frac{1}{\log_9 10} \cdot x = \lg 3$.

А	Б	В	Г	Д
$x = \frac{1}{3}$	$x = \frac{1}{2}$	$x = 2$	$x = 3$	$x = 6$

27. Розв'яжіть рівняння $ax + 2 = 1$, якщо $a < 0$.

А	Б	В	Г	Д
$x = -\frac{1}{a}$	$x = \frac{1}{a}$	$x = -a$	$x = a$	Рівняння не має коренів

28. Розв'яжіть рівняння $-2(-ax - 1) = -4$, якщо $a > 0$.

А	Б	В	Г	Д
$x = \frac{1}{a}$	$x = -\frac{1}{a}$	$x = \frac{3}{a}$	$x = -\frac{3}{a}$	Рівняння не має коренів

29. Укажіть множину всіх значень параметра a , при яких рівняння $(a - 3) \cdot x = a + 7$ має тільки один корінь.

А	Б	В	Г	Д
$\{3\}$	$(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$	$\{-3\}$	$(-\infty; -7) \cup (-7; +\infty)$	$\{-7\}$

30. Укажіть множину всіх значень параметра b , при яких рівняння $x = b \cdot (2 - x)$ має тільки один корінь.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$	$\{2\}$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$\{-1\}$	$(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$

31. Яке з наведених рівнянь НЕ має коренів?

А	Б	В	Г	Д
$x^2 + 2x - 3 = 0$	$x^2 - 2x + 1 = 0$	$x^2 - 2x + 3 = 0$	$x^2 + 2x + 1 = 0$	$x^2 - 2x - 3 = 0$

32. Яке з наведених рівнянь має тільки один корінь?

А	Б	В	Г	Д
$4x^2 + 2x - 1 = 0$	$4x^2 - 2x + 1 = 0$	$4x^2 - 4x - 1 = 0$	$4x^2 + 4x + 1 = 0$	$4x^2 + x + 2 = 0$

33. Знайдіть добуток коренів рівняння $4x^2 + x - 2 = 0$.

А	Б	В	Г	Д
-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	Знайти неможливо, оскільки рівняння не має коренів

34. Знайдіть суму коренів рівняння $2x^2 - 7x + 9 = 0$.

А	Б	В	Г	Д
9	7	4,5	3,5	Знайти неможливо, оскільки рівняння не має коренів

35. Укажіть рівняння, корені x_1 та x_2 якого задовольняють умову $x_1 = \frac{4}{x_2}$.

А	Б	В	Г	Д
$x^2 + 8x - 4 = 0$	$x^2 + 4x - 1 = 0$	$x^2 + 8x + 4 = 0$	$x^2 - 4x + 1 = 0$	$x^2 + x + 4 = 0$

36. Укажіть рівняння, корені x_1 та x_2 якого задовольняють умову $x_2 = 3 - x_1$.

А	Б	В	Г	Д
$x^2 + 9x + 3 = 0$	$x^2 - 3x + 1 = 0$	$x^2 + 9x - 3 = 0$	$x^2 + 3x + 1 = 0$	$x^2 - 3x + 3 = 0$

37. Розв'яжіть рівняння $\frac{x+6}{x-7} = 0$.

А	Б	В	Г	Д
Рівняння не має коренів	$x = 6$	$x = -7$	$x = 7$	$x = -6$

38. Розв'яжіть рівняння $\frac{2-x}{5+x} = 0$.

А	Б	В	Г	Д
Рівняння не має коренів	$x = -5$	$x = -2$	$x = 2$	$x = 5$

39. Розв'яжіть рівняння $\frac{x+2}{x+2} = 2$.

А	Б	В	Г	Д
Рівняння не має коренів	$x = 2$	$x = -2$	$(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$	$(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$

40. Розв'яжіть рівняння $\frac{x-1}{x-1} = 1$.

А	Б	В	Г	Д
Рівняння не має коренів	$x = 1$	$x = -1$	$(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$	$(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

41. Розв'яжіть рівняння $\frac{3x+3}{2x-2} = 2$.

А	Б	В	Г	Д
$x = -1$	$x = 7$	$x = 1$	$x = -7$	Рівняння не має коренів

42. Розв'яжіть рівняння $\frac{x^2+x}{x-2} = 1$.

А	Б	В	Г	Д
$x_1 = 0; x_2 = -1$	$x = 0$	$x = -1$	$x = 2$	Рівняння не має коренів

43. Скільки розв'язків має система рівнянь $\begin{cases} 2x - 3y = 6, \\ -4x + 6y = -12? \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
Жодного	Тільки один	Тільки два	Тільки три	Більше трьох

44. Скільки розв'язків має система рівнянь $\begin{cases} -2x + y = 4, \\ 4x - 2y = 8? \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
Жодного	Тільки один	Тільки два	Тільки три	Більше трьох

45. Розв'яжіть рівняння $\frac{|x|}{x-5} = \frac{5}{x-5}$.

А	Б	В	Г	Д
Рівняння не має коренів	$x = -5$	$x = 5$	$x = \pm 5$	$x = 1$

46. Розв'яжіть рівняння $\frac{|x|}{x-3} = \frac{3}{3-x}$.

А	Б	В	Г	Д
Рівняння не має коренів	$x = -3$	$x = 3$	$x = \pm 3$	$x = 1$

47. Укажіть кількість коренів рівняння $|1 - |x|| = -x$, користуючись рис. 1, на якому зображено графік функції $y = |1 - |x||$.

А	Б	В	Г	Д
Жодного	Тільки один	Тільки два	Тільки три	Більше трьох

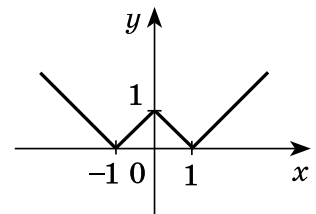


Рис. 1

48. Користуючись рис. 1, укажіть, скільки коренів має рівняння $|1 - |x|| = x + 1$.

А	Б	В	Г	Д
Жодного	Тільки один	Тільки два	Тільки три	Більше трьох

49. Побудуйте графік функції $y = ||x - 1| - 2|$ і за графіком знайдіть, скільки коренів має рівняння $||x - 1| - 2| = 5$.

А	Б	В	Г	Д
Жодного	Тільки один	Тільки два	Тільки чотири	Більше чотирьох

50. Побудуйте графік функції $y = \left| \left| 1 - x^2 \right| - 2 \right|$ і за графіком знайдіть, скільки коренів має рівняння $\left| \left| 1 - x^2 \right| - 2 \right| = 1,5$.

А	Б	В	Г	Д
Жодного	Тільки два	Тільки чотири	Тільки шість	Більше шести

У завданнях 51–54 сформульовано проблему (питання), яку потрібно розв'язати (отримати однозначну відповідь на питання), використовуючи для цього додаткові дані — твердження (1) і (2). Визначте, чи достатньо цих даних для розв'язання проблеми, і оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь*.

51. Розв'яжіть рівняння $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

- (1) Коренями рівняння $f(x) = 0$ є числа -2 і 7 .
 (2) Коренями рівняння $g(x) = 0$ є числа -1 і 7 .

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

52. Розв'яжіть рівняння $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

- (1) Рівняння $f(x) = 0$ не має коренів.
 (2) Рівняння $g(x) = 0$ не має коренів.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

* Саму проблему розв'язувати не обов'язково.

53. Знайдіть кількість коренів рівняння $x^2 - ax + c = 0$.

(1) $c = 5$.

(2) $a^2 - 4c = 0$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

54. Знайдіть кількість коренів рівняння $\frac{(x-a)(x-b)}{x-1} = 0$.

(1) $a = 1$.

(2) $b \neq 1$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

У завданнях 55–56 порівняйте величини X і Y та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

55. Величина X : корінь рівняння $\frac{x-1}{x+2} = 0$.

Величина Y : корінь рівняння $\frac{x+2}{x-1} = 0$.

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

56. Величина X : корінь рівняння $83x = 12$.

Величина Y : корінь рівняння $12x = 83$.

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

Завдання на встановлення відповідності

У завданнях 57–60 до кожного рядка, позначеного цифрою, доберіть один відповідник, позначений літерою.

57. Установіть відповідність між твердженнями (1–4) про кількість коренів рівнянь і цими рівняннями (А–Д).

1 Рівняння не має коренів

А $x^2 = 5$

2 Рівняння має тільки один корінь

Б $|x| = x$

3 Рівняння має тільки два корені

В $-x = 2$

4 Рівняння має безліч коренів

Г $x(x-1)(x-2) = 0$

Д $\frac{1}{x} = \frac{4}{x}$

58. Установіть відповідність між рівняннями (1–4) і твердженнями про кількість їх коренів (А–Д).

1 $x^2 + 4x + 4 = 0$

А Рівняння не має коренів

2 $x^2 - 4x + 3 = 0$

Б Рівняння має тільки один корінь

3 $x^2 - 3x + 4 = 0$

В Рівняння має два від'ємні корені

4 $x^2 - 3x - 4 = 0$

Г Рівняння має два додатні корені

Д Рівняння має два корені різних знаків

59. Установіть відповідність між твердженнями (1–4) про кількість розв'язків систем рівнянь і цими системами рівнянь (А–Д).

1 Система рівнянь не має розв'язків

А $\begin{cases} x - y = 0, \\ x - y = 0 \end{cases}$

2 Система рівнянь має безліч розв'язків

Б $\begin{cases} x + y = 2, \\ x - y = 0 \end{cases}$

3 Система рівнянь має тільки один розв'язок $x = y = 0$

В $\begin{cases} x + y = 1, \\ x - y = 1 \end{cases}$

4 Система рівнянь має тільки один розв'язок $x = y = 1$

Г $\begin{cases} x + y = 0, \\ x + y = 2 \end{cases}$

Д $\begin{cases} x + y = 0, \\ x - y = 0 \end{cases}$

60. Установіть відповідність між системами рівнянь (1–4) і твердженнями про кількість їх розв'язків (А–Д).

$$1 \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ x + y = 3 \end{cases}$$

$$2 \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$3 \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 3, \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$4 \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 0, \\ x + y = 3 \end{cases}$$

А Система рівнянь не має розв'язків

Б Система рівнянь має тільки один розв'язок

В Система рівнянь має тільки два розв'язки

Г Система рівнянь має тільки чотири розв'язки

Д Система рівнянь має безліч розв'язків

Завдання на встановлення послідовності

У завданнях 61–62 виберіть тільки необхідні для розв'язання поставленої задачі дії і розмістіть їх у правильній послідовності. У відповідь запишіть отриману послідовність літер.

61. Як розв'язати рівняння $\frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} = 0$?

А Знайти всі корені рівняння $x - 1 = 0$.

Б Знайти всі корені рівняння $x^2 - 4x + 3 = 0$.

В Записати у відповідь усі корені рівняння $x - 1 = 0$.

Г Записати у відповідь усі корені рівняння $x^2 - 4x + 3 = 0$.

Д Записати у відповідь усі корені рівняння $x - 1 = 0$, які не є коренями рівняння $x^2 - 4x + 3 = 0$.

Е Записати у відповідь усі корені рівняння $x^2 - 4x + 3 = 0$, які не є коренями рівняння $x - 1 = 0$.

62. Як розв'язати рівняння $\frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} = 0$?

А Знайти всі корені рівняння $x^2 - 9 = 0$.

Б Знайти всі корені рівняння $x^2 - 5x + 6 = 0$.

В Записати у відповідь усі корені рівняння $x^2 - 9 = 0$.

Г Записати у відповідь усі корені рівняння $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Д Записати у відповідь усі корені рівняння $x^2 - 9 = 0$, які не є коренями рівняння $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Е Записати у відповідь усі корені рівняння $x^2 - 5x + 6 = 0$, які не є коренями рівняння $x^2 - 9 = 0$.

Завдання з короткою відповіддю

Розв'яжіть завдання 63–92 і запишіть відповідь **ОДИМ ЧИСЛОМ**.

63. Знайдіть значення параметра a , при якому рівняння $ax + 4x = a^2 + 8a + 16$ має безліч коренів.
64. Знайдіть значення параметра c , при якому рівняння $cx - 2c = -5x + 10$ має безліч коренів.
65. Розв'яжіть рівняння $2x = |x - 6|$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть **ЙОГО** у відповідь; якщо рівняння має кілька коренів, то запишіть у відповідь їх **СУМУ**.
66. Розв'яжіть рівняння $|2x - 1| = |x - 2|$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть **ЙОГО** у відповідь; якщо рівняння має кілька коренів, то запишіть у відповідь їх **ДОБУТОК**.
67. Знайдіть **СУМУ** всіх коренів рівняння $|x + 1| + |2x + 5| = 6$.
68. Знайдіть **ДОБУТОК** усіх коренів рівняння $|3x - 2| - |x - 3| = 5$.
69. Один із коренів квадратного рівняння $x^2 - 4x = a$ дорівнює -2 . Знайдіть інший корінь цього рівняння.
70. Один із коренів квадратного рівняння $x^2 + 8x = b$ дорівнює 1 . Знайдіть інший корінь цього рівняння.
71. Знайдіть усі значення параметра a , при яких рівняння $(a - 2)x^2 + x - 2 = 0$ має тільки один корінь. Якщо таке значення параметра одне, то запишіть **ЙОГО** у відповідь; якщо таких значень кілька, то запишіть у відповідь їх **СУМУ**.
72. Знайдіть усі значення параметра b , при яких рівняння $(b^2 - 1)x^2 + (2b - 1)x + 1 = 0$ має тільки один корінь. Якщо таке значення параметра одне, то запишіть **ЙОГО** у відповідь; якщо таких значень кілька, то запишіть у відповідь їх **ДОБУТОК**.
73. Знайдіть **НАЙМЕНШЕ** значення виразу $\frac{a}{b}$, якщо $a^2 + 10ab = 24b^2$, $b \neq 0$.
74. Знайдіть **НАЙБІЛЬШЕ** значення виразу $\frac{x}{y}$, якщо $x^2 - 8xy = 33y^2$, $y \neq 0$.
75. Знайдіть **СУМУ** всіх коренів рівняння $(x - 10)(|x - 4| - 1) = 0$.

76. Знайдіть СУМУ всіх коренів рівняння $|x - 15|(|x + 1| - 8) = 0$.
77. Знайдіть ДОБУТОК усіх коренів рівняння $x^3 + 4x^2 - 2x - 8 = 0$.
78. Знайдіть НАЙМЕНШИЙ корінь рівняння $x^7 + 8x^4 - 4x^3 - 32 = 0$.
79. Розв'яжіть рівняння $x + \frac{1}{x} = 10 + \frac{1}{10}$. У відповідь запишіть СУМУ всіх його коренів.
80. Розв'яжіть рівняння $x + \frac{1}{x} = 4 + \frac{1}{4}$. У відповідь запишіть СУМУ всіх його коренів.
81. Розв'яжіть рівняння $2x^2 + \frac{5}{x-4} = 32 + \frac{5}{x-4}$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть ЙОГО у відповідь; якщо рівняння має кілька коренів, то запишіть у відповідь їх ДОБУТОК.
82. Розв'яжіть рівняння $\frac{6}{9-x} + 27 = \frac{1}{3}x^2 + \frac{6}{9-x}$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть ЙОГО у відповідь; якщо рівняння має кілька коренів, то запишіть у відповідь їх ДОБУТОК.
83. Розв'яжіть рівняння $\frac{x^2}{x^2 - 2x + 1} - \frac{2x}{x-1} = 3$. У відповідь запишіть НАЙМЕНШИЙ корінь цього рівняння.
84. Розв'яжіть рівняння $\frac{x^4}{(x+2)^2} - \frac{7x^2}{x+2} + 10 = 0$. У відповідь запишіть ДОБУТОК усіх коренів цього рівняння.
85. Знайдіть розв'язок $(x_0; y_0)$ системи рівнянь $\begin{cases} 4x - y = 30, \\ 2x + y = 18. \end{cases}$ У відповідь запишіть СУМУ $x_0 + y_0$.
86. Знайдіть розв'язок $(x_0; y_0)$ системи рівнянь $\begin{cases} 2x + 3y = 25, \\ 2x + 5y = 43. \end{cases}$ У відповідь запишіть ДОБУТОК $x_0 \cdot y_0$.
87. Скільки розв'язків має система рівнянь $\begin{cases} |x| + |y| = 2, \\ (x+1)(y-1) = 0? \end{cases}$

88. Скільки розв'язків має система рівнянь $\begin{cases} |x| - |y| = 0, \\ x^2 - 3x = 0? \end{cases}$
89. Знайдіть значення параметра c , при якому система рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 144, \\ y = x^4 + c \end{cases}$ має тільки один розв'язок.
90. Знайдіть усі ЦІЛІ значення параметра a , при яких система рівнянь $\begin{cases} (x+12)^2 + (y-18)^2 = 4, \\ y = a \end{cases}$ має тільки два розв'язки. У відповідь запишіть СУМУ цих значень параметра.
91. Знайдіть НАЙМЕНШЕ значення параметра a , при якому система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 81, \\ (x+3)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$ має тільки один розв'язок.
92. Знайдіть усі значення параметра c , при якому система рівнянь $\begin{cases} (x-4)(y-3) = 0, \\ x^2 + y^2 = c \end{cases}$ має тільки три розв'язки. Якщо таке значення параметра одне, то запишіть ЙОГО у відповідь; якщо таких значень кілька, то запишіть у відповідь їх СУМУ.

Завдання з повним розв'язанням

Завдання 93–100 розв'яжіть із повним обґрунтуванням, посилаючись на відповідні означення, твердження, формули. У разі потреби проілюструйте розв'язання таблицями, діаграмами, графіками тощо.

93. Розв'яжіть рівняння:
 а) $x^3 + 8x^2 + 22x + 20 = 0$; б) $12x^3 - 16x^2 + 7x - 1 = 0$.
94. Розв'яжіть рівняння:
 а) $(x+5)(x+3)(x-2)(x-4) = -48$; б) $(x+2)(x+3)(x+8)(x+12) = 4x^2$.
95. Розв'яжіть рівняння:
 а) $2x^4 + 9x^3 - x^2 + 9x + 2 = 0$; б) $2(x^2 + x + 1)^2 - 7(x-1)^2 = 13(x^3 - 1)$.
96. Розв'яжіть рівняння:
 а) $x^2 + \frac{9x^2}{(x+3)^2} = 7$; б) $x^2 + \frac{4x^2}{(x-2)^2} = 5$.

97. Розв'яжіть рівняння:

$$\text{а) } \frac{3x}{2x^2 + 5x + 2} + \frac{5x}{2x^2 + 11x + 2} - \frac{2}{3} = 0; \quad \text{б) } \frac{2x^2 - x + 3}{3} - \frac{2x^2}{2x^2 - 4x + 3} - \frac{x}{6} = 0.$$

98. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{5x^2 + 8xy - 4y^2}{5x^2 + 3xy - 2y^2} = \frac{1}{3}, \\ 6x + 11y = -8; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{5x^2 - 11xy + 2y^2}{5x^2 + 4xy - y^2} = \frac{7}{10}, \\ 5x - 13y = 32. \end{cases}$$

99. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 = 4, \\ x^2 + xy = 4; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x^3 - y^3 = 28, \\ x^2 + xy + y^2 = 7. \end{cases}$$

100. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} xy + x + y = 11, \\ x^2y + xy^2 = 30; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} xy + yz = 8, \\ yz + zx = 9, \\ zx + xy = 5. \end{cases}$$

3.2. Ірраціональні та тригонометричні рівняння

Найпростіші завдання з повним розв'язанням

Рівняння 1–20 розв'яжіть УСНО.

- | | |
|-----------------------------------|---|
| 1. $\sqrt{x} = \sqrt{10}$. | 11. $\operatorname{tg} x = 0$. |
| 2. $\sqrt[5]{x} = -\sqrt[5]{2}$. | 12. $\operatorname{ctg} x = 0$. |
| 3. $\sqrt[4]{x} = -\sqrt[4]{7}$. | 13. $\sin x = 1$. |
| 4. $\sqrt{x} = 3$. | 14. $\cos x = 1$. |
| 5. $\sqrt[3]{x} = -2$. | 15. $\operatorname{ctg} x = 1$. |
| 6. $\sqrt[6]{x} = -1$. | 16. $\sin x = -1$. |
| 7. $\frac{1}{\sqrt{x}} = 0$. | 17. $\cos x = -1$. |
| 8. $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 1$. | 18. $\sin x = 5$. |
| 9. $\sin x = 0$. | 19. $\cos x = -\sqrt{2}$. |
| 10. $\cos x = 0$. | 20. $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 4$. |

Завдання з вибором однієї правильної відповіді

Проаналізуйте умови та вимоги завдань 21–50 та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

21. Яке з наведених рівнянь НЕ має коренів?

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{x} - 1 = 0$	$\sqrt[3]{x} - 1 = 0$	$\sqrt{x} + 1 = 0$	$\sqrt[3]{x} + 1 = 0$	$-\sqrt{x} = 0$

22. Скільки коренів має рівняння $\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} + 1 = 0$?

А	Б	В	Г	Д
Жодного	Тільки один	Тільки два	Тільки три	Більше трьох

23. Скільки коренів має рівняння $\sqrt[4]{4-x} = 3x + \sqrt{x-5}$?

А	Б	В	Г	Д
Жодного	Тільки один	Тільки два	Тільки три	Більше трьох

24. Скільки коренів має рівняння $\sqrt[4]{2x-4} + \sqrt[3]{x+6} = 2 - \sqrt{2-x}$?

А	Б	В	Г	Д
Жодного	Тільки один	Тільки два	Тільки три	Більше трьох

25. Укажіть проміжок, якому належить корінь рівняння $\sqrt{x} = 0,7$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(0; \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}; 1\right)$	$(1; 2)$	$(2; 10)$	$(10; +\infty)$

26. Укажіть проміжок, якому належить корінь рівняння $\sqrt{x} = 4,1$.

А	Б	В	Г	Д
$(0; 2)$	$(2; 8)$	$(8; 16)$	$(16; 20)$	$(20; +\infty)$

27. Розв'яжіть рівняння $\sqrt[4]{x^2} = \sqrt[4]{(-5)^2}$.

А	Б	В	Г	Д
Рівняння не має коренів	$x = -5$	$x = 5$	$x = \pm 5$	$x = 25$

28. Розв'яжіть рівняння $\sqrt[5]{x^3} = \sqrt[5]{(-6)^3}$.

А	Б	В	Г	Д
Рівняння не має коренів	$x = -6$	$x = 6$	$x = \pm 6$	$x = 216$

29. Скільки коренів має рівняння $\sqrt[3]{x^2} = -x$?

А	Б	В	Г	Д
Жодного	Тільки один	Тільки два	Тільки три	Більше трьох

30. Скільки коренів має рівняння $\sqrt{x^3} = -x$?

А	Б	В	Г	Д
Жодного	Тільки один	Тільки два	Тільки три	Більше трьох

31. Користуючись ескізом графіка функції $y = 16 - x^4$ (рис. 2), укажіть проміжок, якому належить корінь рівняння $16 - x^4 = -\sqrt{x}$, якщо такий корінь існує.

А	Б	В	Г	Д
Рівняння не має коренів	$(-\infty; -2)$	$(-2; 0)$	$(0; 2)$	$(2; +\infty)$

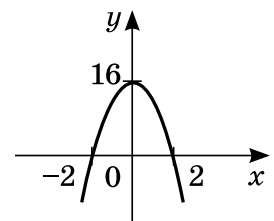


Рис. 2

32. Користуючись рис. 2, укажіть проміжок, якому належить корінь рівняння $16 - x^4 = \sqrt{-x}$, якщо такий корінь існує.

А	Б	В	Г	Д
Рівняння не має коренів	$(-\infty; -2)$	$(-2; 0)$	$(0; 2)$	$(2; +\infty)$

33. На рис. 3 зображено фрагмент графіка функції $y = f(x)$ на проміжку $[0; 30]$. Укажіть проміжок, якому належать УСІ корені рівняння $\sqrt[3]{f(x)} = -2$ на проміжку $[0; 30]$, якщо вони існують.

А	Б	В	Г	Д
$(-10; 0)$	$(0; 8)$	$(8; 20)$	$(20; 30)$	Інша відповідь

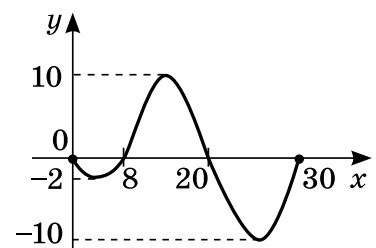


Рис. 3

34. На рис. 4 зображено фрагмент графіка функції $y = g(x)$ на проміжку $[-6; 6]$. Укажіть проміжок, якому належать УСІ корені рівняння $\sqrt{g(x)} = 2$ на проміжку $[-6; 6]$, якщо вони існують.

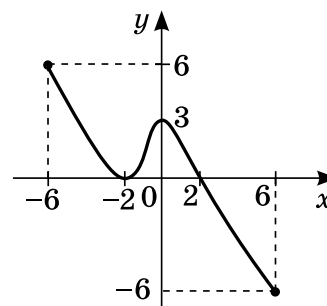


Рис. 4

А	Б	В	Г	Д
$(-6; -2)$	$(-2; 0)$	$(0; 2)$	$(2; 6)$	Інша відповідь

35. Розв'яжіть рівняння $8\sin x = 7$.

А	Б	В
$x = (-1)^n \arcsin \frac{7}{8} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = (-1)^n \arcsin \frac{7}{8} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = (-1)^n \arcsin \frac{8}{7} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
Г		Д
$x = (-1)^n \arcsin \frac{8}{7} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$		Рівняння не має коренів

36. Розв'яжіть рівняння $5\cos x = 6$.

А	Б	В
$x = \pm \arccos \frac{6}{5} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = \pm \arccos \frac{6}{5} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = \pm \arccos \frac{5}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
Г		Д
$x = \pm \arccos \frac{5}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$		Рівняння не має коренів

37. Розв'яжіть рівняння $\frac{\sin x}{\cos x} = 6$.

А	Б	В	Г	Д
Рівняння не має коренів	$x = \operatorname{arctg} 6 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = \operatorname{arctg} 6 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = \operatorname{arctg} 6 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = \operatorname{arctg} 6 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

38. Розв'яжіть рівняння $\frac{\cos x}{\sin x} = 9$.

А	Б	В	Г	Д
Рівняння не має коренів	$x = \operatorname{arctg} 9 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = \operatorname{arctg} 9 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = \operatorname{arctg} 9 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = \operatorname{arctg} 9 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

39. Розв'яжіть рівняння $\cos 2x + 2\sin x + 1 = 0$.

А	Б	В	Г	Д
Рівняння не має коренів	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = \pi + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

40. Розв'яжіть рівняння $\sin^2\left(\frac{1}{x}\right) + \cos^2\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; +\infty)$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	Рівняння не має коренів

41. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg} \frac{x}{3} = 0$.

А	Б	В	Г	Д
$x = 6\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{3\pi}{2} + 3\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$	$x = 3\pi n, n \in \mathbb{Z}$

42. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{ctg} 2x = 0$.

А	Б	В	Г	Д
$x = \pi + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

43. Розв'яжіть рівняння $\sin 4x = -1$.

А	Б	В
$x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$	$x = -2\pi + 8\pi n, n \in \mathbb{Z}$
Г		Д
$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}$		$x = \pm \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

44. Розв'яжіть рівняння $\cos \frac{x}{2} = -1$.

А	Б	В	Г	Д
$x = \pm \arccos 2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = 2\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = 2\pi + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = (-1)^n \arccos 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

45. Скільки коренів рівняння $\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \frac{1}{2}$ належить проміжку $[-2\pi; \pi]$?

А	Б	В	Г	Д
Жодного	Один	Два	Три	Більше трьох

46. Скільки коренів рівняння $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x = -\frac{1}{2}$ належить проміжку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$?

А	Б	В	Г	Д
Жодного	Один	Два	Три	Більше трьох

47. Користуючись ескізом графіка функції $y = -9x + 0,9$ (рис. 5), укажіть проміжок, якому належить корінь рівняння $\cos x = -9x + 0,9$, якщо такий корінь існує.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -\pi)$	$(-\pi; 0)$	$(0; \pi)$	$(\pi; +\infty)$	Рівняння не має коренів

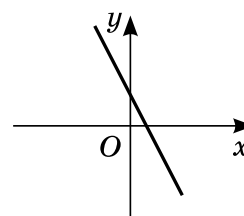


Рис. 5

48. Користуючись рис. 5, укажіть проміжок, якому належить корінь рівняння $\sin x = -9x + 0,9$, якщо такий корінь існує.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -\pi)$	$(-\pi; 0)$	$(0; \pi)$	$(\pi; +\infty)$	Рівняння не має коренів

49. Укажіть рівняння, що МАЄ корені.

А	Б	В	Г	Д
$\arcsin x = \pi$	$\sin x = \pi$	$\arccos x = \pi$	$\cos x = \pi$	$\operatorname{arctg} x = \pi$

50. Укажіть рівняння, що має ТІЛЬКИ ОДИН корінь.

А	Б	В	Г	Д
$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$	$\operatorname{tg} x = \frac{\pi}{2}$	$\cos x = \frac{\pi}{2}$	$\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$	$\operatorname{ctg} x = \frac{\pi}{2}$

У завданнях 51–54 сформульовано проблему (питання), яку потрібно розв'язати (отримати однозначну відповідь на питання), використовуючи для цього додаткові дані — твердження (1) і (2). Визначте, чи достатньо цих даних для розв'язання проблеми, і оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь*.

51. Знайдіть значення виразу $5 + x$.

(1) $\sqrt{x^2} = 4$. (2) $\sqrt{-x} = 2$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

52. Знайдіть значення виразу $\sqrt[3]{x}$.

(1) $\sqrt[5]{x^5} = 1$. (2) $\sqrt[4]{x^4} = 1$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

* Саму проблему розв'язувати не обов'язково.

53. Знайдіть значення виразу $5x$.

(1) $\operatorname{ctg} x = 10$.

(2) $0 < x < \pi$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

54. Знайдіть значення виразу x^2 .

(1) $\sin x = \frac{1}{3}$.

(2) $0 < x < \pi$

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

У завданнях 55–56 порівняйте величини X і Y та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

55. Відомо, що рівняння $\sqrt{x} = a$ має корені.

Величина X : значення параметра a .

Величина Y : 0.

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

56. Відомо, що рівняння $\cos x = b$ має корені.

Величина X : значення параметра b .

Величина Y : 3.

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

Завдання на встановлення відповідності

У завданнях 57–60 до кожного рядка, позначеного цифрою, доберіть один відповідник, позначений літерою.

57. Установіть відповідність між рівняннями (1–4) і числами (А–Д), що є коренями цих рівнянь.

1 $\sin(\pi x) = \frac{1}{2}$

А $\log_4 2$

2 $\cos(\pi x) = 0$

Б $\log_{81} 3$

3 $\operatorname{tg}(\pi x) = 0$

В $\log_9 1$

4 $\operatorname{ctg}(\pi x) = 1$

Г $\log_{64} 2$

Д $\log_{27} 3$

58. Установіть відповідність між рівняннями (1–4) і значеннями тригонометричних виразів (А–Д), що є коренями цих рівнянь.

1 $\sqrt{x} = 2$

А $54 \cos \frac{\pi}{3}$

2 $\sqrt[3]{x^2} = 9$

Б $5 - \sin \frac{\pi}{2}$

3 $\sqrt[3]{x} = -2$

В $\frac{9}{2 \sin \frac{\pi}{6}}$

4 $\sqrt{x^3} = 27$

Г $4 \operatorname{ctg} \left(-\frac{\pi}{4} \right)$

Д $-7 + \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{4} \right)$

59. Установіть відповідність між твердженнями (1–4) про кількість коренів рівнянь і цими рівняннями (А–Д).

1 Рівняння не має коренів

А $\cos x = (0,1x)^2$

2 Рівняння має тільки один корінь

Б $\sin x = (x-1)^2$

3 Рівняння має тільки два корені

В $\cos x = -x^2$

4 Рівняння має безліч коренів

Г $\sin x = 0,1^2$

Д $\cos x = x^2 + 1$

60. Установіть відповідність між рівняннями (1–4) і твердженнями (А–Д) про кількість їх коренів, користуючись ескізом графіка функції $y = |x^2 - 1|$ (рис. 6).

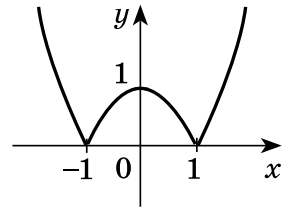


Рис. 6

1 $\frac{1}{4}\sqrt[4]{x+2} = |x^2 - 1|$

А Рівняння не має коренів

Б Рівняння має тільки один корінь

2 $-\sqrt{x-1} = |x^2 - 1|$

В Рівняння має тільки два корені

3 $-\sqrt[6]{x} = |x^2 - 1|$

Г Рівняння має тільки три корені

4 $\sqrt[3]{x} = |x^2 - 1|$

Д Рівняння має тільки чотири корені

Завдання на встановлення послідовності

У завданнях 61–62 виберіть тільки необхідні для розв'язання поставленої задачі дії і розмістіть їх у правильній послідовності. У відповідь запишіть отриману послідовність літер.

61. Як розв'язати рівняння $\sqrt{f(x)} = g(x)$?

А Записати область допустимих значень (ОДЗ) змінної x : $f(x) \geq 0$.

Б Записати область допустимих значень (ОДЗ) змінної x : $g(x) \geq 0$.

В Записати область допустимих значень (ОДЗ) змінної x : $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$

Г Розв'язати рівняння $f(x) = 0$.

Д Розв'язати рівняння $g(x) = 0$.

Е Розв'язати рівняння $(f(x))^2 = g(x)$.

Є Розв'язати рівняння $(g(x))^2 = f(x)$.

Ж Розв'язати рівняння $g(x) = f(x)$.

З Серед коренів розв'язаних рівнянь (або рівняння) вибрати ті, що належать ОДЗ.

62. Як розв'язати рівняння $\sqrt[3]{\varphi(x)} + \sqrt[9]{\varphi(x)} = 0$?
- А Записати ОДЗ змінної x : $\varphi(x) > 0$.
- Б Записати ОДЗ змінної x : $\varphi(x) \square 0$.
- В Виконати заміну: $\sqrt[3]{\varphi(x)} = t$.
- Г Виконати заміну: $\sqrt[9]{\varphi(x)} = t$.
- Д Розв'язати рівняння: $t^6 + t = 0$ відносно змінної t .
- Е Розв'язати рівняння: $t^3 + t = 0$ відносно змінної t .
- Є Розв'язати рівняння: $t^2 + t = 0$ відносно змінної t .
- Ж Розв'язати відносно змінної x усі рівняння виду $\varphi(x) = (t_0)^3$, де t_0 — корінь розв'язаного раніше рівняння відносно змінної t .
- З Розв'язати відносно змінної x всі рівняння виду $\varphi(x) = (t_0)^9$, де t_0 — корінь розв'язаного раніше рівняння відносно змінної t .
- И Серед усіх коренів розв'язаних відносно змінної x рівнянь (або рівняння) вибрати ті, що належать ОДЗ.

Завдання з короткою відповіддю

Розв'яжіть завдання 63–92 і запишіть відповідь **ОДНИМ ЧИСЛОМ**.

63. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x^2 - 12x - 14} = \sqrt{x}$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть ЙОГО у відповідь; якщо рівняння має кілька коренів, то запишіть у відповідь їх СУМУ.
64. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x^2 + 5x - 24} = \sqrt{-5x}$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть ЙОГО у відповідь; якщо рівняння має кілька коренів, то запишіть у відповідь їх СУМУ.
65. Розв'яжіть рівняння $(x - 35)(x + 18) \cdot \sqrt{x + 6} = 0$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть ЙОГО у відповідь; якщо рівняння має кілька коренів, то запишіть у відповідь їх СУМУ.
66. Розв'яжіть рівняння $(x - 21)(x + 17) \cdot \sqrt{8 - x} = 0$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть ЙОГО у відповідь; якщо рівняння має кілька коренів, то запишіть у відповідь їх СУМУ.

67. Розв'яжіть рівняння $x - 2 = \sqrt{18 + x}$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть ЙОГО у відповідь; якщо рівняння має кілька коренів, то запишіть у відповідь їх СУМУ.
68. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{4x + 28} = 1 - x$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть ЙОГО у відповідь; якщо рівняння має кілька коренів, то запишіть у відповідь їх СУМУ.
69. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x - 5} + \sqrt{10 - x} = 3$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть ЙОГО у відповідь; якщо рівняння має кілька коренів, то запишіть у відповідь їх ДОБУТОК.
70. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x + 5} - \sqrt{x - 3} = 2$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть ЙОГО у відповідь; якщо рівняння має кілька коренів, то запишіть у відповідь їх ДОБУТОК.
71. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} - 6 = 0$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть ЙОГО у відповідь; якщо рівняння має кілька коренів, то запишіть у відповідь їх ДОБУТОК.
72. Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} - 2 = 0$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть ЙОГО у відповідь; якщо рівняння має кілька коренів, то запишіть у відповідь їх СУМУ.
73. Знайдіть розв'язок $(x_0; y_0)$ системи рівнянь
$$\begin{cases} 5\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{y} = 4, \\ 3\sqrt{x} - \sqrt[3]{y} = 9. \end{cases}$$
 У відповідь запишіть значення $x_0 + y_0$.
74. Знайдіть розв'язок $(x_0; y_0)$ системи рівнянь
$$\begin{cases} \sqrt{x} + 2\sqrt[3]{y} = -7, \\ 4\sqrt{x} - \sqrt[3]{y} = 17. \end{cases}$$
 У відповідь запишіть значення $x_0 + y_0$.
75. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x + 3} - \frac{36}{\sqrt{x + 3}} = 5$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть ЙОГО у відповідь; якщо рівняння має кілька коренів, то запишіть у відповідь їх СУМУ.
76. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x - 5} - 15 = \frac{16}{\sqrt{x - 5}}$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть ЙОГО у відповідь; якщо рівняння має кілька коренів, то запишіть у відповідь їх СУМУ.

77. Розв'яжіть рівняння $2\cos^2 x = \cos x + 1$. У відповідь запишіть КІЛЬКІСТЬ коренів цього рівняння, які належать проміжку $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.
78. Розв'яжіть рівняння $4\cos^2 x + 8\sin x + 1 = 0$. У відповідь запишіть корінь цього рівняння, який належить проміжку $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.
79. Розв'яжіть рівняння $4 + \operatorname{tg} x = \frac{3\cos x + 2\sin x}{\cos x}$. У відповідь запишіть корінь цього рівняння, який належить проміжку $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.
80. Розв'яжіть рівняння $9 + \operatorname{ctg} x = \frac{10\sin x + 2\cos x}{\sin x}$. У відповідь запишіть корінь цього рівняння, який належить проміжку $(0; \pi)$.
81. Знайдіть НАЙМЕНШИЙ ДОДАТНИЙ корінь рівняння $\sin 2x + \cos x = 0$.
82. Знайдіть НАЙБІЛЬШИЙ ВІД'ЄМНИЙ корінь рівняння $4\sin^2 3x - 3 = 0$.
83. Укажіть корінь рівняння $\frac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x} = \sqrt{3}$, який належить проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
84. Знайдіть КІЛЬКІСТЬ коренів рівняння $\frac{\operatorname{tg} x - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}\operatorname{tg} x} = -1$, які належать проміжку $\left(0; \frac{3\pi}{2}\right)$.
85. Знайдіть кількість коренів рівняння $\sqrt{2x+3} \cdot \sin x = 0$, що належать проміжку $[-10\pi; 10\pi]$.
86. Знайдіть кількість коренів рівняння $\sqrt{x-1} \cdot \cos x = 0$, що належать проміжку $\left[-\frac{9\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right]$.
87. Знайдіть усі значення параметра a , при яких рівняння $\sin 3x = 1 + (a+2)^2$ має корені. Якщо таке значення параметра одне, то запишіть ЙОГО у відповідь; якщо таких значень кілька, то запишіть у відповідь їх ДОБУТОК.

88. Знайдіть усі значення параметра b , при яких рівняння $\cos 4x = -1 - (b^2 - 3)^2$ має корені. Якщо таке значення параметра одне, то запишіть ЙОГО у відповідь; якщо таких значень кілька, то запишіть у відповідь їх ДОБУТОК.
89. Розв'яжіть рівняння $\arcsin(2x) = \frac{\pi}{2}$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть ЙОГО у відповідь; якщо рівняння має кілька коренів, то запишіть у відповідь НАЙМЕНШИЙ із них.
90. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{arctg}(4x) = \frac{\pi}{4}$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть ЙОГО у відповідь; якщо рівняння має кілька коренів, то запишіть у відповідь НАЙБІЛЬШИЙ із них.
91. Розв'яжіть рівняння $(2x - 15)(x + 3) \cdot \arccos(x - 8) = 0$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть ЙОГО у відповідь; якщо рівняння має кілька коренів, то запишіть у відповідь їх СУМУ.
92. Розв'яжіть рівняння $(2x - 5)(2x + 13) \cdot \arcsin(x + 6) = 0$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть ЙОГО у відповідь; якщо рівняння має кілька коренів, то запишіть у відповідь їх СУМУ.

Завдання з повним розв'язанням

Завдання 93–100 розв'яжіть із повним обґрунтуванням, посилаючись на відповідні означення, твердження, формули. У разі потреби проілюструйте розв'язання таблицями, діаграмами, графіками тощо.

93. Розв'яжіть рівняння:

а) $\sqrt{x^2 - 7x + 18} = 24 + 7x - x^2$; б) $\sqrt[3]{x^2 - 2x + 1} + \sqrt[3]{x - 1} - 2 = 0$.

94. Розв'яжіть рівняння:

а) $\sqrt{x^4 + 15x^2} + 4\sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x^2 + 15} = 12$; б) $\sqrt{x^4 - 15x^2} + 7\sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x^2 - 15} = 18$.

95. Розв'яжіть рівняння:

а) $\sqrt{5 - x} + \sqrt[3]{x + 3} = 2$; б) $\sqrt[3]{45 + x} - \sqrt[3]{x - 16} = 1$.

96. Розв'яжіть систему рівнянь:

а)
$$\begin{cases} 4x + y + 4\sqrt{xy} = 49, \\ 6\sqrt{x} - \sqrt{y} = 9; \end{cases}$$
 б)
$$\begin{cases} 9x + y - 6\sqrt{xy} = 121, \\ \sqrt{x} + 4\sqrt{y} = 8. \end{cases}$$

97. Розв'яжіть рівняння:

а) $\cos 7x + \sin 8x = \cos 3x - \sin 2x$; б) $\sin^2 x - \sin^2 2x + \sin^2 3x = 0,5$.

98. Розв'яжіть рівняння:

а) $\sin^2 x - 4\sin x \cos x - 5\cos^2 x = 0$; б) $\cos^2 x - 3\sin x \cos x + 1 = 0$.

99. Розв'яжіть рівняння:

а) $\sqrt{\cos(\pi x) - 1} = x^2 + 8x - ax - 8a$; б) $\sqrt{\sin(\pi x) - 1} = (2x - 5)(x + b)$.

100. Розв'яжіть систему рівнянь:

а)
$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = y^2 + 6y + 10, \\ \cos(\pi y) = -x^2 - 1; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 1 - \sin\left(\pi y - \frac{\pi}{2}\right) = 2|x + 5| + 2, \\ \cos(\pi - \pi x) = 1 + |y - 2|. \end{cases}$$

3.3. Показникові та логарифмічні рівняння

Найпростіші завдання з повним розв'язанням

Рівняння 1–20 розв'яжіть УСНО.

1. $3^x = 9$.

11. $2^x = 3$.

2. $2^x = \sqrt[3]{2}$.

12. $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 5$.

3. $10^x = \sqrt[4]{10^3}$.

13. $\log_2 x = 3$.

4. $25^x = 5$.

14. $\log_3 x = -1$.

5. $4^x = \frac{1}{4}$.

15. $\log_5 x = 0$.

6. $7^x = \frac{1}{\sqrt{7}}$.

16. $\log_7 x = 1$.

7. $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 3$.

17. $\log_4 x = \frac{1}{2}$.

8. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 8$.

18. $\log_{\frac{1}{5}} x = -2$.

9. $6^x = 0$.

19. $\ln x = -\frac{1}{3}$.

10. $5^x = -5$.

20. $\lg x = \lg 8$.

Завдання з вибором однієї правильної відповіді

Проаналізуйте умови та вимоги завдань 21–50 та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

21. Укажіть корінь рівняння $4^x = 8$.

А	Б	В	Г	Д
$x = 2$	$x = \frac{1}{3}$	$x = \frac{2}{3}$	$x = \frac{3}{2}$	$x = 4$

22. Укажіть корінь рівняння $9^x = \sqrt{3}$.

А	Б	В	Г	Д
$x = \frac{1}{4}$	$x = \frac{1}{2}$	$x = \frac{1}{6}$	$x = 2$	$x = 6$

23. Знайдіть x , якщо $\left(\frac{3}{7}\right)^x = \frac{35}{15}$.

А	Б	В	Г	Д
$x = \frac{7}{3}$	$x = 5$	$x = -1$	$x = -5$	$x = 1$

24. Знайдіть x , якщо $\left(\frac{8}{5}\right)^x = \frac{32}{20}$.

А	Б	В	Г	Д
$x = -4$	$x = -1$	$x = 2$	$x = 1$	$x = 4$

25. Розв'яжіть рівняння $3^x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$.

А	Б	В	Г	Д
$x = -1,5$	$x = -0,5$	$x = 0,5$	$x = 1,5$	$x = 0$

26. Розв'яжіть рівняння $3^x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$.

А	Б	В	Г	Д
$x = -1,5$	$x = 1,5$	$x = -0,5$	$x = 0,5$	$x = 0$

27. Якому з наведених проміжків належить корінь рівняння $3^x = 12$?

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0]$	$(0; 1]$	$(1; 2]$	$(2; 3]$	$(3; +\infty)$

28. Якому з наведених проміжків належить корінь рівняння $5^x = 0,1$?

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -2]$	$(-2; -1]$	$(-1; 0]$	$(0; 1]$	$[1; +\infty)$

29. Розв'яжіть рівняння $4^x = \cos \pi$.

А	Б	В	Г	Д
$x = \log_4(\cos \pi)$	$x = \arccos \pi$	$x = \log_{\cos \pi} 4$	$x = \cos \frac{\pi}{4}$	Рівняння не має коренів

30. Розв'яжіть рівняння $2^x = \sin 4$.

А	Б	В	Г	Д
$x = \log_2(\sin 4)$	$x = \arcsin \frac{1}{2}$	$x = \log_{\sin 4} 2$	$x = \sin 2$	Рівняння не має коренів

31. Укажіть проміжок, якому належить корінь рівняння $2^{3x} \cdot 3 = 12$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(0; \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}; 1\right)$	$\left(1; \frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{2}; 3\right)$	$\left(3; \frac{20}{3}\right)$

32. Укажіть проміжок, якому належить корінь рівняння $4^x \cdot 5 = 45$.

А	Б	В	Г	Д
$(0; 1)$	$(1; 2)$	$(2; 3)$	$(3; 4)$	$(4; 5)$

33. Якому з наведених проміжків належить корінь рівняння $3^{x+3} + 5 \cdot 3^{x-1} = 86$?

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0)$	$[0; 1)$	$[1; 2)$	$[2; 3)$	$[3; +\infty)$

34. Якому з наведених проміжків належить корінь рівняння

$$7^x - 2 \cdot 7^{x-1} + 5 \cdot 7^{x-2} = 280?$$

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -2)$	$[-2; 0)$	$[0; 2)$	$[2; 4)$	$[4; +\infty)$

35. Розв'яжіть рівняння $\log_2(-x) = 4$.

А	Б	В	Г	Д
$x = -8$	$x = -16$	$x = -2$	$x = -6$	Рівняння не має коренів

36. Розв'яжіть рівняння $\log_3(1-x) = 0$.

А	Б	В	Г	Д
$x = 1$	$x = 0$	$x = -2$	$x = -3$	Рівняння не має коренів

37. Укажіть проміжок, якому належить **НАЙМЕНШИЙ** корінь рівняння $\log_3 x^2 = -2$.

А	Б	В	Г	Д
$[-3; -2]$	$[-2; -1]$	$[-1; 0]$	$[0; 1]$	$[1; 2]$

38. Укажіть проміжок, якому належить **НАЙМЕНШИЙ** корінь рівняння $\log_4 x^3 = 1$.

А	Б	В	Г	Д
$[-3; -2]$	$[-2; -1]$	$[-1; 1]$	$[1; 2]$	$[2; 3]$

39. Розв'яжіть рівняння $\lg(x^2 - x) = 1 - \lg 5$.

А	Б	В	Г	Д
Рівняння не має коренів	$\{-1; 2\}$	$\{-2; 1\}$	$\{0; 1\}$	$\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$

40. Розв'яжіть рівняння $\log_3(x^2 + 2x) = (\log_3 24) - 1$.

А	Б	В	Г	Д
Рівняння не має коренів	$\{-2; 4\}$	$\{-4; 2\}$	$\{-2; 0\}$	$\{-\sqrt{8}; \sqrt{8}\}$

41. Розв'яжіть рівняння $\ln(2^x - 30) = \ln 2$.

А	Б	В	Г	Д
$x = 5$	$x = 4$	$x = 16$	$x = 2$	$x = 6$

42. Розв'яжіть рівняння $\lg(4^{3x-1} - 3) = \lg 13$.

А	Б	В	Г	Д
$x = \frac{1}{3}$	$x = 3$	$x = 2$	$x = 1$	$x = \frac{1}{2}$

43. Розв'яжіть рівняння $8^{\log_8 x} = 8x$.

А	Б	В	Г	Д
$x = 1$	$x = 8$	$x = 0$	$x = \frac{1}{7}$	Рівняння не має коренів

44. Розв'яжіть рівняння $5^{\log_5(3x)} = 3x$.

А	Б	В	Г	Д
Рівняння не має коренів	$x = 0$	$x = 1$	$(0; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$

45. Розв'яжіть рівняння $\log_x 9 = 3$.

А	Б	В	Г	Д
$x = 3$	$x = 9^3$	$x = 3^9$	$x = \sqrt[3]{9}$	$x = \frac{1}{3}$

46. Розв'яжіть рівняння $\log_x 5 = 25$.

А	Б	В	Г	Д
$x = 5^{25}$	$x = \sqrt[25]{5}$	$x = \frac{1}{5}$	$x = \sqrt[5]{25}$	$x = 5$

47. Скільки коренів має рівняння $\log_{x^2} x = 1$?

А	Б	В	Г	Д
Жодного	Тільки один	Тільки два	Тільки три	Більше трьох

48. Скільки коренів має рівняння $\log_x x = 1$?

А	Б	В	Г	Д
Жодного	Тільки один	Тільки два	Тільки три	Більше трьох

49. Користуючись ескізом графіка функції $y = \text{arctg}x$ (рис. 7), укажіть проміжок, якому належить корінь рівняння $\log_2 x = \text{arctg}x$.

А		Б	
Указати неможливо, оскільки дане рівняння не має коренів		$(-\infty; -1)$	
В	Г	Д	
$(-1; 0)$	$(0; 1)$	$(1; +\infty)$	

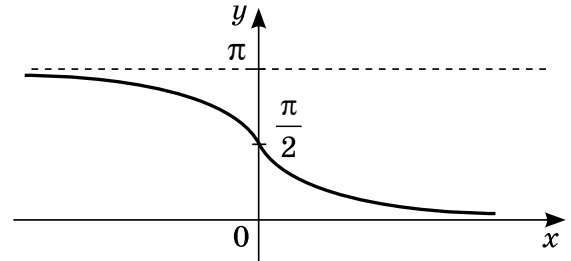


Рис. 7

50. Користуючись ескізом графіка функції $y = 1 - 3^{-|x|}$ (рис. 8), укажіть проміжок, якому належить корінь рівняння $\lg(-x) = 1 - 3^{-|x|}$.

А		Б	
Указати неможливо, оскільки дане рівняння не має коренів		$(-\infty; -1)$	
В	Г	Д	
$(-1; 0)$	$(0; 1)$	$(1; +\infty)$	

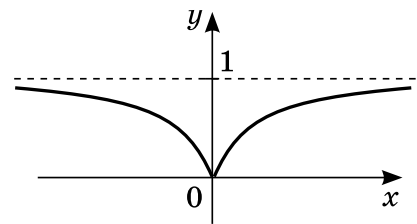


Рис. 8

У завданнях 51–54 сформульовано проблему (питання), яку потрібно розв'язати (отримати однозначну відповідь на питання), використовуючи для цього додаткові дані — твердження (1) і (2). Визначте, чи достатньо цих даних для розв'язання проблеми, і оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь*.

51. Знайдіть значення виразу $\frac{k}{m}$.
- (1) $5^m = 125$.
- (2) $7^k = 49^m$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

* Саму проблему розв'язувати не обов'язково.

52. Знайдіть значення виразу $a - b$.

(1) $\log_4 a = 2$.

(2) $\log_4^2 b = 1$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

53. Скільки коренів має рівняння $2^{x^2} = a$?

(1) $\arcsin a = \frac{\pi}{6}$.

(2) $\sin(\pi a) = 1$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

54. Скільки коренів має рівняння $\log_2(x - a) = 1$?

(1) $\arccos a = \frac{\pi}{2}$.

(2) $\cos(\pi a) = 1$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

У завданнях 55–56 порівняйте величини X і Y та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

55. Величина X : корінь рівняння $3^{\log_3 x} = x$.
 Величина Y : 0.

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

56. Величина X : Корінь рівняння $\log_x 3 \cdot \log_3 x = 1$.
 Величина Y : 1.

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

Завдання на встановлення відповідності

У завданнях 57–60 до кожного рядка, позначеного цифрою, доберіть один відповідник, позначений літерою.

57. Установіть відповідність між рівняннями (1–4) і твердженнями (А–Д) про кількість їх коренів, користуючись графіком функції $y = ||x| - 2|$ (рис. 9).

- 1 $||x| - 2| = 5^{-x}$
- 2 $||x| - 2| = \log_3 x$
- 3 $||x| - 2| = -\log_4 x$
- 4 $||x| - 2| = -3^x$

- А Рівняння не має коренів
- Б Рівняння має тільки один корінь
- В Рівняння має тільки два корені
- Г Рівняння має тільки три корені
- Д Рівняння має більше трьох коренів

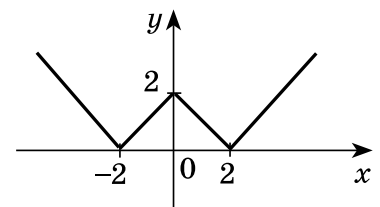


Рис. 9

58. Установіть відповідність між системами рівнянь (1–4) і твердженнями (А–Д) про кількість їх розв’язків, користуючись графіком рівняння $(x-1)^2 + (|y|-1)^2 = 1$ (рис. 10).

$$1 \quad \begin{cases} (x-1)^2 + (|y|-1)^2 = 1, \\ y = \log_2(-x) \end{cases}$$

$$2 \quad \begin{cases} (x-1)^2 + (|y|-1)^2 = 1, \\ y = \log_2 2^{x-1} \end{cases}$$

$$3 \quad \begin{cases} (x-1)^2 + (|y|-1)^2 = 1, \\ y = 2^{-x} \end{cases}$$

$$4 \quad \begin{cases} (x-1)^2 + (|y|-1)^2 = 1, \\ y = 2^{\log_2(x-1)} \end{cases}$$

- А Система рівнянь не має розв’язків
 Б Система рівнянь має тільки один розв’язок
 В Система рівнянь має тільки два розв’язки
 Г Система рівнянь має тільки три розв’язки
 Д Система рівнянь має більше трьох розв’язків

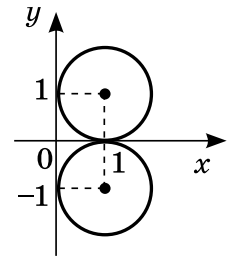


Рис. 10

59. Установіть відповідність між рівняннями (1–4) і числовими проміжками (А–Д), яким належать корені цих рівнянь.

$$1 \quad 3^x = 2$$

А $(-\infty; -1)$

$$2 \quad \left(\frac{1}{3}\right)^x = 2$$

Б $(-1; 0)$

$$3 \quad 2^x = \frac{1}{3}$$

В $(0; 1)$

$$4 \quad 2^x = 3$$

Г $(1; 2)$

Д $(2; +\infty)$

60. Установіть відповідність між рівняннями (1–4) і числовими проміжками (А–Д), яким належать корені цих рівнянь.

$$1 \quad \log_2 x = \frac{1}{2}$$

А $\left(0; \frac{1}{2}\right)$

$$2 \quad \log_{\frac{1}{2}} x = -2$$

Б $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$

$$3 \quad \log_3 x = -1$$

В $\left(1; \frac{3}{2}\right)$

$$4 \quad \log_{\frac{1}{3}} x = -\frac{1}{2}$$

Г $\left(\frac{3}{2}; 3\right)$

Д $(3; +\infty)$

Завдання на встановлення послідовності

У завданнях 61–62 виберіть тільки необхідні для розв'язання поставленої задачі дії і розмістіть їх у правильній послідовності. У відповідь запишіть отриману послідовність літер.

61. Як розв'язати рівняння $\log_{g(x)} f(x) = 2$?

А Записати ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$

Б Записати ОДЗ: $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

В Записати ОДЗ: $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1. \end{cases}$

Г Знайти всі корені рівняння $2^{g(x)} = f(x)$.

Д Знайти всі корені рівняння $(g(x))^2 = f(x)$.

Е Записати у відповідь тільки ті корені розв'язаного рівняння, що належать ОДЗ, або зробити висновок, що таких коренів не існує.

62. Як розв'язати рівняння $3^{f(x)} = g(x)$?

А Записати ОДЗ: $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Б Записати ОДЗ: $g(x) > 0$.

В Записати ОДЗ: $f(x) > 0$.

Г Знайти всі корені рівняння $f(x) = \log_3(g(x))$.

Д Знайти всі корені рівняння $g(x) = \log_3(f(x))$.

Е Знайти всі корені рівняння $f(x) = \sqrt[3]{g(x)}$.

Є Записати у відповідь тільки ті корені розв'язаного рівняння, що належать ОДЗ, або зробити висновок, що таких коренів не існує.

Завдання з короткою відповіддю

Розв'яжіть завдання 63–92 і запишіть відповідь **ОДНИМ ЧИСЛОМ**.

63. Розв'яжіть рівняння $2^{x+1} + 3 \cdot 2^x = 80\sqrt{2}$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть ЙОГО у відповідь; якщо рівняння має кілька коренів, то запишіть у відповідь їх **ДОБУТОК**.

64. Розв'яжіть рівняння $3^{x+3} - 17 \cdot 3^x = 810\sqrt[5]{3}$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть ЙОГО у відповідь; якщо рівняння має кілька коренів, то запишіть у відповідь їх ДОБУТОК.
65. Розв'яжіть рівняння $5 \cdot 5^{2x} = 6 \cdot 5^x - 1$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть ЙОГО у відповідь; якщо рівняння має кілька коренів, то запишіть у відповідь НАЙМЕНШИЙ із них.
66. Розв'яжіть рівняння $36^x - 5 \cdot 6^x - 6 = 0$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть ЙОГО у відповідь; якщо рівняння має кілька коренів, то запишіть у відповідь НАЙБІЛЬШИЙ із них.
67. Розв'яжіть рівняння $5 \cdot 4^x - 7 \cdot 10^x + 2 \cdot 25^x = 0$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть ЙОГО у відповідь; якщо рівняння має кілька коренів, то запишіть у відповідь їх ДОБУТОК.
68. Розв'яжіть рівняння $81 \cdot 9^x - 78 \cdot 6^x + 16 \cdot 4^x = 0$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть ЙОГО у відповідь; якщо рівняння має кілька коренів, то запишіть у відповідь їх СУМУ.
69. Розв'яжіть рівняння $\log_8(x^2 - 225) - \log_8(x + 15) = 2$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть ЙОГО у відповідь; якщо рівняння має кілька коренів, то запишіть у відповідь їх СУМУ.
70. Розв'яжіть рівняння $\log_5(x + 6) - \log_5(x^2 - 36) = 1$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть ЙОГО у відповідь; якщо рівняння має кілька коренів, то запишіть у відповідь їх СУМУ.
71. Розв'яжіть рівняння $\log_6(x - 4) + \log_6(x + 1) = 1$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть ЙОГО у відповідь; якщо рівняння має кілька коренів, то запишіть у відповідь їх СУМУ.
72. Розв'яжіть рівняння $\log_2(x + 3) + \log_2(x + 6) = 2$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть ЙОГО у відповідь; якщо рівняння має кілька коренів, то запишіть у відповідь їх ДОБУТОК.
73. Розв'яжіть рівняння $\log_3(3x - 15) \cdot \log_x 3 = 1$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть ЙОГО у відповідь; якщо рівняння має кілька коренів, то запишіть у відповідь їх СУМУ.

74. Розв'яжіть рівняння $\log_4(7x+8) \cdot \log_{x^2} 4 = 1$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть ЙОГО у відповідь; якщо рівняння має кілька коренів, то запишіть у відповідь їх СУМУ.
75. Розв'яжіть рівняння $\log_{x+5}(x^2 - x - 30) = 1$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть ЙОГО у відповідь; якщо рівняння має кілька коренів, то запишіть у відповідь їх ДОБУТОК.
76. Розв'яжіть рівняння $\log_{27-x}(x^2 - 6x - 9) = 1$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть ЙОГО у відповідь; якщо рівняння має кілька коренів, то запишіть у відповідь їх ДОБУТОК.
77. Розв'яжіть рівняння $\log_2^2 x + \log_2 x^2 = 15$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть ЙОГО у відповідь; якщо рівняння має кілька коренів, то запишіть у відповідь їх ДОБУТОК.
78. Розв'яжіть рівняння $\log_9^2 x = \log_9 x^2 + 8$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть ЙОГО у відповідь; якщо рівняння має кілька коренів, то запишіть у відповідь їх ДОБУТОК.
79. Розв'яжіть рівняння $\log_3 x + \log_x \frac{1}{9} = 1$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть ЙОГО у відповідь; якщо рівняння має кілька коренів, то запишіть у відповідь їх ДОБУТОК.
80. Розв'яжіть рівняння $\log_5 x + \log_x 25 = \operatorname{tg}^2 \frac{25\pi}{3}$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть ЙОГО у відповідь; якщо рівняння має кілька коренів, то запишіть у відповідь їх ДОБУТОК.
81. На рис. 11 зображено графік функції $y = f(x)$ на проміжку $[-4; 4]$. Скільки коренів на цьому проміжку має рівняння $2^{f(x)} = \frac{1}{2}$?

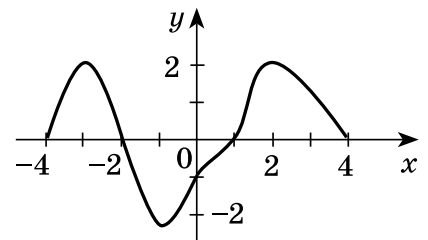


Рис. 11

82. На рис. 12 зображено графік функції $y = g(x)$ на проміжку $[-4; 4]$. Скільки коренів на цьому проміжку має рівняння $\log_3(g(x)) = -2$?

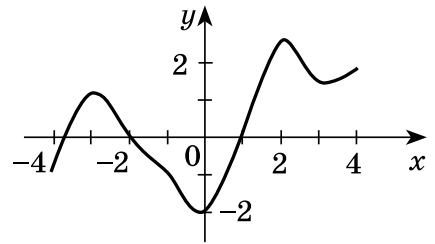


Рис. 12

83. Знайдіть СУМУ $x_0 + y_0$, якщо $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи рівнянь
- $$\begin{cases} \log_{\frac{1}{9}}(3x + y) = -2, \\ \log_5(x - y) = 2. \end{cases}$$
84. Знайдіть ДОБУТОК $x_0 \cdot y_0$, якщо $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи рівнянь
- $$\begin{cases} \log_3(x + 4y) = 2, \\ \log_{\frac{2}{15}}(2x + y) = -1. \end{cases}$$
85. Знайдіть ДОБУТОК $x_0 \cdot y_0$, якщо $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи рівнянь
- $$\begin{cases} 8^{x+y} = 64, \\ \log_8(\log_3 x - \log_3 y) = 0. \end{cases}$$
86. Знайдіть ЧАСТКУ $\frac{x_0}{y_0}$, якщо $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи рівнянь
- $$\begin{cases} 2^{x+2y} = 2\sqrt{2}, \\ \log_2(\log_{25}(-x) + \log_{25} y) = -1. \end{cases}$$
87. Розв'яжіть рівняння $7^{\sqrt{9-8x}} = \frac{1}{7^x}$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть ЙОГО у відповідь; якщо рівняння має кілька коренів, то запишіть у відповідь їх СУМУ.
88. Розв'яжіть рівняння $2^{\sqrt{3x^2-12x+13}} = \frac{1}{4^x}$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть ЙОГО у відповідь; якщо рівняння має кілька коренів, то запишіть у відповідь їх СУМУ.

89. Розв'яжіть рівняння $x^{\log_3 x} = \frac{x^4}{27}$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть ЙОГО у відповідь; якщо рівняння має кілька коренів, то запишіть у відповідь НАЙБІЛЬШИЙ із них.
90. Розв'яжіть рівняння $(\sqrt{x})^{(\log_5 x)-1} = 5$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть ЙОГО у відповідь; якщо рівняння має кілька коренів, то запишіть у відповідь їх СУМУ.
91. Укажіть КІЛЬКІСТЬ коренів рівняння $\log_{\sin x} \left(\frac{1}{4} \right) = 2$, які належать відрізку $[-3\pi; 4\pi]$.
92. Укажіть КІЛЬКІСТЬ коренів рівняння $\log_{\cos x} \left(\frac{1}{5} \right) = 5$, які належать відрізку $\left[0; \frac{5\pi}{2} \right]$.

Завдання з повним розв'язанням

Завдання 93–100 розв'яжіть із повним обґрунтуванням, посилаючись на відповідні означення, твердження, формули. У разі потреби проілюструйте розв'язання таблицями, діаграмами, графіками тощо.

93. Розв'яжіть рівняння:
а) $6^x - 6^{x-1} = 5^{x-1} - 4 \cdot 5^x + 5^{x+1}$; б) $3^{x+1} - 2^{x+5} = 3^x - 55 \cdot 2^{x-1}$.
94. Розв'яжіть рівняння:
а) $\log_2^2(8x^2) = 12 \log_2(x^2)$; б) $(\lg x)^2 \cdot \log_x(100x^2) = 4$.
95. Розв'яжіть рівняння:
а) $\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^x = 14$; б) $\left(15-4\sqrt{14}\right)^{\frac{x}{4}} + \left(15+4\sqrt{14}\right)^{\frac{x}{4}} = 30$.

96. Розв'яжіть рівняння:

а) $|x-3|^{3x^2-10x+3} = 1;$

б) $|x+2|^{2x^2+5x+2} = 1.$

97. Розв'яжіть рівняння:

а) $\log_2^2 x - (1-x)\log_2 x + 2x = 6;$

б) $3^{2x} + (x-14) \cdot 3^x = 3x - 33.$

98. Розв'яжіть рівняння:

а) $81^{\sin^2 x} + 81^{\cos^2 x} = 30;$

б) $5^{1+4\sin x \cos x} + 24 \cdot 5^{\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)} - 5 = 0.$

99. Розв'яжіть систему рівнянь:

а)
$$\begin{cases} 2^{\frac{x+y}{3}} + 2^{\frac{x+y}{6}} = 6, \\ \log_3(x-2y) + \log_3(2x-y) = 3; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 3^y \cdot 9^x = 81, \\ \lg(x+y)^2 - \lg x = 2\lg 3. \end{cases}$$

100. Розв'яжіть систему рівнянь:

а)
$$\begin{cases} x + \log_5 x = y + \log_5 y, \\ \left(\frac{7}{20}\right)^{5-\frac{7}{\sqrt{x}}} = \left(\frac{20}{7}\right)^{\frac{5}{\sqrt{y}}+3}; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} x + 3^x = y + 3^y, \\ \left(\frac{13}{15}\right)^{y+\frac{2}{\sqrt{x}}} = \left(\frac{15}{13}\right)^{\frac{5}{\sqrt{y}}-x-1}. \end{cases}$$

Розділ 4. НЕРІВНОСТІ ТА СИСТЕМИ НЕРІВНОСТЕЙ

4.1. Цілі та дробові раціональні нерівності

Найпростіші завдання з повним розв'язанням

Нерівності 1–20 розв'яжіть УСНО.

- | | |
|--------------------------------|--|
| 1. $x + 8 > 0$. | 12. $\frac{-2x}{5} < 2$. |
| 2. $x - 2 \square 0$. | 13. $\frac{1}{x^3} \square 0$. |
| 3. $x - 7 \square -2$. | 14. $\frac{-1}{x^4} \square 0$. |
| 4. $x + 10 < 4$. | 15. $\frac{x+1}{x+1} < 1$. |
| 5. $-x + 5 > 0$. | 16. $\frac{x}{4x} \square \frac{1}{4}$. |
| 6. $-x - 3 \square 0$. | 17. $ x < 2$. |
| 7. $2x > 6$. | 18. $ x > -3$. |
| 8. $\frac{1}{3}x \square 4$. | 19. $ x \square -5$. |
| 9. $-3x \square 9$. | 20. $ x \square 4$. |
| 10. $-5x < -10$. | |
| 11. $\frac{-x}{4} \square 5$. | |

Завдання з вибором однієї правильної відповіді

Проаналізуйте умови та вимоги завдань 21–50 та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

21. Відомо, що $m > 2k$. Укажіть значення параметрів m і k , які задовольняють цю нерівність.

А	Б	В	Г	Д
$m = 300,$ $k = 200$	$m = 200,$ $k = 100$	$m = 400,$ $k = 300$	$m = 100,$ $k = 200$	$m = 300,$ $k = 100$

22. Відомо, що $3a > b$. Укажіть значення параметрів a і b , які задовольняють цю нерівність.

А	Б	В	Г	Д
$a = 30,$ $b = 100$	$a = 10,$ $b = 30$	$a = 50,$ $b = 50$	$a = 20,$ $b = 60$	$a = 40,$ $b = 140$

23. Якщо для трьох додатних дійсних чисел a, b, c виконуються рівності $a = 3b$ і $b = \frac{1}{2}c$, то **ОБОВ'ЯЗКОВО...**

А	Б	В	Г	Д
$a < b$	$a > b + c$	$b > c$	$a < b + c$	$a > c$

24. Якщо для трьох від'ємних дійсних чисел k, m, p виконуються рівності $k = 3p$ і $p = 2m$, то **ОБОВ'ЯЗКОВО...**

А	Б	В	Г	Д
$k < m$	$p < m + k$	$p < k$	$p > m$	$k > m$

25. Якщо $\frac{ab+b}{b} > 1$, то **ОБОВ'ЯЗКОВО...**

А	Б	В	Г	Д
$a > 0$	$a > \frac{1}{2}$	$a > 1$	$a > \frac{3}{2}$	$a > 2$

26. Якщо $\frac{xy-2y}{y} < 0$, то **ОБОВ'ЯЗКОВО...**

А	Б	В	Г	Д
$x < 0$	$x < 2$	$x < -2$	$x > 2$	$x > 0$

27. Поліграфічна фірма виготовляє рекламні плакати прямокутної форми розміром a м \times b м. Укажіть, у яких межах знаходиться площа S (у м²) одного такого плаката, якщо потужності фірми такі, що $2 \leq a \leq 3$, $4 \leq b \leq 5$.

А	Б	В	Г	Д
$6 \leq S \leq 20$	$6 \leq S \leq 8$	$8 \leq S \leq 15$	$10 \leq S \leq 12$	$8 \leq S \leq 20$

28. Автоматичний станок штампує квадратні пластикові заготовки під сувернірні магніти. Сторона такої заготовки дорівнює c см. Укажіть, у яких межах знаходиться її периметр P (у см), якщо налаштування станка такі, що $5 \leq c \leq 20$.

А	Б	В	Г	Д
$15 \leq P \leq 60$	$20 \leq P \leq 80$	$10 \leq P \leq 40$	$25 \leq P \leq 400$	$20 \leq P \leq 100$

29. На рис. 1 зображено графік функції

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in (-\infty; 2], \\ 3 - x, & \text{якщо } x \in (2; +\infty). \end{cases} \quad \text{Розв'яжіть}$$

нерівність $f(x) < 1$.

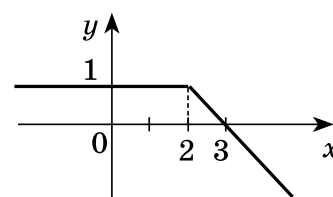


Рис. 1

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; +\infty)$	$(2; +\infty)$	$(2; 3)$	$(3; +\infty)$	Нерівність не має розв'язків

30. Користуючись рис. 1, розв'яжіть нерівність $f(x) \leq 0$.

А	Б	В	Г	Д
$[0; 1]$	$[1; +\infty)$	$(-\infty; 2]$	$(-\infty; 3]$	Нерівність не має розв'язків

31. На якому рисунку зображено множину розв'язків нерівності $x + y \leq 0$?

А	Б	В	Г	Д

32. На якому рисунку зображено множину розв'язків нерівності $x - y \leq 0$?

А	Б	В	Г	Д

33. Розв'яжіть нерівність $x \cdot \operatorname{ctg} 130^\circ < \operatorname{ctg} 130^\circ$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 1)$	$(-1; +\infty)$	$(-\infty; \operatorname{ctg}^2 130^\circ)$	$(-\infty; -1)$	$(1; +\infty)$

34. Розв'яжіть нерівність $(\cos 100^\circ) \cdot x > \sin 100^\circ$.

А	Б	В	Г	Д
Нерівність не має розв'язків	$(-\infty; \operatorname{tg} 100^\circ)$	$(\operatorname{tg} 100^\circ; +\infty)$	$(-\infty; -\operatorname{tg} 100^\circ)$	$(-\operatorname{tg} 100^\circ; +\infty)$

35. На рис. 2 зображено множину розв'язків нерівності $ax^2 + bx + c \square 0$. Визначте знаки параметрів a і b , якщо це можливо.

А	Б	В	Г	Д
$\begin{cases} a > 0, \\ b < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a > 0, \\ b > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a < 0, \\ b < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a < 0, \\ b > 0 \end{cases}$	Визначити неможливо

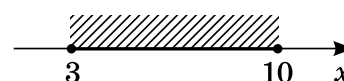


Рис. 2

36. На рис. 3 зображено множину розв'язків нерівності $ax^2 + bx + c \square 0$. Визначте знаки параметрів a і b , якщо це можливо.

А	Б	В	Г	Д
$\begin{cases} a > 0, \\ b < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a > 0, \\ b > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a < 0, \\ b < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a < 0, \\ b > 0 \end{cases}$	Визначити неможливо

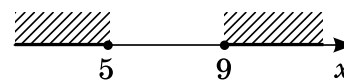


Рис. 3

37. Розв'яжіть нерівність $x^3 > 2x^2$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 2)$	$(2; +\infty)$	$(0; 2)$	$(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$	$(0; +\infty)$

38. Розв'яжіть нерівність $x^4 < 2x^3$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 2)$	$(2; +\infty)$	$(0; 2)$	$(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$	$(-\infty; 0)$

39. Укажіть нерівність, множиною розв'язків якої є проміжок $[-2; 4]$.

А	Б	В	Г	Д
$ x-1 \square 3$	$ x \square 2$	$ x+1 \square 3$	$ x \square 4$	$ x-2 \square 4$

Розділ 4. Нерівності та системи нерівностей

40. Укажіть нерівність, множиною розв'язків якої є проміжок $[-1; 3]$.

А	Б	В	Г	Д
$ x \leq 3$	$ x \leq 1$	$ x+1 \leq 2$	$ x-1 \leq 2$	$ x-2 \leq 3$

41. Розв'яжіть нерівність $(x-1)|x+3| < 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-3; 1)$	$(-\infty; 1)$	$(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$	$(1; +\infty)$	$(-\infty; -3) \cup (-3; 1)$

42. Розв'яжіть нерівність $(x+2)|x-1| > 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-2; 1) \cup (1; +\infty)$	$(-2; +\infty)$	$(-\infty; -2)$	$(-2; 1)$	$(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$

43. Розв'яжіть нерівність $\frac{\lg 0,5}{x} \leq 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0)$	$(0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	$(-\infty; 0]$

44. Розв'яжіть нерівність $\frac{\cos 3}{x} \leq 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0)$	$(0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	$(-\infty; 0]$

45. Розв'яжіть нерівність $\frac{4}{x} \leq x$.

А	Б	В	Г	Д
$[-2; 0) \cup [2; +\infty)$	$(-\infty; -2] \cup (0; 2]$	$[-2; 0) \cup (0; 2]$	$(-\infty; 2]$	$[2; +\infty)$

46. Розв'яжіть нерівність $\frac{4}{x^2} \leq 1$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -2] \cup (0; 2]$	$[-2; 0) \cup [2; +\infty)$	$(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$	$(-\infty; 2]$	$[-2; 0) \cup (0; 2]$

47. Розв'яжіть нерівність $\frac{x-2}{x} < 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$	$(-2; 0)$	$(-\infty; 0)$	$(0; 2)$	$(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$

48. Розв'яжіть нерівність $\frac{x}{x+5} > 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(0; +\infty)$	$(-5; 0)$	$(-\infty; -5) \cup (0; +\infty)$	$(0; 5)$	$(-\infty; 0) \cup (5; +\infty)$

49. Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} x^2 - x - 2 < 0, \\ -2x > 0. \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
$(-1; 2)$	$(0; 2)$	$(-1; 0)$	$(2; +\infty)$	$(-\infty; -1)$

50. Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} x^2 + 3x - 10 < 0, \\ -4x < 0. \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -5)$	$(-5; 0)$	$(-5; 2)$	$(0; 2)$	$(2; +\infty)$

У завданнях 51–54 сформульовано проблему (питання), яку потрібно розв'язати (отримати однозначну відповідь на питання), використовуючи для цього додаткові дані — твердження (1) і (2). Визначте, чи достатньо цих даних для розв'язання проблеми, і оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь*.

51. Знайдіть значення виразу $10x$.

(1) $x + 3 \square 0$.

(2) $|x + 3| \square 0$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

* Саму проблему розв'язувати не обов'язково.

52. Знайдіть значення виразу $5 - x$.

(1) $x + 7 \square 0$.

(2) $x + 7 \square 0$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

53. Що більше: x чи y ?

(1) $y > x - 2$.

(2) $y > 2x$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

54. Що більше: a чи b ?

(1) $3b > a$.

(2) $b > 3a$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

У завданнях 55–56 порівняйте величини X і Y та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

55. Відомо, що множиною розв'язків нерівності $ax > b$ є проміжок $(1; +\infty)$.

Величина X : значення параметра a .

Величина Y : значення параметра b .

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

56. Відомо, що множиною розв'язків нерівності $ax > b$ є проміжок $(-\infty; -1)$.
 Величина X : значення параметра a .
 Величина Y : значення параметра b .

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

Завдання на встановлення відповідності

У завданнях 57–60 до кожного рядка, позначеного цифрою, доберіть один відповідник, позначений літерою.

57. Установіть відповідність між нерівностями (1–4) і множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $(5-3) \cdot x \square 0$	А \emptyset
2 $(3-5) \cdot x \square 0$	Б $[0; +\infty)$
3 $(5-3) \cdot x^2 \square 0$	В $\{0\}$
4 $(3-5) \cdot x^2 \square 0$	Г $(-\infty; 0]$
	Д $(-\infty; +\infty)$

58. Установіть відповідність між нерівностями (1–4) і множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $x^2 - 100 < 0$	А $(-10; 10)$
2 $x - 10 < 0$	Б $(-\infty; -10) \cup (10; +\infty)$
3 $x^2 - 100 > 0$	В $(-\infty; 10)$
4 $x - 10 > 0$	Г $(10; +\infty)$
	Д $(0; 10)$

59. Установіть відповідність між нерівностями (1–4) і рівносильними їм нерівностями (А–Д).

1 $2x > 4$	А $-2 < x < 2$
2 $-2x > -4$	Б $x > -2$
3 $2x < -4$	В $x < -2$
4 $-2x < 4$	Г $x > 2$
	Д $x < 2$

60. Установіть відповідність між нерівностями (1–4) і рівносильними їм нерівностями (А–Д).

1 $|x| < 3$

2 $|x| > 3$

3 $|x| < -3$

4 $|x| > -3$

А $-x^2 < -9$

Б $-x^2 > 9$

В $x^2 > -9$

Г $x^2 > 9x$

Д $x^2 < 9$

Завдання на встановлення послідовності

У завданнях 61–62 виберіть тільки необхідні для розв’язання поставленої задачі дії і розмістіть їх у правильній послідовності. У відповідь запишіть отриману послідовність літер.

61. Як розв’язати нерівність $kx + b > 0$, якщо $k < 0$?

А Перейти до нерівності $kx > b$.

Б Перейти до нерівності $kx > -b$.

В Перейти до нерівності $kx < -b$.

Г Перейти до нерівності $x > \frac{b}{k}$.

Д Перейти до нерівності $x > \frac{-b}{k}$.

Е Перейти до нерівності $x < \frac{-b}{k}$.

Є Записати у відповідь проміжок $\left(-\infty; \frac{-b}{k}\right)$.

Ж Записати у відповідь проміжок $\left(\frac{b}{k}; +\infty\right)$.

З Записати у відповідь проміжок $\left(\frac{-b}{k}; +\infty\right)$.

62. Як розв'язати нерівність $x^2 + bx + c > 0$, якщо $D = b^2 - 4c > 0$?
- А Записати у відповідь проміжок $(-\infty; +\infty)$.
- Б Зробити висновок, що нерівність не має розв'язків.
- В Знайти корені рівняння $x^2 + bx + c = 0$ за формулами $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2}$,
 $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2}$.
- Г Знайти корені рівняння $x^2 + bx + c = 0$ за формулами $x_1 = \frac{b - \sqrt{D}}{2}$,
 $x_2 = \frac{b + \sqrt{D}}{2}$.
- Д Знайти корені рівняння $x^2 + bx + c = 0$ за формулами $x_1 = \frac{-b^2}{2}$, $x_2 = \frac{b^2}{2}$.
- Е Записати у відповідь проміжок $(x_1; x_2)$.
- Є Записати у відповідь проміжок $(x_2; +\infty)$.
- Ж Записати у відповідь проміжок $(-\infty; x_1)$.
- З Записати у відповідь об'єднання проміжків: $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.

Завдання з короткою відповіддю

Розв'яжіть завдання 63–92 і запишіть відповідь **ОДНИМ ЧИСЛОМ**.

63. Знайдіть **КІЛЬКІСТЬ ЦІЛИХ** розв'язків системи нерівностей
- $$\begin{cases} 5(x-3) + 11 > 3(x+3), \\ \frac{2x-1}{4} - \frac{x+3}{8} \square 4. \end{cases}$$
64. Знайдіть **НАЙБІЛЬШИЙ ЦІЛИЙ** розв'язок системи нерівностей
- $$\begin{cases} (x+3)(x-3) - 4x < x^2 - 7x + 3, \\ \frac{5x+3}{2} - 1 \square 3x. \end{cases}$$
65. Відомо, що розв'язком нерівності $35 \square 8x + 3 \square 91$ є проміжок $[a; b]$. Запишіть у відповідь значення виразу $b - a$.
66. Відомо, що розв'язком нерівності $125 \square 3x - 1 \square 317$ є проміжок $[c; d]$. Запишіть у відповідь значення виразу $d - c$.
67. Знайдіть значення параметра a , при якому розв'язком системи нерівностей
- $$\begin{cases} a \square x \square a + 20, \\ x \square 15 \end{cases}$$
- є проміжок, довжина якого дорівнює 17.

68. Знайдіть значення параметра b , при якому розв'язком системи нерівностей $\begin{cases} b - 30 \leq x \leq b, \\ x \leq 10 \end{cases}$ є проміжок, довжина якого дорівнює 25.
69. Розв'яжіть нерівність $2x^2 - 3x + 1 \leq 0$. Якщо розв'язком нерівності є проміжок скінченної довжини, то запишіть у відповідь цю ДОВЖИНУ, в іншому випадку запишіть у відповідь число 100.
70. Розв'яжіть нерівність $3 + 10x - 8x^2 \leq 0$. Якщо розв'язком нерівності є проміжок скінченної довжини, то запишіть у відповідь цю ДОВЖИНУ, в іншому випадку запишіть у відповідь число 100.
71. Знайдіть КІЛЬКІСТЬ ЦІЛИХ розв'язків нерівності $x^2 - 3x - 5 < 0$.
72. Знайдіть КІЛЬКІСТЬ ЦІЛИХ розв'язків нерівності $x^2 - 5x + 5 \leq 0$.
73. Розв'яжіть нерівність $(x - 4)^2(1 - x)(x + 2) \leq 0$. У відповідь запишіть СУМУ всіх її ЦІЛИХ розв'язків.
74. Розв'яжіть нерівність $(x^2 - 9)(x^2 - 2x - 8)(x^2 - 2x + 1) \leq 0$. У відповідь запишіть КІЛЬКІСТЬ усіх її ЦІЛИХ розв'язків.
75. Розв'яжіть нерівність $(x^2 + 3x - 28)(x^2 + 4x + 4) < 0$. У відповідь запишіть КІЛЬКІСТЬ усіх її ЦІЛИХ розв'язків.
76. Розв'яжіть нерівність $(x + 5)(x^2 - 16)(x + 2)(x - 1)(x - 3) < 0$. У відповідь запишіть СУМУ всіх її ЦІЛИХ розв'язків.
77. Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} (2x - 1)(4x - 3)(5x - 4) \leq 0, \\ 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$ Якщо розв'язком нерівності є один проміжок, то запишіть у відповідь його ДОВЖИНУ; якщо розв'язком нерівності є об'єднання кількох проміжків, то запишіть у відповідь СУМУ їх ДОВЖИН.
78. Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} (4x + 3)(3x + 2)(2x + 1) \leq 0, \\ -1 \leq x \leq 0. \end{cases}$ Якщо розв'язком нерівності є один проміжок, то запишіть у відповідь його ДОВЖИНУ; якщо розв'язком нерівності є об'єднання кількох проміжків, то запишіть у відповідь СУМУ їх ДОВЖИН.

79. Знайдіть КІЛЬКІСТЬ ЦІЛИХ розв'язків нерівності $(|x| - 9)(x + 10)^2 \square 0$.
80. Знайдіть КІЛЬКІСТЬ ЦІЛИХ розв'язків нерівності $|x + 13| \cdot (7 - |x|) \square 0$.
81. Знайдіть СУМУ всіх ЦІЛИХ розв'язків нерівності $|10 - 3x - x^2| \square 10 - 3x - x^2$.
82. Знайдіть СУМУ всіх ЦІЛИХ розв'язків нерівності $3 - 2x - x^2 \square |3 - 2x - x^2|$.
83. Розв'яжіть нерівність $\frac{x^3 + 5x^2}{x + 8} \square 0$. У відповідь запишіть СЕРЕДНЄ АРИФМЕТИЧНЕ всіх ЦІЛИХ розв'язків цієї нерівності.
84. Розв'яжіть нерівність $\frac{x^3 - x^2}{x - 3} \square 0$. У відповідь запишіть СЕРЕДНЄ АРИФМЕТИЧНЕ всіх ЦІЛИХ розв'язків цієї нерівності.
85. Розв'яжіть нерівність $\frac{(x - 12)(x^2 - 8x + 7)}{x - 7} \square 0$. У відповідь запишіть КІЛЬКІСТЬ ЦІЛИХ розв'язків цієї нерівності, які належать проміжку $[0; 15]$.
86. Розв'яжіть нерівність $\frac{(x + 2)(3 + 2x - x^2)}{x + 1} > 0$. У відповідь запишіть КІЛЬКІСТЬ ЦІЛИХ розв'язків цієї нерівності, які належать проміжку $[-5; 5]$.
87. Розв'яжіть нерівність $\frac{2x + 1}{2 - x} \square 1$. Якщо кількість цілих розв'язків нерівності скінченна, то запишіть у відповідь СУМУ всіх цих розв'язків; якщо кількість цілих розв'язків нескінченна, то запишіть у відповідь число 100.
88. Розв'яжіть нерівність $\frac{x^2 - x - 8}{x + 1} < x$. Якщо кількість цілих розв'язків нерівності скінченна, то запишіть у відповідь СУМУ всіх цих розв'язків; якщо кількість цілих розв'язків нескінченна, то запишіть у відповідь число 100.
89. Знайдіть СУМУ всіх ЦІЛИХ розв'язків нерівності $\frac{(x - 12)(x - 16)}{|x - 14|} < 0$.

90. Знайдіть СУМУ всіх ЦІЛИХ розв'язків нерівності $\frac{(x+9)(x+5)}{|x+7|} < 0$.
91. Обчисліть площу геометричної фігури, множина точок якої є множиною розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} |x| + |y| \leq 9, \\ y \leq -4. \end{cases}$
92. Обчисліть площу геометричної фігури, множина точок якої є множиною розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} |x| + |y| \leq 10, \\ x \leq 3. \end{cases}$

Завдання з повним розв'язанням

Завдання 93–100 розв'яжіть із повним обґрунтуванням, посилаючись на відповідні означення, твердження, формули. У разі потреби проілюструйте розв'язання таблицями, діаграмами, графіками тощо.

93. Розв'яжіть нерівність:
 а) $x^4 + 2x^3 + x^2 - 8(x^2 + x) + 12 > 0$; б) $(x^2 - 7x + 12)^2 - 6(x^2 - 7x + 13) + 6 \leq 0$.
94. Розв'яжіть нерівність:
 а) $|x + 1,5| - |x - 2,5| \leq 3$; б) $|2x + 7| + |3x - 5| < 4$.
95. Розв'яжіть нерівність:
 а) $\left| \frac{2x - 1}{x + 3} \right| < 4$; б) $\left| \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 1} \right| \leq 1$.
96. Знайдіть множину значень параметра c , при яких нерівність має розв'язок, і знайдіть цей розв'язок залежно від параметра:
 а) $|x - c| \leq 1 - x^2$; б) $x^2 + |x + c| - 2 \leq 0$.
97. Побудуйте в прямокутній декартовій системі координат множину E всіх точок, координати $(x; y)$ яких задовольняють нерівність $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq 64$ для випадку $a = 1$. Знайдіть усі значення параметра a , при яких площа отриманої фігури дорівнює 28π кв. од.
98. Побудуйте в прямокутній декартовій системі координат множину G всіх точок, координати $(x; y)$ яких задовольняють нерівність $100 \leq x^2 + y^2 \leq c^2$ для випадку $c = 11$. Знайдіть усі значення параметра c , при яких площа отриманої фігури дорівнює 96π кв. од.

99. Зобразіть у прямокутній декартовій системі координат множину розв'язків

$$\text{системи нерівностей } \begin{cases} x - 2y + 1 \leq 0, \\ x + y + 1 \leq 0, \\ x \leq 3. \end{cases} \quad \text{Якщо ця множина є обмеженою геометричною фігурою, то знайдіть її площу.}$$

тричною фігурою, то знайдіть її площу.

100. Зобразіть у прямокутній декартовій системі координат множину розв'язків

$$\text{системи нерівностей } \begin{cases} 2x + y - 2 \leq 0, \\ x - y - 1 \leq 0, \\ x \leq -2. \end{cases} \quad \text{Якщо ця множина є обмеженою геометричною фігурою, то знайдіть її площу.}$$

тричною фігурою, то знайдіть її площу.

4.2. Ірраціональні та тригонометричні нерівності

Найпростіші завдання з повним розв'язанням

Нерівності 1–20 розв'яжіть УСНО.

- | | |
|--------------------------------------|----------------------------------|
| 1. $\sqrt[4]{x} \leq -2$. | 11. $\sin x > 2$. |
| 2. $\sqrt[4]{x} \leq -3$. | 12. $\cos x \leq 3$. |
| 3. $\sqrt{x} > 4$. | 13. $\sin x \leq -3$. |
| 4. $\sqrt{x} < 5$. | 14. $\cos x < -2$. |
| 5. $\sqrt[3]{x} \leq -1$. | 15. $\sin x \leq 1$. |
| 6. $\sqrt[3]{x} < -2$. | 16. $\cos x \leq -1$. |
| 7. $\sqrt[3]{x} > 3$. | 17. $\sin x > 0$. |
| 8. $\sqrt[3]{x} \leq 4$. | 18. $\cos x \leq 0$. |
| 9. $\sqrt{x} < \sqrt{2}$. | 19. $\operatorname{tg} x > 0$. |
| 10. $\sqrt[3]{x} \leq \sqrt[3]{7}$. | 20. $\operatorname{ctg} x < 0$. |

Завдання з вибором однієї правильної відповіді

Проаналізуйте умови та вимоги завдань 21–50 та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

21. Розв'яжіть нерівність $5 > \sqrt{-x}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -25)$	$(-25; +\infty)$	$(-25; 0]$	$(-\infty; 25)$	Нерівність не має розв'язків

22. Розв'яжіть нерівність $3 < \sqrt{-x}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -9)$	$(-9; +\infty)$	$(-9; 0]$	$(-\infty; 9)$	Нерівність не має розв'язків

23. Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt{2 - \sqrt{x}}$.

А	Б	В	Г	Д
$[0; +\infty)$	$[0; 2]$	$[2; +\infty)$	$[0; 4]$	$[4; +\infty)$

24. Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt{2 + \sqrt{x}}$.

А	Б	В	Г	Д
$[0; +\infty)$	$[0; 2]$	$[2; +\infty)$	$[0; 4]$	$[4; +\infty)$

25. Розв'яжіть нерівність $\frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 3} \square 0$.

А	Б	В	Г	Д
$[0; +\infty)$	$[0; 9) \cup (9; +\infty)$	$[0; 3) \cup (3; +\infty)$	$(-\infty; 9) \cup (9; +\infty)$	$(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$

26. Розв'яжіть нерівність $\frac{3\sqrt{x} - 6}{\sqrt{x} - 2} > 0$.

А	Б	В	Г	Д
$[0; 4) \cup (4; +\infty)$	$(-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$	$[0; 2) \cup (2; +\infty)$	$(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$	$[0; +\infty)$

27. Розв'яжіть нерівність $x \cdot \sqrt{x-1} \square 0$.

А	Б	В	Г	Д
Нерівність не має розв'язків	$[0; 1]$	$(-\infty; 0]$	$[1; +\infty)$	$x = 1$

28. Розв'яжіть нерівність $x \cdot \sqrt{-(x+2)} > 0$.

А	Б	В	Г	Д
Нерівність не має розв'язків	$(-2; 0)$	$(0; +\infty)$	$(-\infty; -2)$	$x = -2$

29. Розв'яжіть нерівність $\frac{x}{\sqrt{x-6}} > 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 6) \cup (6; +\infty)$	$(0; +\infty)$	$(6; +\infty)$	$(0; 6) \cup (6; +\infty)$	$(0; 6)$

30. Розв'яжіть нерівність $\frac{\sqrt{x}}{x-5} > 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$	$(0; 5)$	$(0; +\infty)$	$(0; 5) \cup (5; +\infty)$	$(5; +\infty)$

31. На рис. 4 зображено ескізи графіків двох функцій:
 $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ і $g(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2$. Розв'яжіть нерівність $f(x) \square g(x)$.

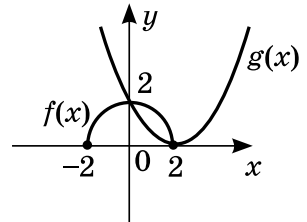


Рис. 4

А	Б	В	Г	Д
$[0; 2]$	$(-\infty; 0] \cup \{2\}$	$(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$	$[-2; 0] \cup \{2\}$	$[0; +\infty)$

32. На рис. 5 зображено ескізи графіків функцій $y = \sqrt{4-x}$ і $y = \sqrt[3]{x+8}$. Розв'яжіть нерівність $\sqrt[3]{x+8} \leq \sqrt{4-x}$.

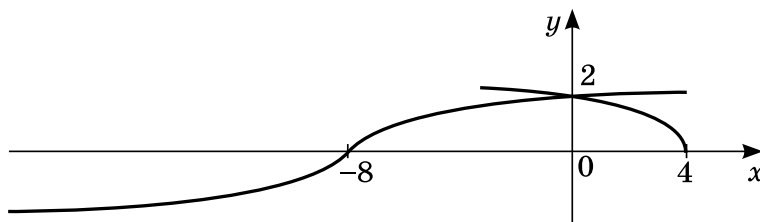


Рис. 5

А	Б	В	Г	Д
$[0; 4]$	$[2; +\infty)$	$(-\infty; 0]$	$[0; 2]$	$[0; +\infty)$

33. Укажіть проміжок, який містить хоча б один розв'язок нерівності $\operatorname{tg} x < 0$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$	$\left(-\pi; -\frac{3\pi}{4}\right)$	$\left(-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{2}\right)$

34. Укажіть проміжок, який містить хоча б один розв'язок нерівності $\operatorname{ctg} x > 0$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{4}; 0\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{4}; \pi\right)$

35. Розв'яжіть нерівність $\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

А	Б	В
$\left[\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$	$\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$	$\left[\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{11\pi}{6} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$
Г		Д
$\left[\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{9\pi}{4} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$		$\left[\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$

36. Розв'яжіть нерівність $\cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

А	Б	В
$\left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$	$\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{11\pi}{6} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$	$\left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$
Г		Д
$\left[\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$		$\left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$

37. Розв'яжіть нерівність $\operatorname{tg} x > -1$.

А	Б	В
$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; -\frac{\pi}{4} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$	$\left(-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$	$\left(-\frac{\pi}{4} + \pi n; \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$
Г		Д
$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$		$\left(-\pi + \pi n; -\frac{\pi}{4} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$

38. Розв'яжіть нерівність $\operatorname{ctg} x < \sqrt{3}$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(\pi n; \frac{\pi}{6} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$	$\left(\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$	$\left(\frac{\pi}{6} + \pi n; \pi + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$	$\left(\frac{\pi}{3} + \pi n; \pi + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$	$\left(\pi n; \frac{\pi}{3} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$

39. Скільки існує значень параметра a , при яких нерівність $\sin 3x \leq 1 + (a+2)^2$ має розв'язки?

А	Б	В	Г	Д
Жодного	Тільки одне	Тільки два	Тільки три	Більше трьох

40. Скільки існує значень параметра a , при яких нерівність $\cos 4x \leq -1 - (a^2 - 3)^2$ має розв'язки?

А	Б	В	Г	Д
Жодного	Тільки одне	Тільки два	Тільки три	Більше трьох

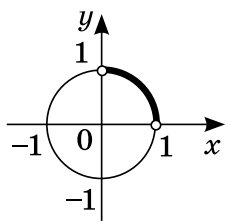
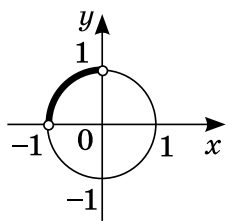
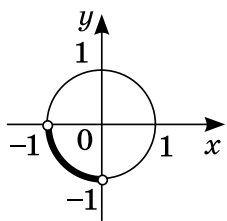
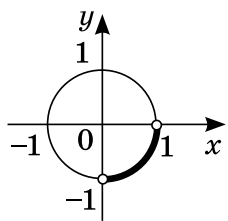
41. Укажіть нерівність, яка рівносильна нерівності $x(\cos x - 9) < 0$.

А	Б	В	Г	Д
$x < 0$	$\cos x < 9$	$0 < x < 9$	$\cos x > 9$	$x > 0$

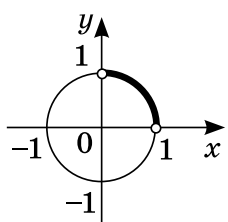
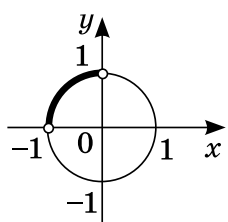
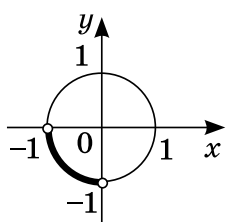
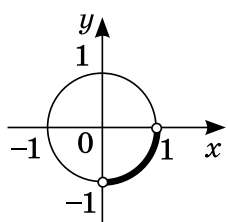
42. Укажіть нерівність, яка рівносильна нерівності $x(9 - \sin x) < 0$.

А	Б	В	Г	Д
$x < 0$	$\sin x < 9$	$0 < x < 9$	$\sin x > 9$	$x > 0$

43. Укажіть одиничне коло, на якому зображено розв'язок системи нерівностей $\begin{cases} \sin t < 0, \\ \cos t < 0, \end{cases}$ якщо ця система має розв'язки.

А	Б	В	Г	Д
Система нерівностей не має розв'язків				

44. Укажіть одиничне коло, на якому зображено розв'язок системи нерівностей $\begin{cases} \operatorname{tg} t > 0, \\ \operatorname{ctg} t < 0, \end{cases}$ якщо ця система має розв'язки.

А	Б	В	Г	Д
Система нерівностей не має розв'язків				

45. Укажіть нерівність, множиною розв'язків якої є проміжок $(-\infty; +\infty)$.

А	Б	В	Г	Д
$\cos x \square - 3$	$\operatorname{ctg} x \square - 3$	$\sin x \square 3$	$\operatorname{tg} x \square 3$	$\cos x \square 3$

4.2. Ірраціональні та тригонометричні нерівності

46. Укажіть нерівність, множиною розв'язків якої є проміжок $(-\infty; +\infty)$.

А	Б	В	Г	Д
$\cos x > 4$	$\operatorname{ctg} x < 4$	$\sin x > 4$	$\operatorname{tg} x < -4$	$\cos x > -4$

47. Розв'яжіть нерівність $\arccos x \square \arccos \frac{1}{5}$.

А	Б	В	Г	Д
$\left[\frac{1}{5}; +\infty\right)$	$\left[-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right]$	$\left[-1; \frac{1}{5}\right]$	$\left[\frac{1}{5}; 1\right]$	$\left(-\infty; \frac{1}{5}\right]$

48. Розв'яжіть нерівність $\arcsin x \square \arcsin \frac{1}{5}$.

А	Б	В	Г	Д
$\left[\frac{1}{5}; +\infty\right)$	$\left[-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right]$	$\left[-1; \frac{1}{5}\right]$	$\left[\frac{1}{5}; 1\right]$	$\left(-\infty; \frac{1}{5}\right]$

49. Укажіть нерівність, графічний метод розв'язування якої **МОЖЕ** бути проілюстрований на рис. 6.

А	Б	В
$\sin x \square \sqrt{x}$	$\cos x \square \sqrt{x}$	$\sqrt{x} \square 1$
Г		Д
$\cos x \square \sqrt{x}$		$\sin x \square \sqrt{x}$

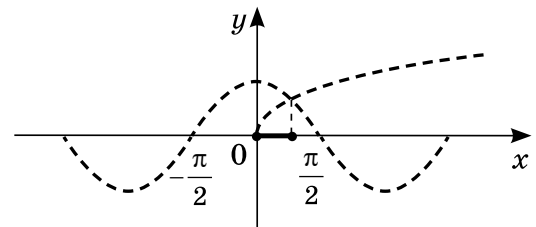


Рис. 6

50. Укажіть нерівність, графічний метод розв'язування якої **МОЖЕ** бути проілюстрований на рис. 7.

А	Б	В
$\operatorname{ctg} x \square \sqrt{x}$	$\operatorname{tg} x \square \sqrt{x}$	$\operatorname{ctg} x \square 1$
Г		Д
$\operatorname{tg} x \square \sqrt{x}$		$\operatorname{ctg} x \square \sqrt{x}$

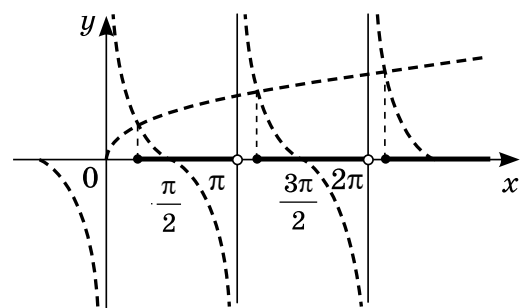


Рис. 7

У завданнях 51–54 сформульовано проблему (питання), яку потрібно розв’язати (отримати однозначну відповідь на питання), використовуючи для цього додаткові дані — твердження (1) і (2). Визначте, чи достатньо цих даних для розв’язання проблеми, і оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь*.

51. Яке число більше: a чи b ?

(1) $b < \sqrt{a}$. (2) $ab < 0$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

52. Відомо, що $x > 0$ і $y > 0$. Яке число більше: x чи y ?

(1) $\sqrt{x} > \sqrt{y}$. (2) $x^2 > y^2$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

53. Чи належить число x проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?

(1) $\cos x > 0$. (2) $\sin x < 0$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

54. Чи належить число b проміжку $(-1; 0)$?

(1) $\arcsin b < 0$. (2) $\arccos b > 0$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

* Саму проблему розв’язувати не обов’язково.

У завданнях 55–56 порівняйте величини X і Y та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

55. Величина X : довільний розв'язок нерівності $\sqrt{x^2} < 5$.
Величина Y : -4 .

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

56. Величина X : довільний розв'язок нерівності $(\sqrt{x})^2 < 5$.
Величина Y : -1 .

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

Завдання на встановлення відповідності

У завданнях 57–60 до кожного рядка, позначеного цифрою, доберіть один відповідник, позначений літерою.

57. Установіть відповідність між нерівностями (1–4) і множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\sqrt{x} \square -5$

2 $\sqrt{x} \square 5$

3 $\sqrt{x} \square -5$

4 $\sqrt{x} \square 5$

А \emptyset

Б $(-\infty; 25]$

В $[0; 25]$

Г $[0; +\infty)$

Д $[25; +\infty)$

58. Установіть відповідність між нерівностями (1–4) і множинами їх розв’язків (А–Д).

1	$\sqrt{3x} \square \sqrt{x+1}$	А	\emptyset
2	$\sqrt{3x} \square \sqrt{x+1}$	Б	$[0; +\infty)$
3	$\sqrt{3x} \square \sqrt{x-1}$	В	$[1; +\infty)$
4	$\sqrt{3x} \square \sqrt{x-1}$	Г	$\left[0; \frac{1}{2}\right]$
		Д	$\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$

59. Установіть відповідність між нерівностями (1–4) і проміжками (А–Д), які повністю містяться у множинах розв’язків цих нерівностей.

1	$\sin x < \frac{1}{2}$	А	$\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right)$
2	$\cos x < \frac{1}{2}$	Б	$\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right)$
3	$\sin x > \frac{1}{2}$	В	$\left(\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right)$
4	$\cos x > \frac{1}{2}$	Г	$\left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right)$
		Д	$\left(\frac{5\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}\right)$

60. Установіть відповідність між нерівностями (1–4) і проміжками (А–Д), які повністю містяться у множинах розв’язків цих нерівностей.

1	$\operatorname{tg} x > \frac{1}{\sqrt{3}}$	А	$\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$
2	$\operatorname{tg} x < \frac{1}{\sqrt{3}}$	Б	$\left(\frac{\pi}{3}; \pi\right)$
3	$\operatorname{ctg} x > \frac{1}{\sqrt{3}}$	В	$\left(\frac{\pi}{6}; \pi\right)$
4	$\operatorname{ctg} x < \frac{1}{\sqrt{3}}$	Г	$\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right)$
		Д	$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}\right)$

Завдання на встановлення послідовності

У завданнях 61–62 виберіть тільки необхідні для розв'язання поставленої задачі дії і розмістіть їх у правильній послідовності. У відповідь запишіть отриману послідовність літер.

- 61.** Як розв'язати нерівність $\sqrt{f(x)} \square g(x)$?
- А Знайти ОДЗ як розв'язок нерівності $f(x) \square 0$.
- Б Знайти ОДЗ як розв'язок нерівності $g(x) \square 0$.
- В Знайти ОДЗ як розв'язок системи нерівностей $\begin{cases} f(x) \square 0, \\ g(x) \square 0. \end{cases}$
- Г Розв'язати нерівність $f(x) \square g(x)$.
- Д Розв'язати нерівність $f(x) \square (g(x))^2$.
- Е Розв'язати нерівність $(f(x))^2 \square g(x)$.
- Є Записати відповідь, враховуючи ОДЗ.
- 62.** Як розв'язати нерівність $\sqrt[4]{f(x)} \square \sqrt{g(x)}$?
- А Піднести обидві частини нерівності до другого степеня.
- Б Піднести обидві частини нерівності до четвертого степеня.
- В Записати відповідь, враховуючи ОДЗ.
- Г Знайти ОДЗ як розв'язок нерівності $g(x) \square 0$.
- Д Знайти ОДЗ як розв'язок нерівності $f(x) \square 0$.
- Е Розв'язати нерівність $f(x) \square (g(x))^2$.
- Є Розв'язати нерівність $(f(x))^2 \square g(x)$.

Завдання з короткою відповіддю

Розв'яжіть завдання 63–92 і запишіть відповідь **ОДНИМ ЧИСЛОМ**.

- 63.** Розв'яжіть нерівність $\sqrt{2x-4} \square 3$. У відповідь запишіть **СУМУ** всіх **ЦІЛИХ** розв'язків цієї нерівності на проміжку $[-10; 10]$.
- 64.** Розв'яжіть нерівність $\sqrt{6-2x} \square 1$. У відповідь запишіть **СУМУ** всіх **ЦІЛИХ** розв'язків цієї нерівності на проміжку $[-5; 5]$.

65. Знайдіть СУМУ всіх ЦІЛИХ розв'язків нерівності $(\sqrt{5x})^2 < x + 40$.
66. Знайдіть СУМУ всіх ЦІЛИХ розв'язків нерівності $(\sqrt{-3x})^2 \square x + 16$.
67. Знайдіть значення параметра a , при якому проміжок $[50; +\infty)$ є множиною розв'язків нерівності $\sqrt{x-a} \square 4$.
68. Знайдіть значення параметра b , при якому проміжок $(-\infty; 81]$ є множиною розв'язків нерівності $\sqrt[3]{x+b} \square 3$.
69. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x^2-16} \square \sqrt{15x}$. У відповідь запишіть КІЛЬКІСТЬ ЦІЛИХ розв'язків цієї нерівності.
70. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x^2-36} \square \sqrt{5x}$. У відповідь запишіть КІЛЬКІСТЬ ЦІЛИХ розв'язків цієї нерівності.
71. Знайдіть НАЙМЕНШИЙ розв'язок нерівності $\sqrt{2x+1} \square x+2$.
72. Знайдіть НАЙБІЛЬШИЙ розв'язок нерівності $\sqrt{5-x} \square x+1$.
73. Знайдіть НАЙБІЛЬШИЙ ЦІЛИЙ розв'язок нерівності $\sqrt{2x^2-3x-5} \square x-1$.
74. Знайдіть КІЛЬКІСТЬ ЦІЛИХ розв'язків нерівності $\sqrt{7+6x-x^2} \square x-10$.
75. Розв'яжіть нерівність $(x^2-x-12) \cdot \sqrt{x} \square 0$. У відповідь запишіть КІЛЬКІСТЬ ЦІЛИХ розв'язків цієї нерівності на проміжку $(-9; 9)$.
76. Розв'яжіть нерівність $(x^2+x-12) \cdot \sqrt[3]{x} < 0$. У відповідь запишіть КІЛЬКІСТЬ ЦІЛИХ розв'язків цієї нерівності на проміжку $(-9; 9)$.
77. Знайдіть ДОВЖИНУ проміжка, що є розв'язком нерівності $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2} \square 6$.
78. Знайдіть КІЛЬКІСТЬ ЦІЛИХ розв'язків нерівності $\sqrt{x} \square 2\sqrt[4]{x} + 3$.
79. Знайдіть НАЙМЕНШИЙ НАТУРАЛЬНИЙ розв'язок нерівності $\operatorname{tg} t < 0$, де кут t вимірюється у градусах.

80. Знайдіть **НАЙМЕНШИЙ НАТУРАЛЬНИЙ** розв'язок нерівності $\operatorname{ctg} x < -0,1$.
81. Знайдіть **НАЙБІЛЬШИЙ ЦІЛИЙ ВІД'ЄМНИЙ** розв'язок нерівності $\cos x \square \frac{1}{2}$.
82. Знайдіть **НАЙМЕНШУ НАТУРАЛЬНУ** градусну міру кута α , для якого виконується нерівність $\sin \alpha < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
83. Знайдіть **НАЙМЕНШИЙ НАТУРАЛЬНИЙ** розв'язок нерівності $10 \sin x < 5\sqrt{2}$.
84. Знайдіть **НАЙМЕНШИЙ НАТУРАЛЬНИЙ** розв'язок нерівності $\sqrt{3} + 4 \cos t < 3\sqrt{3}$, де кут t вимірюється у градусах.
85. Розв'язком нерівності $\sin 3x \square \frac{1}{2}$ є об'єднання нескінченної кількості проміжків однакової довжини. Знайдіть цю довжину.
86. Розв'язком нерівності $\cos \frac{1}{3}x \square -\frac{1}{2}$ є об'єднання нескінченної кількості проміжків однакової довжини. Знайдіть цю довжину.
87. Розв'яжіть нерівність $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \square -\frac{1}{2}$. У відповідь запишіть **КІЛЬКІСТЬ ЦІЛИХ** розв'язків цієї нерівності на проміжку $[0; 2\pi]$.
88. Розв'яжіть нерівність $\cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right) \square -\frac{\sqrt{2}}{2}$. У відповідь запишіть **КІЛЬКІСТЬ ЦІЛИХ** розв'язків цієї нерівності на проміжку $[0; 10\pi]$.
89. Знайдіть **НАЙБІЛЬШИЙ ЦІЛИЙ** розв'язок нерівності $3 \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) < x + 38$.
90. Знайдіть **НАЙМЕНШИЙ ЦІЛИЙ** розв'язок нерівності $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) > 54 - x$.
91. Знайдіть **КІЛЬКІСТЬ ЦІЛИХ** розв'язків нерівності $\sin(\operatorname{arcsin}(|x| - 8)) \square 0$ на проміжку $[-15; 15]$.
92. Знайдіть **СУМУ** всіх **ЦІЛИХ** розв'язків нерівності $\cos(\operatorname{arccos}(x + 3)) \square 10$ на проміжку $[-15; 15]$.

Завдання з повним розв'язанням

Завдання 93–100 розв'яжіть із повним обґрунтуванням, посилаючись на відповідні означення, твердження, формули. У разі потреби проілюструйте розв'язання таблицями, діаграмами, графіками тощо.

93. Розв'яжіть нерівність:

а) $(x^2 - 9)\sqrt{x^2 + x - 2} \geq 0$;

б) $\frac{x^2 - 25}{\sqrt{x^2 - x - 12}} \geq 0$.

94. Розв'яжіть нерівність:

а) $\sqrt{x-6} - \sqrt{9-x} \geq 1$;

б) $\sqrt{x+1} + \sqrt{3x+1} > 8$.

95. Розв'яжіть нерівність:

а) $\sqrt{x+11-6\sqrt{x+2}} - \sqrt{x+3-2\sqrt{x+2}} \geq 1$;

б) $\sqrt{x+24-10\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} \geq 5$.

96. Розв'яжіть систему нерівностей:

а)
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x^2 - 2x + 1} + 4\sqrt[3]{x-1} + 4 \geq 0, \\ \sqrt[5]{x+8} + \sqrt[7]{2x+15} > \sqrt[9]{3x+22}; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{4+x}{4-x}} + \sqrt{\frac{4-x}{4+x}} \geq 2, \\ \sqrt[4]{16-7x} - \sqrt[6]{9x+64} < \sqrt[8]{x+1}. \end{cases}$$

97. Розв'яжіть нерівність:

а) $4\cos^4 x + 9\sin^2 x \geq 7$;

б) $\sin^2 x + \sin 2x - 3\cos^2 x \geq 0$.

98. Розв'яжіть нерівність:

а) $\sin x + \sqrt{3} \cos x > a$;

б) $\sqrt{2} \sin 3x + \sqrt{2} \cos 3x < a$.

99. Розв'яжіть нерівність:

а) $f(\sin 2x) \geq \frac{1}{2}$, якщо розв'язком нерівності $f(x) \geq \frac{1}{2}$ є проміжок $\left(-\frac{1}{2}; \sqrt{3}\right)$.

б) $g\left(\operatorname{ctg} \frac{x}{3}\right) \geq 1$, якщо розв'язком нерівності $g(x) \geq 1$ є проміжок $(-1; 4)$.

100. Розв'яжіть нерівність:

а) $\left|\cos x + \frac{1}{2}\right| + \left|\cos x - \frac{1}{2}\right| \geq 1$;

б) $|\operatorname{ctg} x + 1| + |\operatorname{ctg} x - 1| > 2$.

4.3. Показникові та логарифмічні нерівності

Найпростіші завдання з повним розв'язанням

Нерівності 1–20 розв'яжіть УСНО.

- | | |
|--|--|
| 1. $5^x < 5^8$. | 11. $0,2^x \square 0$. |
| 2. $\left(\frac{1}{7}\right)^x > \left(\frac{1}{7}\right)^6$. | 12. $0,3^x > 0$. |
| 3. $2^x \square 4$. | 13. $\log_3 x > \log_3 5$. |
| 4. $\left(\frac{1}{3}\right)^x \square \frac{1}{27}$. | 14. $\log_2 x < \log_2 7$. |
| 5. $4^x > 1$. | 15. $\log_{\frac{1}{8}} x < \log_{\frac{1}{8}} 10$. |
| 6. $2^x < \sqrt{2}$. | 16. $\log_{\frac{1}{4}} x > \log_{\frac{1}{4}} 11$. |
| 7. $\left(\frac{1}{10}\right)^x > 1$. | 17. $\log_2 x > 1$. |
| 8. $3^x \square \frac{1}{9}$. | 18. $\log_5 x < 2$. |
| 9. $10^x \square -1$. | 19. $\log_{0,3} x < 1$. |
| 10. $6^x < -6$. | 20. $\log_{\frac{1}{2}} x > 2$. |

Завдання з вибором однієї правильної відповіді

Проаналізуйте умови та вимоги завдань 21–50 та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

21. Розв'яжіть нерівність $0,5^{x+2} \square 0,25$.

А	Б	В	Г	Д
$[0; 2]$	$(-\infty; 0]$	$[-2; +\infty)$	$[0; +\infty)$	$(-\infty; -2]$

22. Розв'яжіть нерівність $0,4^{x-2} \square 0,16$.

А	Б	В	Г	Д
$[4; +\infty)$	$(-\infty; 4]$	$[0; 4]$	$[0; +\infty)$	$(-\infty; 0]$

Розділ 4. Нерівності та системи нерівностей

23. Розв'яжіть нерівність $\lg x < \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 10)$	$(-\infty; \frac{\pi}{4})$	$(0; 1)$	$(0; 10)$	$(0; \frac{\pi}{4})$

24. Розв'яжіть нерівність $\log_2 x > \sin \frac{\pi}{6}$.

А	Б	В	Г	Д
$(\frac{1}{2}; +\infty)$	$(-\infty; \sqrt{2})$	$(-1; +\infty)$	$(\sqrt{2}; +\infty)$	$(-\infty; \frac{1}{2})$

25. Розв'яжіть нерівність $3^x < (\frac{1}{3})^{-2}$.

А	Б	В	Г	Д
$(0; 2)$	$(-2; +\infty)$	$(2; +\infty)$	$(-\infty; -2)$	$(-\infty; 2)$

26. Розв'яжіть нерівність $(\frac{1}{6})^x < 6^{-1}$.

А	Б	В	Г	Д
$(1; +\infty)$	$(-1; +\infty)$	$(\frac{1}{6}; +\infty)$	$(-\infty; -1)$	$(-\infty; 1)$

27. Розв'яжіть нерівність $\log_2 x < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{5}$.

А	Б	В	Г	Д
$(0; 5)$	$(\frac{1}{5}; +\infty)$	$(5; +\infty)$	$(0; \frac{1}{5})$	$(-\infty; 5)$

28. Розв'яжіть нерівність $\log_{\frac{1}{6}} x > \log_6 \frac{1}{3}$.

А	Б	В	Г	Д
$(3; +\infty)$	$\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$	$(-\infty; 3)$	$\left(0; \frac{1}{3}\right)$	$(0; 3)$

29. Розв'яжіть нерівність $3 \cdot 0,1^x \square 0,03$.

А	Б	В	Г	Д
$[3; +\infty)$	$[2; +\infty)$	$(-\infty; 1]$	$(-\infty; 2]$	$(-\infty; 3]$

30. Розв'яжіть нерівність $2 \cdot 0,004 \square 0,2^x$.

А	Б	В	Г	Д
$[3; +\infty)$	$[2; +\infty)$	$[0,2; +\infty)$	$(-\infty; 2]$	$(-\infty; 3]$

31. Розв'яжіть нерівність $\log_{\frac{1}{8}} 4 \cdot \log_8 x < 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 8)$	$(1; +\infty)$	$(0; 1)$	$(-\infty; 1)$	$(8; +\infty)$

32. Розв'яжіть нерівність $\log_{\frac{1}{7}} 7 \cdot \log_7 x < \log_{\frac{1}{7}} 7$.

А	Б	В	Г	Д
$(0; 7)$	$(-\infty; 1)$	$(-\infty; 7)$	$(7; +\infty)$	$(0; 1)$

33. Розв'яжіть нерівність $2 \cdot 3^{-x} > 3^{-x}$.

А	Б	В	Г	Д
Нерівність не має розв'язків	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; -2)$	$(-2; +\infty)$	$(2; +\infty)$

34. Розв'яжіть нерівність $4^x > 5 \cdot 4^x$.

А	Б	В	Г	Д
Нерівність не має розв'язків	$(-\infty; +\infty)$	$(1; +\infty)$	$(-\infty; 1)$	$(4; +\infty)$

35. Знайдіть множину розв'язків нерівності $\log_9(x+3)^2 \leq 1$.

А	Б	В	Г	Д
$[-6; 0]$	$(-\infty; 0]$	$[-6; -3) \cup (-3; 0]$	$[0; +\infty)$	$(-\infty; -6) \cup (-3; 0]$

36. Знайдіть множину розв'язків нерівності $\log_{0,5}(x-2)^2 \leq \log_{0,5}(x+1)^2$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; -1) \cup (-1; 0,5]$	$[0,5; +\infty)$	$[0,5; 2) \cup (2; +\infty)$	$(-\infty; 0,5]$

37. Розв'яжіть нерівність $(0,9)^{x^2} > 0,9$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 1)$	$(-1; 1)$	$(-\infty; -1)$	$(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$	$(1; +\infty)$

38. Розв'яжіть нерівність $5^x > 5^{\frac{1}{x}}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -1) \cup (0; 1)$	$(-1; 1)$	$(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$	$(-1; 0) \cup (1; +\infty)$	$(1; +\infty)$

39. Розв'яжіть нерівність $(0,2)^{\log_{0,2}(1-x)} < \log_2 16$.

А	Б	В	Г	Д
$(-3; 1)$	$(-\infty; -3)$	$(-3; +\infty)$	$(-\infty; 1)$	Нерівність не має розв'язків

40. Розв'яжіть нерівність $5^{\log_5(1-x)} < \log_3 \frac{1}{3}$.

А	Б	В	Г	Д
$(1; 2)$	$(0; 1)$	$(-\infty; 2)$	$(2; +\infty)$	Нерівність не має розв'язків

41. Розв'яжіть нерівність $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_7 x} \leq 1$.

А	Б	В	Г	Д
$(0; 1]$	$[1; +\infty)$	$(-\infty; 1]$	$[\sqrt{7}; +\infty)$	$(0; \sqrt{7})$

42. Розв'яжіть нерівність $3^{\log_{0,5} x} > 1$.

А	Б	В	Г	Д
$(1; +\infty)$	$(0; 1)$	$(-\infty; 1)$	$(0,125; +\infty)$	$(0; 0,125)$

43. Розв'яжіть нерівність $\log_x x^2 \square 2$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(0; 1) \cup (1; +\infty)$	$(0; 1)$	$(1; +\infty)$

44. Розв'яжіть нерівність $\log_x x \square 1$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; +\infty)$	$(0; +\infty)$	$(0; 1)$	$(1; +\infty)$	$(0; 1) \cup (1; +\infty)$

45. За ескізом графіка спадної на проміжку $(-\infty; +\infty)$ функції $y = f(x)$ (рис. 8) розв'яжіть нерівність $2^{f(x)} \square 8$.

А	Б	В	Г	Д
$[0; 8]$	$(-\infty; 0]$	$[0; +\infty)$	$(-\infty; 3]$	$[3; +\infty)$

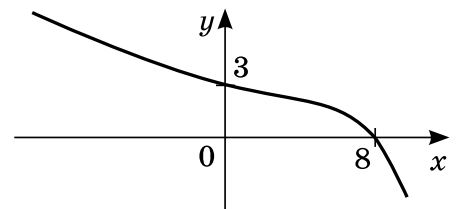


Рис. 8

46. За ескізом графіка зростаючої на проміжку $(-\infty; +\infty)$ функції $y = g(x)$ (рис. 9) розв'яжіть нерівність $\left(\frac{1}{3}\right)^{g(x)} \square 3$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -1]$	$(-\infty; 0]$	$[0; +\infty)$	$(-\infty; 3]$	$[3; +\infty)$

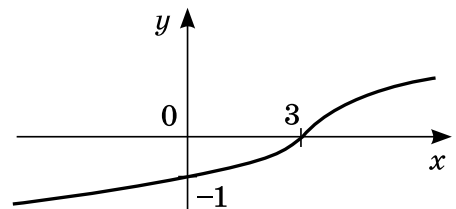


Рис. 9

47. За ескізом графіка зростаючої на проміжку $(-\infty; +\infty)$ функції $y = f(x)$ (рис. 10) розв'яжіть нерівність $\log_5(f(x)) < 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0)$	$(-\infty; 1)$	$(0; 1)$	$(-3; 0)$	$(0; +\infty)$

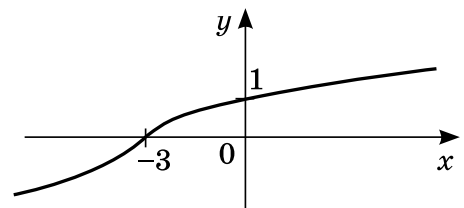


Рис. 10

48. За ескізом графіка спадної на проміжку $(-\infty; +\infty)$ функції $y = g(x)$ (рис. 11) розв'яжіть нерівність $\log_2(g(x)) < 1$.

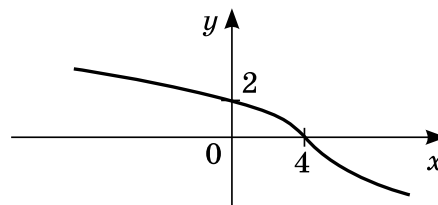


Рис. 11

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 2)$	$(-\infty; 1)$	$(0; 4)$	$(0; 1)$	$(0; 2)$

49. За ескізами графіків функцій $y = 3^x$ і $y = -3x + 6$ (рис. 12) розв'яжіть нерівність $3^x > -3x + 6$.

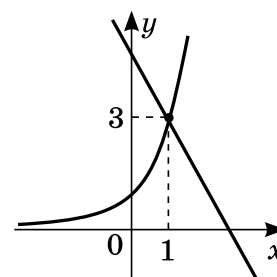


Рис. 12

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 3)$	$(-\infty; 1)$	$(0; 1)$	$(1; +\infty)$	$(3; +\infty)$

50. За ескізами графіків функцій $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ і $y = x + 3$ (рис. 13) розв'яжіть нерівність $\left(\frac{1}{2}\right)^x < x + 3$.

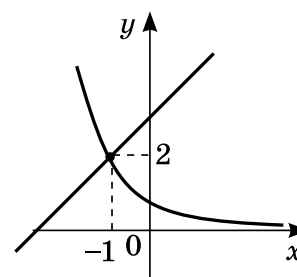


Рис. 13

А	Б	В	Г	Д
$(0; 2)$	$(-\infty; 2)$	$(-1; +\infty)$	$(2; +\infty)$	$(-\infty; -1)$

У завданнях 51–54 сформульовано проблему (питання), яку потрібно розв'язати (отримати однозначну відповідь на питання), використовуючи для цього додаткові дані — твердження (1) і (2). Визначте, чи достатньо цих даних для розв'язання проблеми, і оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь*.

51. Що більше: a чи b ?

(1) $b < 2^a$.

(2) $b < \log_2 a$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

* Саму проблему розв'язувати не обов'язково.

52. Що більше: x чи y ?

(1) $y > 3^x$. (2) $y < \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

53. Чи має розв'язки нерівність $5^x < a$?

(1) $a^2 < 5$. (2) $a^2 > 1$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

54. Чи має розв'язки нерівність $\log_3 x < b$?

(1) $b^2 < 3$. (2) $b^2 > 1$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

У завданнях 55–56 порівняйте величини X і Y та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

55. Проміжок $(-\infty; +\infty)$ є розв'язком нерівності $5^x > a$.

Величина X : значення параметра a .

Величина Y : 5^{-2} .

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

56. Проміжок $(9; +\infty)$ є розв'язком нерівності $\log_{\frac{1}{9}} x < \log_{\frac{1}{9}} b$.

Величина X : значення параметра b .

Величина Y : 9.

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

Завдання на встановлення відповідності

У завданнях 57–60 до кожного рядка, позначеного цифрою, доберіть один відповідник, позначений літерою.

57. Установіть відповідність між подвійними нерівностями (1–4) і множинами їх розв'язків (А–Д).

- | | |
|-------------------------|------------------|
| 1 $1 < 5^x < 125$ | А $(3; +\infty)$ |
| 2 $0 < 3^x < 27$ | Б $(1; 3)$ |
| 3 $2 < 2^x < 8$ | В $(0; 3)$ |
| 4 $0 < (0,1)^x < 0,001$ | Г $(2; 3)$ |
| | Д $(-\infty; 3)$ |

58. Установіть відповідність між подвійними нерівностями (1–4) і множинами їх розв'язків (А–Д).

- | | |
|--|---|
| 1 $1 \square \log_3 x \square 2$ | А $\left(0; \frac{1}{9}\right]$ |
| 2 $0 \square \log_9 x \square 1$ | Б $\left[\frac{1}{9}; \frac{1}{3}\right]$ |
| 3 $1 \square \log_{\frac{1}{3}} x \square 2$ | В $\left[\frac{1}{9}; 1\right]$ |
| 4 $0 \square \log_{\frac{1}{9}} x \square 1$ | Г $[1; 9]$ |
| | Д $[3; 9]$ |

59. Установіть відповідність між нерівностями (1–4) і множинами їх розв’язків (А–Д), користуючись ескізами графіків функцій $y = 10^x$, $y = \lg x$ і $y = 1 - x$ (рис. 14).

- | | | | |
|---|-----------------|---|----------------------|
| 1 | $10^x > \lg x$ | А | $(0; +\infty)$ |
| 2 | $10^x < 1 - x$ | Б | $(1; +\infty)$ |
| 3 | $\lg x > 1 - x$ | В | $(-\infty; +\infty)$ |
| 4 | $\lg x < 1 - x$ | Г | $(0; 1)$ |
| | | Д | $(-\infty; 0)$ |

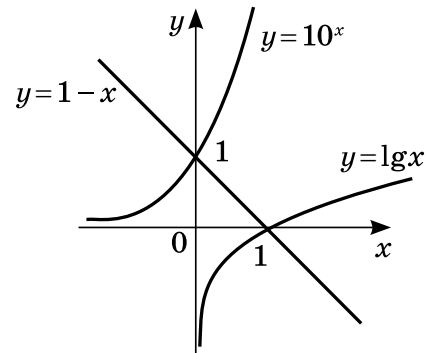


Рис. 14

60. Установіть відповідність між нерівностями (1–4) і множинами їх розв’язків (А–Д), користуючись ескізами графіків функцій $y = -\left(\frac{1}{4}\right)^x$, $y = \log_{\frac{1}{4}}(-x)$ і $y = -x - 1$ (рис. 15).

- | | | | |
|---|--|---|-----------------|
| 1 | $-\left(\frac{1}{4}\right)^x \square -x - 1$ | А | $(-\infty; 0]$ |
| 2 | $\log_{\frac{1}{4}}(-x) \square -x - 1$ | Б | $[-1; +\infty)$ |
| 3 | $\log_{\frac{1}{4}}(-x) \square -x - 1$ | В | $(-\infty; 0)$ |
| 4 | $\log_{\frac{1}{4}}(-x) \square -\left(\frac{1}{4}\right)^x$ | Г | $[-1; 0)$ |
| | | Д | $(-\infty; -1]$ |

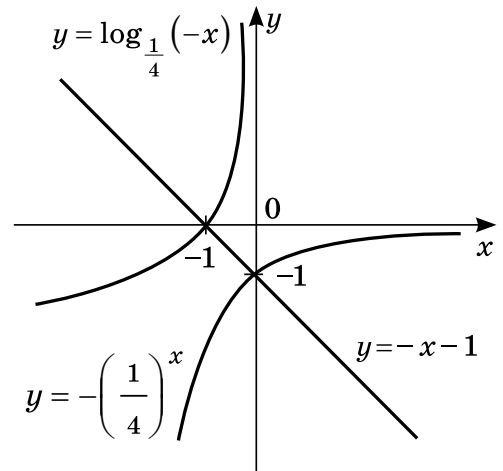


Рис. 15

Завдання на встановлення послідовності

У завданнях 61–62 виберіть тільки необхідні для розв’язання поставленої задачі дії і розмістіть їх у правильній послідовності. У відповідь запишіть отриману послідовність літер.

61. Як розв’язати нерівність $\log_{\frac{1}{3}} f(x) > g(x)$?
- А Записати відповідь, враховуючи ОДЗ.
 Б Знайти ОДЗ як розв’язок нерівності $f(x) > 0$.
 В Знайти ОДЗ як розв’язок нерівності $g(x) > 0$.
 Г Знайти ОДЗ як розв’язок системи нерівностей $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$
 Д Розв’язати нерівність $f(x) < \left(\frac{1}{3}\right)^{g(x)}$.
 Е Розв’язати нерівність $f(x) > \left(\frac{1}{3}\right)^{g(x)}$.
62. Як розв’язати нерівність $\log_4 h(x) + \log_4 g(x) < 1$?
- А Записати відповідь, враховуючи ОДЗ.
 Б Знайти ОДЗ як розв’язок нерівності $h(x) \cdot g(x) > 0$.
 В Знайти ОДЗ як розв’язок нерівності $h(x) + g(x) > 0$.
 Г Знайти ОДЗ як розв’язок системи нерівностей $\begin{cases} h(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$
 Д Розв’язати нерівність $h(x) \cdot g(x) < 1$.
 Е Розв’язати нерівність $h(x) \cdot g(x) < 4$.
 Є Розв’язати нерівність $h(x) + g(x) < 1$.
 Ж Розв’язати нерівність $h(x) + g(x) < 4$.

Завдання з короткою відповіддю

Розв’яжіть завдання 63–92 і запишіть відповідь **ОДНИМ ЧИСЛОМ**.

63. Знайдіть **НАЙМЕНШИЙ ЦІЛИЙ** розв’язок нерівності $(\operatorname{tg} 1)^{3x+2} > 1$.
64. Знайдіть **НАЙМЕНШИЙ ЦІЛИЙ** розв’язок нерівності $(\sin 2)^{3-2x} > 1$.

65. Розв'яжіть нерівність $\log_{0,3} x^2 \square \log_{0,3} (10 + 3x)$. У відповідь запишіть КІЛЬКІСТЬ ЦІЛИХ розв'язків цієї нерівності на проміжку $[-15; 15]$.
66. Розв'яжіть нерівність $\log_7 x^2 \square \log_7 (8 - 2x)$. У відповідь запишіть КІЛЬКІСТЬ ЦІЛИХ розв'язків цієї нерівності на проміжку $[-10; 10]$.
67. Знайдіть СУМУ всіх ЦІЛИХ розв'язків нерівності $3^x - 2 \cdot 3^{x-3} \square 25$ на проміжку $[-10; 10]$.
68. Знайдіть СУМУ всіх ЦІЛИХ розв'язків нерівності $5^{x+1} + 3 \cdot 5^{x-1} \square 28$ на проміжку $[-10; 10]$.
69. Розв'яжіть нерівність $\log_5 (x - 1) + \log_5 (x + 3) \square 1$. У відповідь запишіть КІЛЬКІСТЬ ЦІЛИХ розв'язків цієї нерівності на проміжку $[-10; 10]$.
70. Розв'яжіть нерівність $\log_{\frac{1}{2}} (x - 1) + \log_{\frac{1}{2}} (x - 2) \square -1$. У відповідь запишіть КІЛЬКІСТЬ ЦІЛИХ розв'язків цієї нерівності на проміжку $[-10; 10]$.
71. Знайдіть СУМУ всіх ЦІЛИХ розв'язків нерівності $\frac{\sqrt{10}}{3} \square (0,81)^{\frac{x+10}{4x}}$.
72. Знайдіть СУМУ всіх ЦІЛИХ розв'язків нерівності $(0,36)^{\frac{x-3}{2x}} \square \frac{3}{\sqrt{15}}$.
73. Розв'яжіть нерівність $\log_2 (4x) - \log_2 (x - 6) \square 3$. У відповідь запишіть СУМУ всіх ЦІЛИХ розв'язків цієї нерівності на проміжку $[-15; 15]$.
74. Розв'яжіть нерівність $\log_3 (6x) - \log_3 (x - 2) \square 2$. У відповідь запишіть СУМУ всіх ЦІЛИХ розв'язків цієї нерівності на проміжку $[-10; 10]$.
75. Розв'яжіть нерівність $(1,2)^{\frac{x^2-8x+7}{x-4}} \square 1$. У відповідь запишіть КІЛЬКІСТЬ ЦІЛИХ розв'язків цієї нерівності на проміжку $[-10; 10]$.

76. Розв'яжіть нерівність $(0,7)^{\frac{x^2-5x+6}{x+3}} \square 1$. У відповідь запишіть КІЛЬКІСТЬ ЦІЛИХ розв'язків цієї нерівності на проміжку $[-5; 5]$.
77. Розв'яжіть нерівність $\log_7(\log_3(\log_5 x)) \square 0$. У відповідь запишіть КІЛЬКІСТЬ ЦІЛИХ розв'язків цієї нерівності.
78. Розв'яжіть нерівність $\log_9(\log_2(\log_4 x)) \square 0$. У відповідь запишіть КІЛЬКІСТЬ ЦІЛИХ розв'язків цієї нерівності.
79. Розв'яжіть нерівність $9^x - 28 \cdot 3^x + 27 \square 0$. У відповідь запишіть КІЛЬКІСТЬ ЦІЛИХ розв'язків цієї нерівності на проміжку $[-5; 5]$.
80. Розв'яжіть нерівність $4^x - 6 \cdot 2^x - 16 < 0$. У відповідь запишіть СУМУ всіх ЦІЛИХ розв'язків цієї нерівності на проміжку $[-5; 5]$.
81. Розв'яжіть нерівність $\log_3^2(9x^2) < 16$. У відповідь запишіть КІЛЬКІСТЬ ЦІЛИХ розв'язків цієї нерівності.
82. Розв'яжіть нерівність $\log_2^2(8x^2) \square 1$. У відповідь запишіть КІЛЬКІСТЬ ЦІЛИХ розв'язків цієї нерівності.
83. Знайдіть КІЛЬКІСТЬ ЦІЛИХ розв'язків нерівності $\frac{2^x - 64}{x + 9} \square 0$ на проміжку $[-10; 10]$.
84. Знайдіть КІЛЬКІСТЬ ЦІЛИХ розв'язків нерівності $\frac{x + 4}{81 - 3^x} > 0$ на проміжку $[-10; 10]$.
85. Розв'яжіть нерівність $(x - 3)\log_{0,7}(x + 4) > 0$. У відповідь запишіть КІЛЬКІСТЬ ЦІЛИХ розв'язків цієї нерівності на проміжку $[-10; 10]$.
86. Розв'яжіть нерівність $(10 - x)\log_{0,5}(x - 2) < 0$. У відповідь запишіть КІЛЬКІСТЬ ЦІЛИХ розв'язків цієї нерівності на проміжку $[-10; 10]$.

87. Знайдіть **НАЙМЕНШИЙ ЦІЛИЙ** розв'язок нерівності
 $(25^x - 125) \cdot \sqrt{8 + 7x - x^2} \square 0$.
88. Знайдіть **НАЙБІЛЬШИЙ ЦІЛИЙ** розв'язок нерівності
 $(128 - 4^x) \cdot \sqrt{12 + 11x - x^2} \square 0$.
89. Розв'яжіть нерівність $\log_{|x|+3} 9 < 1$. У відповідь запишіть **КІЛЬКІСТЬ ЦІЛИХ** розв'язків цієї нерівності на проміжку $[-10; 10]$.
90. Розв'яжіть нерівність $\log_{|x|+1} 10 \square 1$. У відповідь запишіть **КІЛЬКІСТЬ ЦІЛИХ** розв'язків цієї нерівності на проміжку $[-12; 12]$.
91. Знайдіть **КІЛЬКІСТЬ ЦІЛИХ** розв'язків нерівності $x^{\log_{\frac{1}{2}} x} > \frac{1}{16}$ на проміжку $[0; 15]$.
92. Знайдіть **КІЛЬКІСТЬ ЦІЛИХ** розв'язків нерівності $x^{\log_{\frac{1}{3}} x} < \frac{1}{81}$ на проміжку $[0; 15]$.

Завдання з повним розв'язанням

Завдання 93–100 розв'яжіть із повним обґрунтуванням, посилаючись на відповідні означення, твердження, формули. У разі потреби проілюструйте розв'язання таблицями, діаграмами, графіками тощо.

93. Розв'яжіть нерівність:
- а) $\left(\sqrt[4]{3+\sqrt{8}}\right)^x + \left(\sqrt[4]{3-\sqrt{8}}\right)^x \square 6$; б) $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}\right)^{x-1} \square \left(\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$.
94. Розв'яжіть нерівність: а) $\sqrt{9^x + 3^x} - 2 \square 9 - 3^x$; б) $\sqrt{4^x - 2^{x+1}} - 8 \square 8 - 2^x$.
95. Розв'яжіть нерівність:
- а) $\frac{1}{\log_{1+2x}(x+3)} \square \log_{x+3}(x^2 + 8x + 15) - 1$;
- б) $\frac{1}{\log_{2x-5}(x+1)} \square \log_{x+1}(x^2 + 4x + 3) - 1$.

96. Розв'яжіть нерівність: а) $(x+7)^{x^2-25} \geq 1$; б) $(x-2)^{x^2-4} \geq 1$.

97. Зобразіть у системі координат xOy множину розв'язків нерівності:

а) $\log_{x+y} x \geq 0$;

б) $\log_{y-x} y \geq 0$.

98. Зобразіть у системі координат xOy множину розв'язків нерівності:

а) $\log_{x^2+y^2-3} (2x^2 + 2y^2 - 12) \geq 1$;

б) $(|x| + |y| - 1)^{x^2+y^2-4x} < 1$.

99. Розв'яжіть систему нерівностей:

а)
$$\begin{cases} 4^x - 31 \cdot 2^x - 32 < 0, \\ |x+14| \cdot (49 - x^2) \geq 0; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 16^x - 63 \cdot 4^x - 64 < 0; \\ |x+12| \cdot (25 - x^2) \geq 0. \end{cases}$$

100. Розв'яжіть систему нерівностей:

а)
$$\begin{cases} \log_x (\sqrt{2} \sin x + 1) \geq 0, \\ x < 2\pi; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \log_x (\sqrt{2} \cos x + 1) \geq 0, \\ x < 3\pi. \end{cases}$$

Розділ 5. ТЕКСТОВІ ЗАДАЧІ

5.1. Задачі на арифметичні співвідношення між об'єктами

Найпростіші завдання з повним розв'язанням

Розв'яжіть УСНО завдання 1–4, користуючись такими даними: «Батько з'їв 10 вареників, а син теж поласував варениками, але з'їв їх менше, ніж батько».

1. Скільки вареників міг з'їсти син? Наведіть усі можливі варіанти.
2. Яку найменшу кількість вареників могли з'їсти батько та син разом?
3. Яку найбільшу кількість вареників могли з'їсти батько та син разом?
4. Скільки вареників з'їв син, якщо разом із батьком вони з'їли 17 вареників?

Розв'яжіть УСНО завдання 5–8, користуючись такими даними: «У літаку виду A є 10 місць для пасажирів, а в літаку виду B — 25 місць для пасажирів».

5. На скільки місць для пасажирів у літаку виду A менше, ніж у літаку виду B ?
6. У скільки разів місць для пасажирів у літаку виду B більше, ніж у літаку виду A ?
7. Скільки літаків виду A потрібно для перевезення 73 пасажирів?
8. Скільки літаків обох видів можна використати для перевезення 200 пасажирів? Запропонуйте якомога більшу кількість варіантів.

Розв'яжіть УСНО завдання 9–12, користуючись такими даними: «Дмитрик назбирав у садку 20 яблук, а Петрик — 10 яблук».

9. Скільки яблук назбирали Дмитрик і Петрик разом?
10. Яку частину від усіх яблук, зібраних хлопцями, становлять яблука Петрика? Дмитрика?
11. Скільки яблук Дмитрик має віддати Петрику, щоб кількість яблук у кожного з них стала однаковою?
12. Скільки вишень отримає Петрик, якщо обміняє кожне своє яблуко на 25 вишень? А Дмитрик, якщо мінятиме яблука за тієї самої умови?

Розв'яжіть УСНО завдання 13–16, користуючись такими даними: «Першого дня туристи пройшли половину довжини всього маршруту, а другого дня — чверть довжини всього маршруту».

13. Якого дня (першого чи другого) туристи пройшли більшу відстань (у км)? У скільки разів?
14. Яку частину маршруту пройшли туристи за два дні?
15. Яку частину маршруту залишилося пройти туристам після двох днів подорожі?
16. Яка довжина всього маршруту, якщо другого дня туристи пройшли 12 км?

Розв'яжіть УСНО завдання 17–20, користуючись такими даними: «Іринці зараз 9 років, а її сестричці Надійці — 15 років».

17. Яка з двох сестричок буде молодшою за іншу через 50 років?
18. Скільки років було Надійці, коли в неї народилася сестричка?
19. У скільки разів Надійка була старшою за Іринку 3 роки тому? 5 років тому?
20. У скільки разів Іринка буде молодшою за Надійку через 3 роки? через 9 років?

Завдання з вибором однієї правильної відповіді

Проаналізуйте умови та вимоги завдань 21–50 та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

21. Під час уроку фізкультури всі 15 хлопців класу шикуються в одну шеренгу. Відомо, що Руслан стоїть сьомим, рахуючи зліва направо, а Владислав — десятим, рахуючи справа наліво. Скільки хлопців стоїть між Русланом та Владиславом?

А	Б	В	Г	Д
Жодного	Один	Двоє	Троє	Більше трьох

22. Дядько Панько і тітонька Одарка стоять у черзі. Позаду тітоньки Одарки стоять 4 особи, серед яких і Панько. Попереду дядька Панька стоїть 5 осіб, серед яких і Одарка. Між Одаркою і Паньком стоять 2 особи. Скільки всього людей, включаючи Одарку і Панька, стоїть у цій черзі?

А	Б	В	Г	Д
13 осіб	11 осіб	9 осіб	7 осіб	6 осіб

5.1. Задачі на арифметичні співвідношення між об'єктами

23. У деякій саморобній книжці бракувало другого розділу, який складався із 30 аркушів. Перший розділ закінчувався сторінкою номер 50, а кожний новий розділ починався з нової сторінки. Укажіть номер сторінки, із якої починався третій розділ цієї книжки. Примітка: кожний аркуш містить дві сторінки.

А	Б	В	Г	Д
80	81	110	111	130

24. Після того як маленький хлопчик погрався з однією книжкою, у ній почало бракувати кількох сторінок, що йшли підряд. На сторінці, що збереглася зліва, стояв номер 22, а на сторінці справа — номер 63. Скільки аркушів вирвав із цієї книжки маленький бешкетник? Примітка: кожний аркуш містить дві сторінки.

А	Б	В	Г	Д
19	20	21	40	41

25. На таці лежало 16 цукерок. Після того як Маринка і Даринка з'їли по n цукерок кожна, на таці залишилося 6 цукерок. Знайдіть n .

А	Б	В	Г	Д
3	5	6	8	10

26. На таці лежало 18 тістечок. Після того як Тимур і Ашот з'їли по k тістечок кожний, на таці залишилося 10 тістечок. Знайдіть k .

А	Б	В	Г	Д
10	8	5	4	2

27. На правому березі річки було в 4 рази більше крокодилів, ніж на лівому. Знайдіть відношення кількості крокодилів на лівому березі до кількості крокодилів на правому березі ПІСЛЯ того, як половина крокодилів з правого берега перепливла на лівий.

А	Б	В	Г	Д
1:1	2:3	3:2	3:4	3:8

28. На правому березі річки було в 2 рази менше черепах, ніж на лівому. Знайдіть відношення кількості черепах на лівому березі до кількості черепах на правому березі ПІСЛЯ того, як половина черепах з правого берега перепливла на лівий.

А	Б	В	Г	Д
5:1	5:2	3:1	2:1	3:2

29. У Данила і Якова разом 40 яблук, причому в Данила на 10 яблук більше, ніж у Якова. Скільки яблук у Якова?

А	Б	В	Г	Д
10	15	20	25	30

30. Після святкування Нового року з'ясувалося, що Тетянка отримала від Діда Мороза на 5 цукерок більше, ніж Надійка, а Надійка отримала від Діда Мороза у 1,5 разу менше цукерок, ніж Тетянка. Скільки цукерок дав Дід Мороз обом дівчаткам?

А	Б	В	Г	Д
10	15	25	30	50

31. Маса батона становить 600 г і ще третину маси батона. Яка маса всього батона?

А	Б	В	Г	Д
600 г	900 г	1200 г	1500 г	1800 г

32. Вартість книжки становить 6 грн і ще чверть вартості книжки. Скільки коштує книжка?

А	Б	В	Г	Д
24 грн	18 грн	12 грн	9 грн	8 грн

33. У готелі є 28 номерів люкс, оснащених кондиціонерами, що становить $\frac{4}{7}$ від усіх наявних у готелі номерів. Скільки всього номерів у цьому готелі?

А	Б	В	Г	Д
16	32	49	52	56

34. Одного року $\frac{5}{6}$ усіх днів у вересні були хмарними або дощовими. Скільки сонячних днів було у вересні того року? Примітка: у вересні 30 днів.

А	Б	В	Г	Д
5	6	10	11	25

5.1. Задачі на арифметичні співвідношення між об'єктами

35. У країні Лимонії місцева валюта зветься «лимончик», а в країні Бананії — «бананчик». Зв'язок між валютами є лінійним ($y = kx$). В обмінному пункті за 20 лимончиків дають 35 бананчиків. Скільки бананчиків дадуть за 16 лимончиків?

А	Б	В	Г	Д
32	31	30	29	28

36. У країні Кавунії місцева валюта зветься «кавунчик», а в країні Динії — «динчик». Зв'язок між валютами є лінійним ($y = kx$). В обмінному пункті за 36 кавунчиків дають 30 динчиків. Скільки потрібно дати кавунчиків, щоб отримати в обмін 45 динчиків?

А	Б	В	Г	Д
50	51	54	56	60

37. Батькові зараз 36 років, а двом його сином — 10 і 15 років. Через n років вік батька дорівнюватиме сумі років синів. Яке з рівнянь відповідає умові задачі?

А	Б	В	Г	Д
$36 + 2n = 25$	$36 + n = 25$	$36 + n = 25 + n$	$36 = 25 + n$	$36 = 25 + 2n$

38. Матері зараз 32 роки, а її трьом донькам — 2 роки, 8 років і 10 років. Через скільки років вік матері дорівнюватиме сумі років трьох її доньок?

А	Б	В	Г	Д
Через 15 років	Через 12 років	Через 9 років	Через 8 років	Через 6 років

39. У творі на тему «Моя сім'я» Дмитрик написав: «5 років тому татко був старшим за мене у 6 разів, а через 15 років він буде старшим за мене тільки у 2 рази». Учителька, яка перевіряла цей твір, замислилася: «А в скільки разів старший за Дмитрика його татко ЗАРАЗ?» Допоможіть учительці встановити істину.

А	Б	В	Г	Д
У 4,75 раза	У 4 рази	У 3,8 раза	У 3,5 раза	У 3,25 раза

40. У творі на тему «Моя сім'я» Оленка написала: «6 років тому мама була старшою за мене у 3 рази, а через 24 роки вона буде старшою за мене тільки у 1,5 разу». Учитель, який перевіряв цей твір, замислився: «А в скільки разів старша за Оленку її мама ЗАРАЗ?» Допоможіть учителю встановити істину.

А	Б	В	Г	Д
У 1,75 раза	У 2 рази	У 2,25 раза	У 3 раза	У 3,5 раза

41. Набір для прибирання кімнати «Економний» складається з віника та совка. Яка вартість цього набору, якщо 3 віники і 5 совків коштують 50 грн, а 6 віників і 4 совки коштують 58 грн?

А	Б	В	Г	Д
10 грн	10 грн 50 к.	11 грн	11 грн 50 к.	12 грн

42. Набір для інтерв'ю журналіста-початківця Бориса складається з ручки та блокнота. Яка вартість цього набору, якщо 2 ручки і 4 блокноти коштують 15 грн, а 5 ручок і 3 блокноти коштують 16 грн 50 к.?

А	Б	В	Г	Д
4 грн 50 к.	4 грн 75 к.	5 грн	5 грн 25 к.	5 грн 50 к.

43. У саду ростуть тільки яблуні та груші, усього k дерев. Кількість яблунь відноситься до кількості груш як 3:5. Скільки груш росте в цьому саду?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{5}{8}k$	$\frac{3}{8}k$	$5k$	$\frac{3}{5}k$	$\frac{5}{3}k$

44. У гаражі одного підприємства стоїть n автомобілів, причому це тільки або легкові, або вантажні автомобілі. Кількість легкових автомобілів відноситься до кількості вантажних як 3:7. Скільки легкових автомобілів є в цьому гаражі?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{7}{10}n$	$\frac{3}{7}n$	$3n$	$\frac{7}{3}n$	$\frac{3}{10}n$

45. Менеджер за місяць разом із премією одержав a грн. Знайдіть основну заробітну плату менеджера, якщо вона у чотири рази більша, ніж премія.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{4a}{5}$ грн	$\frac{a}{4}$ грн	$\frac{3a}{4}$ грн	$\frac{a}{5}$ грн	$\frac{5a}{4}$ грн

5.1. Задачі на арифметичні співвідношення між об'єктами

46. Маркетолог за місяць разом із премією одержав b грн. Знайдіть розмір премії маркетолога, якщо його основна заробітна плата у три рази більша, ніж премія.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{3b}{4}$ грн	$\frac{b}{2}$ грн	$\frac{2b}{3}$ грн	$\frac{b}{4}$ грн	$\frac{b}{3}$ грн

47. Туристична група замовила в ресторані 20 однакових комплексних обідів. Оренда банкетного залу й обслуговування групи коштують x грн, а вартість одного обіду становить y грн. Укажіть формулу для обчислення загальної вартості P обіду для ЦІЄЇ туристичної групи в ЦЬОМУ ресторані.

А	Б	В	Г	Д
$P = 20xy$	$P = 20x + y$	$P = 20(x + y)$	$P = x + 20y$	$P = x + y$

48. До музею на екскурсію прийшла група з 10 осіб. Вхідний квиток на одну особу коштує a грн, а вартість послуг екскурсовода для всієї групи становить b грн. Укажіть формулу для обчислення загальної вартості S відвідування ЦЬОГО музею ЦІЄЮ групою.

А	Б	В	Г	Д
$S = 10ab$	$S = 10a + b$	$S = 10(a + b)$	$S = a + 10b$	$S = a + b$

49. Дано задачу: «Подайте число 20 у вигляді суми двох доданків так, щоб добуток цих доданків дорівнював 16». Укажіть рівняння, за допомогою якого можна розв'язати цю задачу, якщо один із доданків позначено змінною x .

А	Б	В	Г	Д
$x(20 + x) = 16$	$x + (20 + x) = 16$	$x(20 - x) = 16$	$x + (16 + x) = 20$	$x(16 - x) = 20$

50. Дано задачу: «Подайте число 10 у вигляді добутку двох множників так, щоб сума цих множників дорівнювала 15». Укажіть рівняння, за допомогою якого можна розв'язати цю задачу, якщо один із множників позначено змінною x .

А	Б	В	Г	Д
$x(15 + x) = 10$	$x + (15 + x) = 10$	$x(10 - x) = 15$	$x + (10 + x) = 15$	$x(15 - x) = 10$

У завданнях 51–54 сформульовано проблему (питання), яку потрібно розв’язати (отримати однозначну відповідь на питання), використовуючи для цього додаткові дані — твердження (1) і (2). Визначте, чи достатньо цих даних для розв’язання проблеми, і оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь*.

51. Скільки коштує 1 кг абрикосів?

(1) 3 кг вишень коштують стільки, скільки й 2 кг абрикосів.

(2) 1 кг абрикосів дорожчий за 1 кг вишень.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

52. Скільки коштують 2 олівці та 6 зошитів?

(1) 1 олівець і 2 зошити коштують 7,5 грн.

(2) 1 олівець і 3 зошити коштують 10,5 грн.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

53. Між будь-якими двома поверхами будинку налічується 12 сходинок. На перший поверх сходи не ведуть. Скільки поверхів у цьому будинку?

(1) На передостанній поверх веде 96 сходинок.

(2) Дорога на 4-й поверх утричі коротша, ніж на останній.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

* Саму проблему розв’язувати не обов’язково.

54. Знайдіть масу м'ячика (у г).

(1) 1 м'ячик і 4 кубики мають таку саму масу, як три м'ячки.

(2) Маса шести кубиків дорівнює 18 г.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

У завданнях 55–56 порівняйте величини X і Y та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

55. Дошку на автоматичній пилорамі розпилують на 4 частини. Тривалість кожного розпилу становить 2 хв.

Величина X : кількість хвилин, необхідна для виконання всієї роботи.

Величина Y : 8.

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

56. Хлопчик позначив на одній прямій 5 точок. Відстань між будь-якими двома сусідніми точками дорівнює 3 см.

Величина X : відстань між двома крайніми точками (у см).

Величина Y : 12.

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

Завдання на встановлення відповідності

У завданнях 57–60 до кожного рядка, позначеного цифрою, доберіть один відповідник, позначений літерою.

57. Установіть відповідність між задачами (1–4) і виразами (А–Д), які є відповідями до цих задач.

- | | |
|--|-------------|
| 1 Прокат катамарана коштує a грн за першу годину катання або її частину. Кожна наступна година прокату або її частина коштує b грн. Скільки коштує прокат цього катамарана в період з 9-00 до 11-30? | А $2a + b$ |
| 2 У саду ростуть тільки a вишень, b слив і черешні. Скільки дерев росте в цьому саду, якщо кількість черешень дорівнює кількості вишень? | Б $2a + 2b$ |
| 3 Тимур народився в той самий день, коли Руслану виповнилося a років. Скільки зараз років Тимурові, якщо Руслану щойно виповнилося b років? | В $a + b$ |
| 4 На шкільному подвір'ї гуляють a хлопців і b дівчат. Така сама кількість дітей перебуває в приміщенні школи. Скільки дітей перебуває в приміщенні та на подвір'ї разом? | Г $a + 2b$ |
| | Д $b - a$ |

58. Установіть відповідність між задачами (1–4) і виразами (А–Д), які є відповідями до цих задач.

- | | |
|---|------------------|
| 1 Загальна вартість придбання k стільців становить n грн. Яка вартість одного такого стільця? | А nk |
| 2 Друк однієї сторінки книжки коштує n грн. Яка вартість друку k аркушів цієї книжки? Примітка: кожний аркуш містить дві сторінки. | Б $2nk$ |
| 3 Щоб пофарбувати n листів фанери з обох боків, витратили k кг фарби. Скільки кілограмів фарби потрібно, щоб пофарбувати один бік одного такого листа фанери? | В $\frac{n}{k}$ |
| 4 Із n га посівної площі зібрали k ц пшениці. Як знайти урожайність пшениці на цій площі? | Г $\frac{k}{n}$ |
| | Д $\frac{k}{2n}$ |

- 59.** Установіть відповідність між задачами (1–4) і числами (А–Д), які є розв'язками цих задач.
- | | |
|--|-------------|
| 1 У дві коробки потрібно розкласти 24 однакові кульки так, щоб у першій з них було в 3 рази більше кульок, ніж у другій. Скільки кульок при цьому опиниться в другій коробці? | А 6 |
| | Б 8 |
| | В 9 |
| 2 Між трьома дітьми потрібно поділити порівну 24 цукерки. Скільки цукерок отримає кожний? | Г 10 |
| | Д 12 |
| 3 Одного дня з яблуні в саду впали 24 яблука, причому на доріжку впало на 4 яблука більше, ніж на траву. Скільки яблук впало на траву? | |
| 4 Матуся розділила між трьома своїми дітьми 24 грн, причому суми грошей, отримані ними, відносилися як 1:2:3. Скільки гривень у тієї дитини, в якій грошей найбільше? | |
- 60.** Установіть відповідність між задачами (1–4) і числами (А–Д), які є розв'язками цих задач.
- | | |
|---|-------------|
| 1 Між двома парами дітей поділили порівну 40 бананів. Скільки бананів отримала кожна дитина? | А 8 |
| | Б 10 |
| | В 12 |
| 2 У два альбоми розклали 40 марок так, що в першому було в 4 рази менше марок, ніж у другому. Скільки марок при цьому опинилося в першому альбомі? | Г 15 |
| | Д 16 |
| 3 На трьох мандаринових деревах разом уродило 40 плодів, причому кількість плодів на них відносилася як 1:3:4. Скільки мандаринів виросло на тому дереві, де їх кількість була не найменшою і не найбільшою? | |
| 4 Двом агітаторам разом заплатили 40 грн, причому першому з них заплатили на 16 грн більше, ніж другому. Скільки гривень заплатили другому агітатору? | |

Завдання на встановлення послідовності

У завданнях 61–62 виберіть тільки необхідні для розв’язання поставленої задачі дії і розмістіть їх у правильній послідовності. У відповідь запишіть отриману послідовність літер.

61. У класі навчаються k учнів, причому $\frac{c}{d}$ учнів класу становлять дівчата. Скільки хлопців у класі?
- А Позначити кількість хлопців у класі змінною x .
 - Б Записати у відповідь обчислене значення змінної x .
 - В Обчислити значення змінної за формулою $x = k \cdot \frac{c}{d}$.
 - Г Обчислити значення змінної за формулою $x = k \left(1 + \frac{c}{d}\right)$.
 - Д Обчислити значення змінної за формулою $x = k \left(1 - \frac{c}{d}\right)$.
 - Е Обчислити значення змінної за формулою $x = k - \frac{c}{d}$.
 - Є Обчислити значення змінної за формулою $x = k + \frac{c}{d}$.
62. Завод виготовив n тепловозів, що становило $\frac{a}{b}$ всього замовлення. Скільки всього тепловозів було замовлено?
- А Записати у відповідь розв’язок рівняння.
 - Б Розв’язати рівняння $x + \frac{a}{b} = n$.
 - В Розв’язати рівняння $x \cdot \frac{a}{b} = n$.
 - Г Розв’язати рівняння $x - \frac{a}{b} = n$.
 - Д Розв’язати рівняння $x : \frac{a}{b} = n$.
 - Е Позначити загальну кількість тепловозів, які було замовлено, змінною x .

Завдання з короткою відповіддю

Розв’яжіть завдання 63–92 і запишіть відповідь **ОДНИМ ЧИСЛОМ**.

63. Вихованці дитячого садка йшли парами до лялькового театру. Одна дівчинка нарахувала перед собою 9 пар дітей, а після себе — 7 пар дітей. Скільки всього дітей ішло з цього дитсадка до лялькового театру?

64. Взвод солдатів ішов на обід строем у колону по три солдати в ряду. Один із солдатів нарахував перед собою 7 рядів, а позаду себе — 4 ряди. Скільки солдатів ішли обідати?
65. Дванадцять ліхтарів розташовані на набережній по прямій так, що відстані між будь-якими двома сусідніми ліхтарями однакові. Відстань між першим і третім ліхтарями дорівнює 60 м. Яка відстань (у м) між першим та останнім ліхтарями?
66. Місце для купання в морі обмежують буйки, розташовані по прямій так, що відстань між будь-якими двома сусідніми буйками однакова і дорівнює 12 м. Знайдіть відстань (у м) між третім та сьомим буйками.

67. На круговій діаграмі (рис. 1) указано кількість тортів, виготовлених на невеликих кондитерських фабриках A , B , C і D за одну й ту саму годину. Відомо, що найбільше тортів за цей час було виготовлено на фабриці B , а найменше — на фабриці D . Крім того, кількість тортів, виготовлених за цей час на фабриці C , була більшою, ніж кількість тортів, виготовлених на фабриці A . На скільки більше тортів за цей час було виготовлено на фабриці C , ніж на фабриці D ?

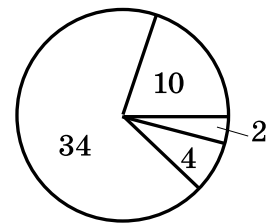


Рис. 1

68. За умовою попередньої задачі визначте, у скільки разів більше було виготовлено тортів за вказану годину на фабриці B , ніж на фабриці C ?
69. На круговій діаграмі (рис. 2) указано кількість абітурієнтів, що вступали одного року за тою самою спеціальністю, але до різних університетів X , Y , M і K . Відомо, що до університету X того року за цією спеціальністю вступало найменше абітурієнтів, а до університету K — найбільше абітурієнтів. Крім того, абітурієнтів, що вступали того року до університету M за вказаною спеціальністю, було менше, ніж аналогічних абітурієнтів, що вступали до університету Y . На скільки менше абітурієнтів вступало до університету X , ніж до університету M , того року за цією спеціальністю?

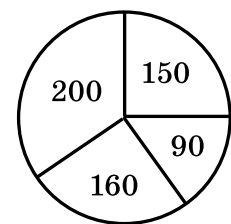


Рис. 2

70. За умовою попередньої задачі визначте, у скільки разів менше абітурієнтів вступало того року за вказаною спеціальністю до університету Y , ніж до університету K .

71. Фірма-посередник продала 20 стільців по 150 у. о. за штуку й отримала 600 у. о. чистого прибутку. За якою ціною фірма купувала один стілець у виробника?
72. Фірма-посередник продала 15 столів по 200 у. о. за штуку й отримала 750 у. о. чистого прибутку. За якою ціною фірма купувала один стіл у виробника?
73. Невелика приватна взуттєва фабрика одного дня повинна була пошити 120 пар ексклюзивного взуття. До обідньої перерви було пошито у 3 рази більше взуття, ніж по обіді. На скільки пар взуття більше було пошито цього дня до обіду, ніж після обіду?
74. Одного дня магазин до обідньої перерви обслужив у 2 рази більше клієнтів, ніж по обіді. На скільки більше клієнтів було обслужено цього дня до обіду, ніж по обіді, якщо загальна кількість обслужених клієнтів протягом усього цього дня становила 72 особи?
75. За перший день триденної велогонки велосипедисти проїхали $\frac{7}{15}$ усього маршруту, за другий — $\frac{2}{5}$ усього маршруту, а за третій — решту 40 км. Знайдіть довжину всього маршруту (у км).
76. Три студенти по черзі набирали на комп'ютері реферат. Спочатку перший із них набрав $\frac{11}{18}$ від загального обсягу реферату, потім другий — $\frac{1}{9}$ від загального обсягу реферату і нарешті третій набрав останні 25 сторінок. Знайдіть загальний обсяг набраного студентами реферату (у сторінках).
77. Яке число треба додати до числа 12, щоб одержана сума відносилася до 15 так само, як 30 до 25?
78. Яке число треба відняти від числа 16, щоб одержана різниця відносилася до 10 так само, як 9 до 15?
79. Число 21 розкладено на суму двох доданків. Знайдіть відношення більшого з цих доданків до меншого, якщо їх добуток дорівнює 54.
80. Число 196 розкладено на добуток двох множників. Знайдіть відношення більшого з цих множників до меншого, якщо їх сума дорівнює 35.

81. Карлсон купив собі на сніданок 5 кг цукерок і 4 кг печива, чесно заплативши за все 82 монетки. Скільки монеток було заплачено за обід, що складався з 10 кг цукерок і 15 кг печива, якщо 3 кг цукерок дорожчі за 2 кг печива на 14 монеток?
82. Тридцять років тому Коцій Безсмертний був утричі старший за Бабу Ягу, а через 120 років відношення віку Коція до віку Баби становитиме 7:3. Знайдіть суму ТЕПЕРІШНЬОГО віку Безсмертного та ТЕПЕРІШНЬОГО віку Яги.
83. Майстри Гвинтик і Шпунтик організували Невелику Артіль Технічного Обслуговування (НАТО). За виконання одного завдання Гвинтик отримує певну кількість порцій морозива, а Шпунтик — іншу, але теж фіксовану кількість порцій. За перший день роботи Гвинтик виконав 20 замовлень, а Шпунтик — 12, при цьому разом вони з'їли 84 порції морозива; за другий день Гвинтик виконав 16 замовлень, а Шпунтик — 10, при цьому разом вони з'їли 68 порцій морозива. Скільки порцій морозива з'їдять знесилені партнери по «агресивному блоку», якщо Гвинтик виконає 4 замовлення, а Шпунтик — 2 замовлення?
84. Керуючись останніми тенденціями у вітчизняній політиці, кіт Матроскін продає професору Сьоміну молоко і сметану за світовими цінами. У п'ятницю він продав 3 л молока і 2 л сметани за суму, еквівалентну 9,5 євро, а в суботу — 2 л молока і 1 л сметани за суму, еквівалентну 5,5 євро. У неділю в професора Сьоміна день народження і йому потрібно 8 л молока і 6 л сметани. Еквівалент якої суми в євро виручить бізнесмен Матроскін від продажу молокопродуктів професору Сьоміну в неділю?
85. В одному містечку є тільки три школи: № 1, № 2 і № 3. Загальна кількість комп'ютерних класів у школах № 1 і № 2 — 5, у школах № 2 і № 3 — 11, у школах № 1 і № 3 — 10. Знайдіть загальну кількість комп'ютерних класів у всіх школах містечка.
86. В одному місті є тільки три школи бальних танців: *A*, *B* і *C*. Загальна кількість учнів, що тренуються в школах *A* і *B* — 190, у школах *B* і *C* — 180, а у школах *A* і *C* — 150. Скільки учнів займаються бальними танцями в цьому місті, якщо кожний з них тренується тільки в одній школі?
87. Після того як хлопчик з'їв половину яблук із банки циліндричної форми, рівень компоту понизився на одну третину від його початкового рівня. На яку частину ВІД ОТРИМАНОГО РІВНЯ знизиться рівень компоту, якщо з'їсти половину яблук, що залишилися в банці? Примітка: яблука повністю занурені в компот.

88. Після того як дівчинка з'їла половину абрикосів зі склянки циліндричної форми, рівень компоту понизився на одну чверть від його початкового рівня. На яку частину ВІД ОТРИМАНОГО РІВНЯ знизиться рівень компоту, якщо з'їсти половину абрикосів, що залишилися у склянці? Примітка: абрикоси повністю занурені в компот.
89. На контрольній роботі всім учням класу роздали порівну 120 аркушів для чернеток. Якби учнів було на 4 більше, то всі аркуші були б роздані, але кожен учень отримав би на один аркуш менше. Скільки учнів у цьому класі?
90. Приватна фірма виготовляє однакові тенти для торговельних палаток. Одного разу рулон водостійкої тканини завдовжки 144 м розрізали на кілька тентів. Якби на кожний тент виділили на 3 м тканини менше, то вся тканина була би використана, а в результаті було б пошито на 4 тенти більше. Скільки тентів було пошито?
91. Відомо, що чисельник звичайного дроби на 1 менший за його знаменник. Якщо до чисельника цього дроби додати 2, а його знаменник помножити на 3, то дріб зменшиться на $\frac{1}{3}$. Знайдіть початковий дріб.
92. Відомо, що чисельник звичайного дроби на 2 менший за його знаменник. Якщо ж до чисельника цього дроби додати 4, а до його знаменника додати 3, то дріб збільшиться на $\frac{1}{2}$. Знайдіть початковий дріб.

Завдання з повним розв'язанням

Завдання 93–100 розв'яжіть із повним обґрунтуванням, посилаючись на відповідні означення, твердження, формули. У разі потреби проілюструйте розв'язання таблицями, діаграмами, графіками тощо.

93. У бізнесмена Стецька в гаражі стоять «мерседеси» та «запорожці». Загальна кількість цих автомобілів менша від 30. Якщо кількість «мерседесів» збільшити вдвічі, а кількість «запорожців» збільшити на 27, то останніх стане менше, ніж перших. Якщо ж кількість «запорожців» збільшити вдвічі, а кількість «мерседесів» не змінювати, то меншою стане вже кількість «мерседесів». Скільки «мерседесів» і скільки «запорожців» стоїть у гаражі бізнесмена Стецька?

94. Будівельна фірма збудувала для своїх співробітників дачне містечко із 2- та 3-поверхових котеджів. Відомо, що 3-поверхових котеджів менше, ніж 2-поверхових. Якщо кількість 3-поверхових котеджів збільшити вдвічі, то загальна кількість будинків стане більшою за 24, а якщо кількість 2-поверхових котеджів збільшити вдвічі, то загальна кількість будинків стане меншою за 27. Знайдіть загальну кількість будинків у дачному містечку.
95. Кожна із трьох посудин частково наповнена водою. З першої посудини в другу перелили t л води. З другої посудини в третю перелили половину води, яка опинилася в другій посудині. Після цього в першу посудину перелили $\frac{1}{5}$ води, що опинилася в третій посудині. У результаті описаних переливань в усіх трьох посудинах стало по 4 л води. Знайдіть:
- кількість літрів води у третій посудині до переливань;
 - кількість літрів води у кожній із трьох посудин до переливань при $t = 1$;
 - залежність початкової кількості води у кожній із посудин від параметра t ;
 - множину всіх можливих значень параметра t .
96. У трьох посудинах разом було 18 л води. З першої посудини в другу перелили x л води. Потім із другої посудини в третю перелили третину одержаної кількості води. Після цього половину води, що опинилася в третій посудині, перелили в першу. У результаті в усіх трьох посудинах виявилася однакова кількість води. Знайдіть:
- кількість літрів води у третій посудині до переливань;
 - кількість літрів води у кожній із трьох посудин до переливань при $x = 1$;
 - залежність початкової кількості води у кожній із посудин від параметра x ;
 - множину всіх можливих значень параметра x .
97. Групу школярів розсадили в їдальні за n столами по троє за кожний стіл.
- Якщо посадити за стіл по дві дівчини, то за трьома столами сидітимуть тільки хлопці. Виразіть кількість дівчат і кількість хлопців через n .
 - Якщо посадити за стіл по два хлопці, то за двома столами сидітимуть тільки дівчата. Знайдіть n .
 - Визначте, скільки дівчат і скільки хлопців у цій групі.
98. Групу дітей потрібно розсадити в їдальні за k столами по четверо за кожний стіл.
- Якщо посадити за стіл по три дівчини, то за одним столом сидітимуть тільки хлопці. Виразіть кількість дівчат і кількість хлопців через k .
 - Якщо посадити за стіл по два хлопці, то за двома столами сидітимуть тільки дівчата. Знайдіть k .
 - Визначте, скільки дівчат і скільки хлопців у цій групі.

- 99.** Для аналізу попиту населення на побутові прилади було проведено опитування 1000 відвідувачів магазину, після якого з'ясувалося, що 600 із них протягом року купили пральні машини, 250 — електроплити, 350 — телевізори. При цьому виявилось, що 90 відвідувачів купили пральні машини та електроплити, 100 — пральні машини і телевізори, а 80 — електроплити та телевізори. Крім того, 20 відвідувачів купили всі види товарів. Визначте, скільки осіб:
- купили хоч один із названих приладів;
 - не купили жодного приладу;
 - купили тільки один із названих побутових приладів.
- 100.** Для виявлення впливу реклами на придбання миючих засобів було проведено опитування 1000 осіб, після якого з'ясувалося, що 500 із них під час придбання цього виду продукції керувалися рекламою, 400 — власною думкою, а 300 — порадами друзів та знайомих. При цьому виявилось, що 100 опитаних осіб керувалися і рекламою, і власною думкою, 80 — і рекламою, і порадами друзів та знайомих, а 70 — і власною думкою, і порадами друзів та знайомих. Визначте, скільки осіб під час придбання миючих засобів керувалися:
- тільки рекламою;
 - тільки власною думкою;
 - тільки порадами друзів та знайомих;
 - усіма трьома наведеними чинниками.

5.2. Задачі на рух і на роботу

Найпростіші завдання з повним розв'язанням

Розв'яжіть УСНО завдання 1–4, користуючись такими даними: «Іван та Петро побачили один одного на відстані 60 м. Іван завжди бігає з постійною швидкістю 6 м/с, а Петро — з постійною швидкістю 4 м/с».

- Через скільки секунд Іван набіжить до Петра, якщо Петро стоятиме на місці?
- Через скільки секунд Петро набіжить до Івана, якщо Іван стоятиме на місці?
- Через скільки секунд зустрінуться Петро та Іван, якщо побіжать назустріч один одному по прямій?
- Через скільки секунд зустрінуться Петро та Іван, якщо Петро почне тікати, а Іван наздоганятиме його по прямій?

Розв'яжіть УСНО завдання 5–8, користуючись такими даними: «Два косарі косять траву на галявині. Перший косар, працюючи один, може скосити всю траву на галявині за 5 год, а другий косар, працюючи один, може скосити всю траву на цій самій галявині за 10 год».

5. Яку частину всієї трави на галявині скосить тільки перший (тільки другий) косар за одну годину?
6. Яку частину всієї трави на галявині скосять обидва косарі за 2 год, працюючи разом?
7. За скільки хвилин обидва косарі, працюючи разом, скосять всю траву на галявині?
8. Два косарі працюють разом. Яку частину всієї трави на галявині їм залишиться докосити в той момент часу, коли перший косар скосить половину всієї трави на галявині?

Розв'яжіть УСНО завдання 9–12, користуючись такими даними: «Ванна має місткість 400 л. Максимальна швидкість наповнення ванни через кран із холодною водою дорівнює 8 л/с, а через кран із гарячою водою — 5 л/с. Через зливник ванни вода виходить зі швидкістю 3 л/с».

9. За який найменший час (у с) можна наповнити порожню ванну вщерть тільки холодною водою?
10. За який найменший час (у с) можна наповнити порожню ванну вщерть тільки гарячою водою?
11. За який час (у с) можна наповнити порожню ванну вщерть, одночасно відкривши зливник та ввімкнувши на максимальну потужність кран із гарячою водою? із холодною водою?
12. За який час (у с) можна наповнити порожню ванну вщерть, одночасно відкривши зливник та ввімкнувши на максимальну потужність обидва крани?

Розв'яжіть УСНО завдання 13–16, користуючись такими даними: «На рис. 3 зображено графік залежності об'єму води в басейні V (у м^3) від часу його наповнення t (у хв) за допомогою насоса протягом 240 хв».

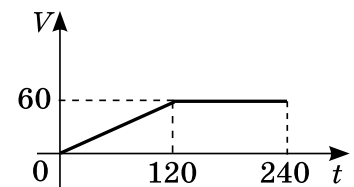


Рис. 3

13. Протягом скількох годин басейн наповнювався водою?
14. З якою продуктивністю (у $\text{м}^3/\text{хв}$) насос наповнював басейн?
15. Через скільки хвилин у басейні було 30 м^3 води?
16. Скільки води (у м^3) було в басейні через 10 хв?

Розв'яжіть УСНО завдання 17–20, користуючись такими даними: «На рис. 4 зображено графік залежності довжини траєкторії руху туриста s (у км) від часу його руху t (у год) протягом 6 год».

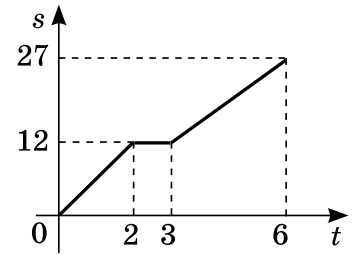


Рис. 4

17. Яку відстань (у км) пройшов турист до привалу і протягом якого часу (у год) він відпочивав?
18. Із якою швидкістю рухався турист протягом перших двох годин руху?
19. Із якою швидкістю рухався турист протягом останніх трьох годин руху?
20. Якою була середня швидкість туриста протягом усього маршруту?

Завдання з вибором однієї правильної відповіді

Проаналізуйте умови та вимоги завдань 21–50 та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

21. Випробовуючи новий прилад контролю руху, лейтенант ДАІ Кузьма Кмітливий помітив, що автомобіль, за яким він веде спостереження, за кожні 10 хв долає 18 км. Яка середня швидкість цього автомобіля (у км/год)?

А	Б	В	Г	Д
180 км/год	18 км/год	100 км/год	98 км/год	108 км/год

22. Велосипедист проїхав 20 км зі швидкістю 10 км/год і 15 км зі швидкістю 5 км/год. Знайдіть середню швидкість велосипедиста.

А	Б	В	Г	Д
6 км/год	7 км/год	7,5 км/год	8 км/год	8,25 км/год

23. Сходами ескалатора, що рухається вгору зі швидкістю v ($v > 0$), спускаються вниз (проти руху ескалатора) троє хлопчиків: Іванко, Андрійко та Олежка зі швидкостями $4v$, $3v$ і $2v$ відповідно. Хто з цих хлопчиків налічить більше сходинок під час усього спуску?

А	Б	В	Г	Д
Усі хлопчики налічать однакову кількість сходинок	Іванко	Андрійко	Олежка	Відповідь залежить від значення v

24. Сходами ескалатора, що рухається вниз зі швидкістю v ($v > 0$), також униз ідуть троє хлопчиків: Іванко, Андрійко та Олежка зі швидкостями $\frac{v}{2}$, $\frac{v}{3}$ і $\frac{v}{4}$ відповідно. Хто з цих хлопчиків налічить більше сходинок під час усього спуску?

А	Б	В	Г	Д
Усі хлопчики налічать однакову кількість сходинок	Іванко	Андрійко	Олежка	Відповідь залежить від значення v

25. Перший пішохід долає шлях від пункту A до пункту B за 3 год, а другий пішохід долає шлях з пункту B до пункту A за 2 год. Через скільки годин пішоходи зустрінуться, якщо вони вийдуть одночасно назустріч один одному з пунктів A і B відповідно?

А	Б	В	Г	Д
Через 0,6 год	Через 1 год	Через 2,5 год	Через 5 год	Через 1,2 год

26. Велосипедист долає шлях із пункту A до пункту B за 2 год, а пішохід долає шлях із пункту B до пункту A за 6 год. Через скільки годин велосипедист наздожене пішохода, якщо вони вийдуть одночасно з пунктів A і B відповідно у напрямку пункту C (рис. 5).

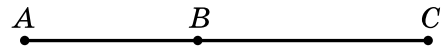


Рис. 5

А	Б	В	Г	Д
Через 2 год	Через 3 год	Через 4 год	Через 6 год	Через 8 год

27. Темної-темної ночі Том Сойєр та Гекльберрі Фінн вирішили зустрітися на нараду на міському кладовищі. Вони підійшли до його центральної алеї, зіткнулися лобами, але не впізнали один одного і, викрикнувши «ой!», побігли у протилежні боки. Через який час між ними буде безпечна відстань у 60 м, якщо відомий сміливець Том біжить зі швидкістю 5 м/с, а людина зі сталевими нервами Гекльберрі — зі швидкістю 7 м/с?

А	Б	В	Г	Д
Через 30 с	Через $\frac{12}{7}$ с	Через 12 с	Через $\frac{60}{7}$ с	Через 5 с

28. Темної-темної ночі Джуліко Бандитто пішов грабувати банк, але біля самих його дверей випадково зіткнувся носом до носа з іншим гангстером — де ля Воро Гангстеритто. Не впізнавши один одного, вони обидва викрикнули «ой!» і побігли стрімголов у різні боки. Через який час між ними буде безпечна відстань у 120 м, якщо хоробрий Бандитто біжить зі швидкістю 6 м/с, а безстрашний Гангстеритто — зі швидкістю 9 м/с?

А	Б	В	Г	Д
Через 8 с	Через $\frac{40}{3}$ с	Через 20 с	Через 40 с	Через $\frac{20}{9}$ с

29. Спортсмени-аматори Остап і Потап завжди бігають з постійною швидкістю. Відомо, що вони пробігають 60-метровку за 10 с і 12 с відповідно. Остап і Потап мають пробігти дистанцію 1200 м, стартувавши одночасно. Скільки метрів залишиться бігти до фінішу цієї дистанції Потапу в той момент, коли фінішує Остап?

А	Б	В	Г	Д
200 м	100 м	150 м	250 м	180 м

30. Дід Василь, що живе в Зачепилівці, ходить із постійною швидкістю 4 км/год, а дід Петро, що живе в Забурбелівці, ходить із постійною швидкістю 6 км/год. Дорога між селами тільки одна, і її довжина дорівнює 8 км. Одного дня Василь пішов у гості до Петра, а Петро — до Василя. На якій відстані від села Забурбелівка відбулася зустріч здивованих пенсіонерів?

А	Б	В	Г	Д
4 км	4,8 км	5 км	5,2 км	6 км

31. Товарний поїзд іде з постійною швидкістю 90 км/год. Яка довжина цього поїзда, якщо повз нерухомого спостерігача він проходить за 10 с?

А	Б	В	Г	Д
240 м	250 м	300 м	450 м	900 м

32. Машиніст товарного поїзда, який рухався з постійною швидкістю 60 км/год, помітив, що зустрічний пасажирський поїзд, який рухався з постійною швидкістю 30 км/год, пройшов повз нього за 12 с. Знайдіть довжину пасажирського поїзда.

А	Б	В	Г	Д
300 м	360 м	420 м	600 м	1080 м

33. Двоє хлопчиків-пустунчиків Антон і Микита вирішили обігти прямокутний будинок школи з різних боків до зустрічі (рис. 6). Швидкість Антона — 3 м/с, а Микити — 5 м/с. Через скільки секунд після одночасного старту з ганку в різні боки хлопчики зустрінуться?



Рис. 6

А	Б	В	Г	Д
Через 20 с	Через 10 с	Через 15 с	Через 30 с	Через 25 с

34. Спортсмени-аматори Остап і Потап щоранку бігають навколо озера доріжкою, яка має форму правильного шестикутника (рис. 7). Одного разу, стартувавши одночасно з точки А, вони побігли в різні боки. У якій точці вони вперше зустрінуться, якщо Остап біжить удвічі швидше, ніж Потап?

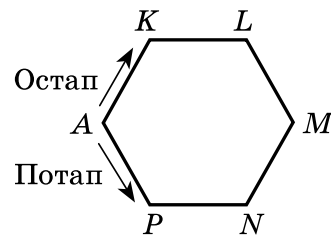


Рис. 7

А	Б	В	Г	Д
P	N	M	L	K

35. На рис. 8 зображено графіки залежностей довжини траєкторії руху s (у км) від часу руху t (у год) для велосипедиста (відрізок OA) і пішохода (відрізок OB), які одночасно вирушили в одному напрямку з одного пункту відправлення о 10-00. З якою швидкістю змінювалася відстань між пішоходом і велосипедистом?

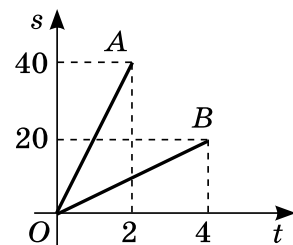


Рис. 8

А	Б	В	Г	Д
5 км/год	10 км/год	15 км/год	20 км/год	25 км/год

36. Скориставшись даними завдання 35, розв'яжіть таку задачу: «Об 11-00 пішохід пройшов біля Мудрого Дуба і задумав бажання. Відомо, що велосипедист, проїжджаючи біля цього самого Дуба раніше, теж задумав бажання. Укажіть час, коли він це зробив?»

А	Б	В	Г	Д
10-10	10-15	10-20	10-30	10-45

37. Шість бригад робітників, працюючи кожна з однаковою продуктивністю, за 3 год побудували 10 однакових дерев'яних будинків. Скільки таких самих будинків побудують три таких бригади робітників за 9 год?

А	Б	В	Г	Д
9	12	15	18	27

38. П'ять робітників, працюючи кожен з однаковою продуктивністю, за 4 год зібрали 15 однакових пилососів. Скільки таких самих пилососів зберуть десять таких робітників за 2 год?

А	Б	В	Г	Д
12	20	18	10	15

39. Штучне озеро може наповнюватися через 4 труби. Відомо, що перша труба наповнить його за 4 год, друга — за 5 год, третя — за 6 год, а четверта — за 8 год. Потрібно якомога швидше наповнити озеро, використовуючи при цьому тільки дві труби. Які труби мають бути для цього задіяні?

А	Б	В	Г	Д
Першу і четверту	Другу і третю	Першу і третю	Третю і четверту	Першу і другу

40. Винахідник-експериментатор Клим досліджує наповнення басейну. Відомо, що через першу трубу можна наповнити басейн за 2 год, а через другу — за 3 год. Через третю трубу можна злити всю воду з наповненого басейну за 4 год, а через четверту — за 5 год. Клим вирішив задіяти одну трубу, що наповнює, та одну зливальну трубу одночасно. Які труби потрібно використати, щоб якомога швидше наповнити порожній басейн?

А	Б	В	Г	Д
Першу і третю	Другу і третю	Другу і четверту	Першу і четверту	Визначити неможливо

41. Першому робітнику для виконання всього виробничого завдання потрібно на 4 год більше, ніж другому. За скільки годин може виконати все це завдання перший робітник, якщо половину всього цього завдання другий робітник виконує за 5 год?

А	Б	В	Г	Д
1 год	9 год	6 год	10 год	14 год

42. Двоє робітників, працюючи разом із різною продуктивністю, можуть виконати все завдання за 6 год. Серед наведених варіантів відповідей укажіть той, який **МОЖЕ** виражати кількість годин, необхідних для виконання всього цього завдання одним із робітників.

А	Б	В	Г	Д
3 год	5 год	6 год	9 год	12 год

43. Місткість бензобака деякого трактора становить 40 л. Витрати дизельного пального на 100 км шляху становлять 7 л. Яку найбільшу відстань (у км) **МОЖЕ** проїхати цей трактор без дозаправки, якщо вирушить у дорогу з повним бензобаком?

А	Б	В	Г	Д
280 км	281 км	571 км	572 км	700 км

44. Місткість бензобака деякого автомобіля становить 50 л. Витрати бензину на 100 км шляху становлять 6 л. Яку найбільшу відстань (у км) **МОЖЕ** проїхати цей автомобіль без дозаправки, якщо вирушить у дорогу з повним бензобаком?

А	Б	В	Г	Д
834 км	833 км	831 км	830 км	300 км

45. Перший насос перекачує 4 л води за той самий час, за який другий насос перекачує 3 л води. Другий насос перекачав n л води. Яку кількість води (у л) за цей час перекачав перший насос?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{4n}{3}$	$\frac{4}{3n}$	$3n + 4$	$\frac{3}{4n}$	$\frac{3n}{4}$

46. При випробуванні двох двигунів було встановлено, що перший витрачає k л бензину за той самий час, за який другий двигун витрачає 6 л бензину. Перший двигун витратив 11 л бензину. Яку кількість бензину (у л) за цей час витратив другий двигун?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{11}{6k}$	$\frac{k}{66}$	$\frac{6}{11k}$	$\frac{66}{k}$	$\frac{11k}{6}$

47. Мурчик з'їдає пачку «Віскасу» за 10 днів, а разом із Сніжком вони упораються з нею за 3,75 дня. На скільки днів вистачило б цієї пачки одному Сніжку?

А	Б	В	Г	Д
На 5,5 дня	На 6 днів	На 6,75 дня	На 7,25 дня	На 8 днів

48. Тузик з'їдає пачку «Чаппі» за 6 днів, а разом із Шариком вони упораються з нею за 2 дні. На скільки днів вистачило б цієї пачки одному Шарику?

А	Б	В	Г	Д
На 4 дні	На 2,5 дня	На 5 днів	На 4,5 дня	На 3 дні

49. Триголовий Змій одного разу відзначив, що перша його голова може випити діжку води через соломинку за 4 год, друга голова може випити таку саму діжку води за 6 год, а третя — за 12 год. За який час (у год) вип'ють діжку води всі три голови Змія, якщо питимуть її одночасно?

А	Б	В	Г	Д
За 22 год	За $\frac{22}{3}$ год	За 11 год	За $\frac{10}{3}$ год	За 2 год

50. Богатирі Ілля, Добриня та Альоша разом упораються зі стоголовим драконом за 1 год 20 хв. Альоша і Добриня зроблять це за $2\frac{6}{7}$ год, а Ілля та Добриня — за $1\frac{7}{13}$ год. Скільки часу втихомирюватимуть дракона Ілля та Альоша?

А	Б	В	Г	Д
1 год 50 хв	2 год	2 год 20 хв	2 год 45 хв	3 год

У завданнях 51–54 сформульовано проблему (питання), яку потрібно розв'язати (отримати однозначну відповідь на питання), використовуючи для цього додаткові дані — твердження (1) і (2). Визначте, чи достатньо цих даних для розв'язання проблеми, і оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь*.

51. Знайдіть швидкість течії річки.

(1) Моторний човен проплив 30 км за течією річки за 3 год.

(2) М'яч, кинутий у річку, проплив за її течією 6 км за 2 год.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

* Саму проблему розв'язувати не обов'язково.

52. Установіть, на скільки метрів за секунду швидкість мотоцикліста більша за швидкість велосипедиста.

(1) Велосипедист щохвилини проїжджає на 600 м менше, ніж мотоцикліст.

(2) На шлях завдовжки 120 км велосипедист витрачає 10 год, а мотоцикліст — 4 год.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

53. Троє студентів їдять картоплю з однієї сковорідки, причому вони роблять це з різними, але постійними швидкостями. Знайдіть час, за який студенти утрюх з'їдять усю порцію смаженої картоплі.

(1) Перший та третій студенти разом з'їдять усю порцію за 20 хв.

(2) Перший та другий студенти разом з'їдять усю порцію за 15 хв.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

54. Троє дітей їдять банош з однієї тарілки, причому вони роблять це з різними, але постійними швидкостями. Знайдіть час, за який всю порцію баноша з'їсть друга дитина самостійно.

(1) Перша та третя дитина разом з'їдять усю порцію баноша за 20 хв.

(2) Усі троє дітей разом з'їдять усю порцію баноша за 8 хв.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

У завданнях 55–56 порівняйте величини X і Y та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

55. Тільки через першу трубу басейн можна наповнити водою вщерть за 3 год, а тільки через другу трубу — за 4 год.

Величина X : кількість води, що наливається в басейн щохвилини через першу трубу (у л).

Величина Y : кількість води, що наливається в басейн щохвилини через другу трубу (у л).

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

56. Легковий та вантажний автомобілі їхали з постійними швидкостями, причому легковий автомобіль проїхав увесь шлях за 5 год, а вантажний — за 6 год.

Величина X кількість метрів, що долав вантажний автомобіль щосекунди.

Величина Y : кількість метрів, що долав легковий автомобіль щосекунди.

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

Завдання на встановлення відповідності

У завданнях 57–60 до кожного рядка, позначеного цифрою, доберіть один відповідник, позначений літерою.

57. Установіть відповідність між задачами (1–4) і числами (А–Д), які є відповідями до цих задач.

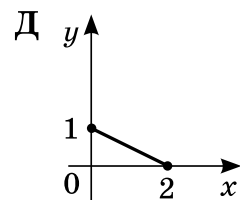
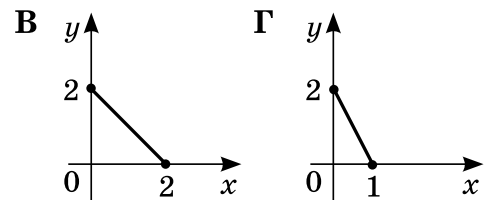
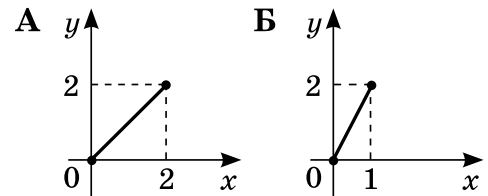
- | | |
|--|------|
| 1 Робітник може виготовити 10 деталей за 100 хв. Знайдіть продуктивність праці цього робітника (у деталях за годину) | А 4 |
| 2 Продуктивність праці штукатура становить $\frac{1}{8}$ норми за годину. За скільки годин цей штукатур виконає половину норми? | Б 5 |
| 3 Ванна через кран наповнюється водою наполовину за 12 год. За скільки годин наповниться третина ванни через цей самий кран, якщо швидкість наповнення не зміниться? | В 6 |
| 4 Два насоси однакової потужності наповнюють басейн ущерть за 20 год. Скільки потрібно використати таких насосів, щоб наповнити вщерть цей самий басейн за 4 год? | Г 8 |
| | Д 10 |

58. Установіть відповідність між задачами (1–4) і числами (А–Д), які є відповідями до цих задач.

- | | | |
|---|--|-------|
| 1 | Велосипедист проїхав 20 км зі швидкістю 10 км/год і 15 км зі швидкістю 5 км/год. Знайдіть середню швидкість цього велосипедиста (у км/год) протягом усього шляху | А 5,4 |
| 2 | Кішка робить 3 стрибки за 1 с. Знайдіть швидкість кішки (у км/год), якщо довжина кожного її стрибка дорівнює 50 см | Б 6 |
| 3 | Пішохід щохвилини проходить 100 м. Знайдіть швидкість пішохода (у км/год) | В 7 |
| 4 | На параді автомобіль пройшов 750 м за 9 хв. Знайдіть середню швидкість цього автомобіля (у км/год) під час параду | Г 5 |
| | | Д 7,5 |

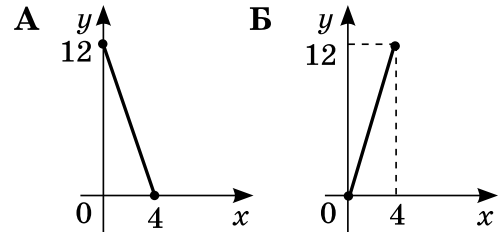
59. Установіть відповідність між задачами (1–4) і графіками (А–Д), що МОЖУТЬ описувати залежності, про які йде мова в цих задачах. Примітка: y — об'єм води в басейні, м^3 ; x — час, год.

- 1 У порожній басейн наливається 1 м^3 води за 1 год
- 2 З басейну, в якому спочатку було 2 м^3 води, виливається вода зі швидкістю $2 \text{ м}^3/\text{год}$
- 3 У порожній басейн наливається 2 м^3 води за 1 год
- 4 З басейну, в якому спочатку було 1 м^3 води, виливається вода зі швидкістю $0,5 \text{ м}^3/\text{год}$

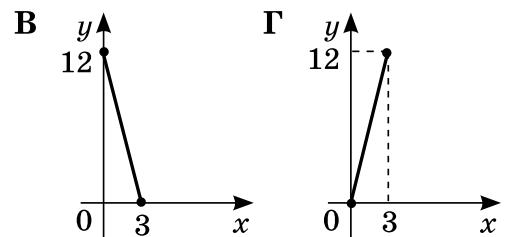


60. Установіть відповідність між задачами (1–4) і графіками (А–Д), що МОЖУТЬ описувати залежності, про які йде мова в цих задачах.

1 Два втомлені пішоходи одночасно вийшли з одного пункту в протилежних напрямках зі швидкостями 1,25 км/год і 1,75 км/год (y — відстань між пішоходами, км; x — час, год)

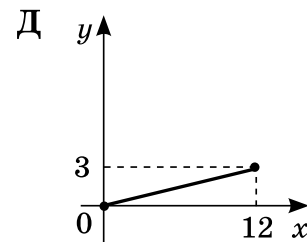


2 Два бадьорі пішоходи одночасно вийшли з одного пункту в одному напрямку зі швидкостями 5,5 км/год і 5,25 км/год (y — відстань між пішоходами, км; x — час, год)



3 Пішохід іде зі швидкістю 4 км/год із пункту А до пункту В, відстань між якими 12 км (y — відстань від пішохода до пункту А, км; x — час, год)

4 Пішохід іде зі швидкістю 4 км/год із пункту А до пункту В, відстань між якими 12 км (y — відстань від пішохода до пункту В, км; x — час, год)



Завдання на встановлення послідовності

У завданнях 61–62 виберіть тільки необхідні для розв'язання поставленої задачі дії і розмістіть їх у правильній послідовності. У відповідь запишіть отриману послідовність літер.

61. Перший маляр може пофарбувати стіну за x год, а другий маляр може пофарбувати цю саму стіну за y год. Як знайти час t , за який обидва маляри зможуть пофарбувати цю стіну, працюючи разом?

А Знайти продуктивність z спільної роботи за формулою $z = \frac{1}{x+y}$.

Б Знайти продуктивність z спільної роботи за формулою $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

В Знайти продуктивність z спільної роботи за формулою $z = \frac{1}{xy}$.

Г Знайти продуктивність z спільної роботи за формулою $z = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}$.

- Д Знайти час t за формулою $t = \frac{1}{z}$.
- Е Знайти час t за формулою $t = \frac{2}{z}$.
- Є Знайти час t за формулою $t = \frac{1}{2z}$.

62. Годинна стрілка експериментального годинника здійснює повний оберт (360°) за k хв, а хвилинна — за n хв. У той момент, коли цей годинник почав іти, плоский кут між його стрілками дорівнював α градусів. Як знайти час T (у хв), через який стрілки цього годинника збіжаться вперше після запуску?

- А Знайти кутові швидкості ω_1 і ω_2 годинної та хвилинної стрілок за формулами $\omega_1 = \frac{360}{k}$ і $\omega_2 = \frac{360}{n}$ відповідно.
- Б Знайти кутові швидкості ω_1 і ω_2 годинної та хвилинної стрілок за формулами $\omega_1 = \frac{k}{360}$ і $\omega_2 = \frac{n}{360}$ відповідно.
- В Знайти швидкість зближення стрілок ω за формулою: $\omega = \omega_1 + \omega_2$.
- Г Знайти швидкість зближення стрілок ω за формулою: $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$.
- Д Знайти швидкість зближення стрілок ω за формулою: $\omega = |\omega_1 - \omega_2|$.
- Е Знайти час T за формулою: $T = \frac{1}{\omega}$.
- Є Знайти час T за формулою: $T = \frac{360}{\omega}$.
- Ж Знайти час T за формулою: $T = \frac{\omega}{360}$.

Завдання з короткою відповіддю

Розв'яжіть завдання 63–92 і запишіть відповідь **ОДНИМ ЧИСЛОМ**.

63. Колобок тікав від Бабусі з Дідусем зі швидкістю 10 км/год доти, доки не зустрів Зайчика; від Зайчика до Вовчика він котився вже зі швидкістю 8 км/год, а від Вовчика до Лисички (Ведмідь увесь день спав у барлозі й тому Колобку не зустрівся) — зі швидкістю 6 км/год. Знайдіть середню швидкість Колобка (у км/год) під час усієї подорожі, якщо від дому до Зайчика було 10 км, від Зайчика до Вовчика — 6 км, а від Вовчика до Лисички — 2 км.

64. Івасик-Телесик, рятуючись від Баби Яги, спочатку біг до Дуба 2 км зі швидкістю 6 км/год, потім летів на гусях-лебедях ще 10 км зі швидкістю 15 км/год, і нарешті до самої домівки йшов 3 км зі швидкістю 3 км/год. Знайдіть середню швидкість Івасика (у км/год) протягом усієї подорожі.
65. Альпініст Терентій Сміливий здійснив сходження на гору Високу. Відомо, що він підіймався угору зі швидкістю 4 км/год, а спускався зі швидкістю 6 км/год. Знайдіть середню швидкість пана Сміливого за час, який тривав увесь похід, якщо відомо, що схил, яким він підіймався, мав утричі меншу довжину, ніж схил, яким він спускався, а час відпочинку на вершині був удвічі більший за час підйому на неї.
66. Довжина автобусного маршруту 10 км. У годину пік маршрутне таксі зменшує кількість зупинок, унаслідок чого тривалість поїздки скорочується на 4,5 хв, а середня швидкість збільшується на 30 км/год. З якою середньою швидкістю (у км/год) їде маршрутка в годину пік?
67. Після технічної зупинки поїзд на перегоні в 360 км ліквідував запізнення, збільшивши швидкість від 90 до 120 км/год. Скільки хвилин тривала технічна зупинка цього поїзда?
68. Пасажирський поїзд затримався на 24 хв і на перегоні 240 км надолужив згаяний час, збільшивши свою швидкість на 20 км/год. Знайдіть заплановану швидкість цього поїзда на вказаному перегоні.
69. Бізнесмен Стецько поїхав на ділову зустріч. Перші 280 км шляху він проїхав, спокійно роздивляючись краєвиди за вікном. Однак, помітивши, що може спізнитися, збільшив швидкість на 10 км/год і через 480 км вчасно прибув на зустріч, витративши на весь шлях 10 год. На якій швидкості (у км/год) милувався краєвидами бізнесмен Стецько?
70. Відстань від вікна Малюка до хатинки Карлсонової бабусі дорівнює 80 км. Одного разу Карлсон, гарненько пообідавши у Малюка, летів на вечерю до бабусі і запізнився на 24 хв. Проаналізувавши ситуацію, Карлсон розраховував, що для того, щоб наступного разу не залишитися без торта, потрібно збільшити швидкість свого руху на 10 км/год. Скільки хвилин Карлсон летів того разу, коли запізнився?
71. Рибінспектор Сидор Недрімайло в понеділок гнався за браконьєрами 12 км за течією річки і стільки само — проти течії, а у вівторок — 4 км за течією річки і 8 км — проти течії. Першого разу на гонитву було витрачено 2,5 год, а другого — 1 год 20 хв. Знайдіть швидкість течії річки (у км/год).

72. Відстань між вантажним і пасажирським річковими портами дорівнює 24 км. Якщо від вантажного порту до пасажирського за течією річки попливуть два катери, то перший прийде до місця призначення на 2 год раніше, ніж другий. Якби катери рухалися назустріч один одному (перший із вантажного порту, а другий — із пасажирського), то вони б зустрілися через 3 год. Власна швидкість другого катера втричі більша за швидкість течії річки. Знайдіть швидкість течії річки (у км/год).
73. Двоє велосипедистів виїхали одночасно назустріч один одному з двох пунктів, відстань між якими дорівнює 240 км. Другий велосипедист проїжджає щогодини на 4 км менше, ніж перший, і зустрічається з ним через стільки годин, скільки кілометрів за годину проїжджає перший велосипедист. Знайдіть швидкість (у км/год) першого велосипедиста.
74. Два пішоходи вийшли одночасно з того самого пункту в протилежних напрямках. Швидкість першого пішохода на 2 км/год більша за швидкість другого. Через певну кількість годин, що чисельно дорівнює швидкості першого пішохода (у км/год), відстань між пішоходами стала 40 км. Знайдіть швидкість (у км/год) другого пішохода.
75. Лисичка-сестричка вибігла з курника, а через 1 хв звідти вибіг песик Рябко і погнався за нею. Через скільки СЕКУНД Рябко наздожене лисичку, якщо його швидкість у 4 рази більша за її швидкість?
76. Курочка Ряба вибігла з курника, а через 30 с звідти вибіг півник Золотий Гребінець і побіг за нею. Через скільки ХВИЛИН півник наздожене курочку, якщо його швидкість втричі більша за її швидкість?
77. Двоє спортсменок бігають по тій самій доріжці стадіону з постійними, але різними швидкостями. Першій із них, щоб пробігти одне коло, потрібно 4 хв 30 с, а другій — 6 хв. Одного разу вони стартували одночасно з однієї точки і побігли в один бік. Через скільки ХВИЛИН після старту вони вперше зустрінуться?
78. Двоє спортсменів бігають по тій самій доріжці стадіону з постійними, але різними швидкостями. Першому з них, щоб пробігти одне коло, потрібно 2 хв 30 с, а другому — 1 хв 40 с. Одного разу вони стартували одночасно з однієї точки і побігли в різні боки. Через скільки СЕКУНД після старту вони вперше зустрінуться?
79. У аквапарку о 18-00 почали спуск води в басейні, причому вода витікала з нього з постійною швидкістю. О 18-30 у цьому басейні залишилося 500 м^3 води, а о 20-00 — 50 м^3 води. Скільки води (у м^3) було в басейні о 18-00?

80. У аквапарку о 6-30 почали наповнювати порожній басейн, причому вода наповнювала його з постійною швидкістю. О 8-00 у басейні було 300 м^3 води, а о 9-00 басейн наповнився. Скільки води (у м^3) було в цьому басейні о 9-00?
81. Яхта капітана Врунгеля, яка спочатку мала назву «ПОБЕДА» (російською мовою), оснащена десятьма насосами, які за 10 хв можуть викачати з трюму 10 т води. Після того як Джуліко Бандитто і де ля Воро Гангстеритто поцупили з борту яхти дві перші літери його назви, Врунгелю довелося замовити ще 15 таких самих насосів. За скільки хвилин усі насоси, встановлені тепер на яхті, зможуть викачати із трюму 50 т води?
82. Будівельна компанія отримала замовлення на реконструкцію будинку за 36 днів. Для цього необхідно було виділити 84 робітники, але протягом 18 днів працювали всього 24 робітники, а протягом наступних 6 днів — 168 робітників. Скільки потрібно виділити робітників на останні 12 днів роботи, щоб завершити реконструкцію вчасно? Примітка: при розв'язанні задачі вважаємо, що всі робітники працюють з однаковою продуктивністю.
83. Михайлик максимально наповнив власну надувну гірку повітрям, вимкнув компресор і почав гратися. Але Миколка непомітно пробив у гірці дірочку і сховався. Через 30 хв після хуліганського вчинку Миколки Михайлик помітив, що повітря поменшало, і одразу увімкнув компресор, не заклеївши дірочки. Через скільки хвилин після ввімкнення компресора гірка знову наповниться максимально, якщо компресор за одну хвилину накачує у 6 разів більше повітря, ніж виходить крізь дірочку?
84. Дмитрик Неуважний наповнив ванну до країв, закрив кран і почав купатися. Однак у процесі купання зливник непомітно відкрився. Через 40 с після цього Дмитрик помітив, що води поменшало, і одразу відкрив кран, не закривши зливник. Через скільки секунд після ввімкнення крану ванна знову наповниться до країв, якщо вода з крана наливається у 5 разів швидше, ніж виливається через зливник?
85. Сержант Петро Цікавий і старшина Дмитро Пихатий отримали завдання викопати яму. Перші 4 год сержант копав яму самостійно, а на заключні 2 год роботи до нього приєднався старшина. Відпочиваючи після важкої праці, Цікавий розрахував, що він би копав усю яму один на 3 год довше, ніж всю цю яму копав би один Пихатий. Скільки годин закопуватиме наступного дня цю яму старшина без сержанта, якщо темп закопування втричі більший за темп копання?

86. Під час шторму яхта «БЕДА» (російською мовою) отримала пробоїну, і доки матрос Фукс та старший помічник Лом її латали, в трюм натекло багато води. Для відкачування води на яхті є дві однакові ручні помпи, за допомогою яких Фукс і Лом разом відкачали всю воду з трюму за 2 год 24 хв. Капітан Врунгель, спостерігаючи за роботою команди, розрахував, що якби на яхті була тільки одна така помпа і половину всієї води відкачав Фукс, а решту — Лом, то рятувальні роботи було б завершено за 5 год. За скільки ХВИЛИН Лом відкачав би всю воду з трюму сам, якщо відомо, що він працює швидше за Фукса?
87. Повітряна куля «Монгольф'єр» має об'єм 50 м^3 . Для керування висотою її польоту передбачено отвір, через який із кулі випускають повітря, і отвір, через який її наповнюють повітрям. «Монгольф'єр» надувають за допомогою компресора, що працює з продуктивністю $20 \text{ м}^3/\text{год}$. Одного разу перед польотом порожню кулю почали наповнювати повітрям за допомогою компресора, але при цьому забули закрити отвір для спускання повітря, у результаті чого «Монгольф'єр» наповнився повітрям за 10 год. З якою швидкістю (у $\text{м}^3/\text{год}$) виходило повітря з отвору?
88. До басейну об'ємом 24 м^3 підведено 2 труби: через першу трубу вода може тільки виливатися з басейну зі швидкістю $2 \text{ м}^3/\text{год}$, а через другу — тільки наповнювати басейн. Під час першого пуску води помилково було задіяно обидві труби, і в такому режимі басейн наповнився рівно наполовину, після цього зливник було закрито. У підсумку басейн наповнився тільки через 28 год 48 хв після початку процедури. З якою швидкістю (у $\text{м}^3/\text{год}$) наливалася вода в басейн через другу трубу?
89. Зграя хробаків запланувала поласувати кукурудзою на площі 120 га протягом певного часу. Однак, дякуючи посиленню апетиту, хробаки з'їдали щодня кукурудзу на площі, на 4 га більшій, ніж планували, і закінчили поїдання на 1 день раніше. Протягом скількох днів хробаки ФАКТИЧНО отримували задоволення від смаку кукурудзи?
90. Книжка про Гаррі Поттера має 480 сторінок. Купуючи Петрику цю книжку, батьки порадили йому читати щодня однакову кількість сторінок. Петрик виконав їх прохання, але за рахунок нічного читання додаткових 20 сторінок під ковдрою з ліхтариком роман було дочитано на 2 дні раніше запланованого терміну. Скільки днів Петрик читав книжку?

91. Тітонька Одарка доручила дядькові Панькові викопати картоплю на городі за кілька днів. Дядько Панько знає, що посадив 20 рядків картоплі, причому в кожному рядку було 24 лунки і вся посаджена картопля зійшла та вродила. Одарка порадила Панькові щодня викопувати картоплю з певної однакової кількості лунок, але Панько її не послухав і обробляв щодня на 8 лунок більше. У результаті дядько завершив роботу на 2 дні раніше запланованого тітонькою терміну. Зі скількох лунок щодня пропонувала збирати врожай працьовитому Панькові турботлива Одарка?
92. Затяті рибалки Іван та Геннадій щодня виловлювали однакову кількість карасів, причому Геннадій виловлював щодня на 2 карасі більше, ніж Іван. За домовленістю з місцевим притулком для самотніх котів Іван мав виловити 28 карасів, а Геннадій — 60 карасів. У підсумку виявилося, що для виконання домовленості Івану знадобилося на 3 дні менше, ніж Геннадію. Скільки карасів щодня виловлював Іван?

Завдання з повним розв'язанням

Завдання 93–100 розв'яжіть із повним обґрунтуванням, посилаючись на відповідні означення, твердження, формули. У разі потреби проілюструйте розв'язання таблицями, діаграмами, графіками тощо.

93. Барани Буц і Бац вирішили визначити, у кого міцніший лоб, і розбіглися для удару так, що відстань між ними становила 1800 м. Заплющивши від хоробрості очі, вони одночасно помчали назустріч один одному і... розминулися біля великого каменя. При цьому Буц добіг від каменя до місця старту Баца за 1 хв 36 с, а Бац до місця старту Буца — за 2 хв 30 с. Знайдіть швидкості Буца і Баца (у м/хв).
94. Дядько Панько виїхав на конях із села Зачепилівка до села Забурбелівка о 9-00, а о 9-20 у тому ж напрямку на мотоциклі вирушила його дружина — тітонька Одарка. Зустрівши Панька через 9 км, вона приїхала в Забурбелівку, провела там 40 хв і на зворотному шляху вдруге зустріла Панька за 27 км від місця першої зустрічі. Знайдіть:
- а) час, за який Одарка пододала зворотний шлях із Забурбелівки до місця другої зустрічі з Паньком;
 - б) відстань від Зачепилівки до Забурбелівки, якщо швидкість Панька 18 км/год.

95. Трава на галявині росте з постійною швидкістю. Відомо, що 70 корів з'їли б усю траву за 24 дні, а 30 корів — за 60 днів. Скільки корів у стаді пастуха Івана, якщо це стадо з'їдає всю траву на галявині за 96 днів?
96. За статистичними даними, які має керівництво туристичного клубу «Екстремал», під час подорожі пустелею вода з каністр фірми «ВУСО» випаровується з певною постійною швидкістю. За тими самими даними групі з трьох осіб вистачає води з однієї повної каністри «ВУСО» на 16 днів, а групі з п'яти осіб вистачає води з такої самої повної каністри на 10 днів. Скільки каністр «ВУСО» потрібно для спорядження туристичної групи з 14 осіб у подорож по пустелі тривалістю 20 днів?
97. Двоє веселих мурашок заповзли у старовинний настінний годинник, який ІДЕ ПРАВИЛЬНО, і вирішили трохи покататися на його стрілках. Довжина годинної стрілки цього годинника дорівнює 5 см, а довжина хвилинної — 7 см. Умостившись на самих кінчиках різних стрілок, мурашки поїхали о 23-00. Скільки хвилин пройшло до того моменту, коли відстань по прямій між комахами ВПЕРШЕ стала 12 см?
98. Двоє веселих тарганів заповзли у старовинний настінний годинник, який ІДЕ ПРАВИЛЬНО, і вирішили трохи покататися на його стрілках. Довжина годинної стрілки цього годинника дорівнює 3 см, а довжина хвилинної — 4 см. Умостившись на самих кінчиках різних стрілок, таргани поїхали о 13-00. Скільки хвилин пройшло до того моменту, коли відстань по прямій між комахами ВПЕРШЕ стала 5 см?
99. Два «механічні кроти» різної потужності при одночасній роботі з різних кінців тунелю могли б вирити його за 6 днів. Насправді ж обидва «кроти» використовувалися по черзі з одного боку тунелю, причому перший вирив $\frac{1}{3}$ всієї довжини тунелю, а другий — решту, і на виконання всієї роботи знадобилося 12 днів. За скільки днів кожен «механічний кріт» міг би прорити цей тунель, працюючи самостійно?
100. Три автоматичні лінії з різними потужностями випускають однакову продукцію. Продуктивність трьох одночасно діючих ліній у 1,5 раза більша, ніж продуктивність першої та другої ліній, що працюють одночасно. Денну норму друга і третя лінії, працюючи разом, можуть виконати за 4 год 48 хв швидше, ніж тільки перша лінія. Цю саму норму тільки друга лінія виконує за 2 год швидше, ніж тільки перша лінія. За який час кожна з цих автоматичних ліній може виконати денну норму?

5.3. Задачі на відсотки та на подільність цілих чисел

Найпростіші завдання з повним розв'язанням

Завдання 1–20 розв'яжіть УСНО.

1. На заводі кожну двадцятку деталь перевіряють на якість. Скільки деталей перевірили у партії, яка містила 220 деталей?
2. Під час екзит-полу опитують кожного десятого учасника голосування. Яка **НАЙБІЛЬША** кількість людей могла взяти участь у голосуванні на деякій ділянці, якщо під час екзит-полу на ній було опитано 137 осіб?
3. Подайте у вигляді відсотків: 0,3; 1,27; 3,4; 0,006; 45; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{7}{4}$; $\frac{14}{5}$.
4. Подайте у вигляді десяткових або звичайних дробів: 11%; 75%; 700%; 450%; 0,2%; 0,032%; 1,46%; $\frac{1}{3}$ %; $\frac{33}{7}$ %; $7\frac{1}{6}$ %.
5. Знайдіть: 10 % від 70; 25 % від 400; 50 % від 50; 100 % від 40; 500 % від 3.
6. Розчин містить 5 % солі. Скільки грамів чистої солі міститься у 500 г її розчину?
7. Сплав олова та свинцю містить 20 % олова. Скільки кілограмів свинцю міститься у 20 кг цього сплаву?
8. Знайдіть число, якщо:
 - а) 50 % цього числа дорівнює 6;
 - б) 25 % цього числа дорівнює 12;
 - в) 300 % цього числа дорівнює 60.
9. Податок становить 20 % від суми зароблених грошей. Скільки грошей заробив підприємець, якщо він сплатив 5000 грн податку?
10. Укажіть, скільки відсотків становить 10 від 100; 10 від 200; 20 від 1000; 100 від 20; 200 від 50; 9 від 25; 7 від 5; 53 від 50.
11. Укажіть, на скільки відсотків 100 більше за 50; 50 менше за 100; 50 більше за 20; 20 менше за 50; 10 більше за 8; 8 менше за 10.

12. До 80 г дистильованої води додали 20 г солі, яка повністю розчинилась у воді. Знайдіть концентрацію цієї солі в утвореному розчині (у %).
13. Тістечко коштує 3 грн. Яку **НАЙБІЛЬШУ** кількість тістечок можна купити, якщо мати 17 грн 50 к.?
14. Яка **НАЙМЕНША** кількість банок місткістю 0,5 л потрібна, щоб розлити в них 6,2 л варення?
15. Дано цілі числа: 1236; 2025; 2310; 8730; 7512, 54000. Які з них діляться націло на 2; 3; 4; 5; 6; 8; 9; 10?
16. Знайдіть остачу від ділення 3759 на 2; 35 на 3; 516 на 4; 376 на 5; 482 на 10; 999 на 9.
17. У кожному купе вагона поїзда є 4 місця. Укажіть номер купе, де їде пасажир, якщо номер його місця 3; 9; 18; 28.
18. Зелений, жовтий і червоний кольори світлофора горять послідовно по черзі 30 с, 10 с і 20 с відповідно. У певний момент часу загорілося зелене світло. Визначте, яке світло горітиме через 20 с; 55 с; 2 хв; 5 хв 34 с.
19. Дано цілі числа: 1; 2; 5; 6; 9; 14; 17; 29; 31; 35; 37; 45; 67; 72; 81; 91; 99. Які з них є простими?
20. Знайдіть найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне чисел 12 і 24; 5 і 11; 6 і 9; 4 і 9; 100 і 30; 100 і 60.

Завдання з вибором однієї правильної відповіді

Проаналізуйте умови та вимоги завдань 21–50 та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

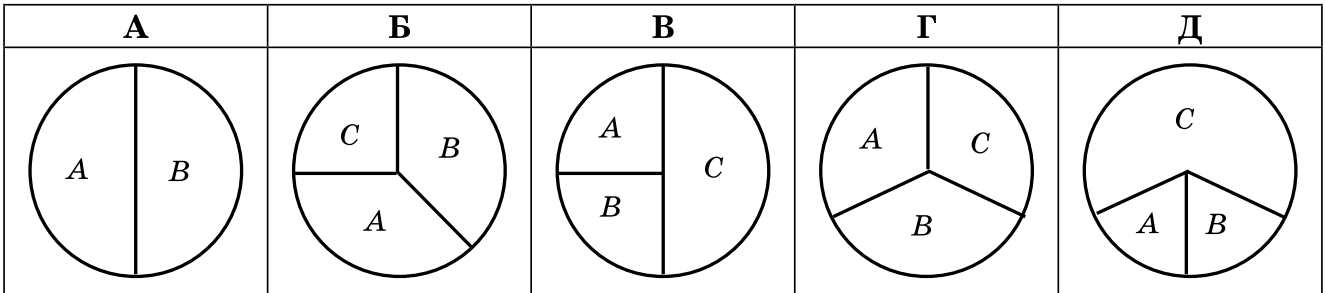
21. Скільки відсотків від години становлять 12 хв?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{5} \%$	5 %	12 %	20 %	24 %

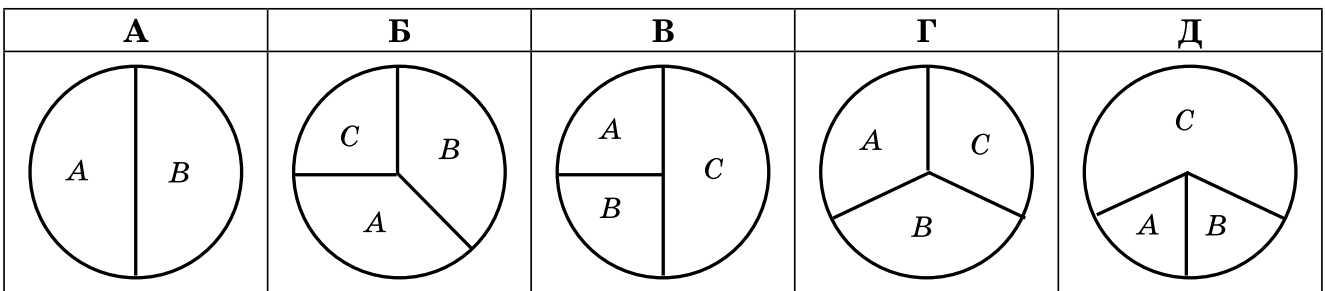
22. Скільки відсотків від доби становлять 3 год?

А	Б	В	Г	Д
25 %	12,5 %	8 %	3 %	$\frac{1}{8} \%$

23. Три друга Сергій, Славко та Віктор замовили фірмову піцу. Сергій з'їв половину від 50 % усієї піци, Славко з'їв 50 % від половини всієї піци, а решту з'їв Віктор. Укажіть діаграму, на якій може бути зображений розподіл шматочків піци, якою ласували друзі.



24. Три друга Юрко, Руслан та Олексій замовили фірмову піцу. Юрко з'їв 50 % від третини всієї піци, Руслан з'їв третину від 50 % всієї піци, а решту з'їв Олексій. Укажіть діаграму, на якій може бути зображений розподіл шматочків піци, якою ласували друзі.



25. У серпні фірма продала навчальної літератури на суму b грн, а у вересні — на суму $2b$ грн. На скільки відсотків збільшився обсяг продажу навчальної літератури у вересні порівняно із серпнем?

А	Б	В	Г	Д
Відповідь залежить від значення параметра b	На 20 %	На 50 %	На 100 %	На 200 %

26. У вересні фірма продала соків на суму $2c$ грн, а у жовтні — на суму c грн. На скільки відсотків зменшився обсяг продажу соків у жовтні порівняно з вереснем?

А	Б	В	Г	Д
Відповідь залежить від значення параметра c	На 20 %	На 50 %	На 100 %	На 200 %

5.3. Задачі на відсотки та на подільність цілих чисел

27. Ринкова ціна картоплі спочатку зросла на 20 %, потім знизилася на 20 % від нової ціни. Як змінилася ціна картоплі порівняно з початковою?

А	Б	В	Г	Д
Збільшилася на 2 %	Збільшилася на 4 %	Не змінилася	Зменшилася на 4 %	Зменшилася на 2 %

28. Вартість товару була підвищена на 25 %. На скільки відсотків необхідно зменшити нову вартість товару, щоб одержати початкову вартість товару?

А	Б	В	Г	Д
На 15 %	На 20 %	На 25 %	На 30 %	На 40 %

29. Три подружки Світланка, Маринка та Оксанка збирали волошки. Відомо, що Маринка збрала 50 % від кількості волошок, зібраних Світланкою, а Оксанка збрала 40 % від кількості волошок, зібраних Маринкою. На скільки відсотків Оксанка збрала менше волошок, ніж Світланка?

А	Б	В	Г	Д
На 10 %	На 90 %	На 20 %	На 400 %	На 80 %

30. Три подружки Маринка, Даринка та Яринка збирали ромашки. Відомо, що Даринка збрала 80 % від кількості ромашок, зібраних Маринкою, а Яринка збрала 50 % від кількості ромашок, зібраних Даринкою. На скільки відсотків Яринка збрала менше ромашок, ніж Маринка?

А	Б	В	Г	Д
На 150 %	На 30 %	На 60 %	На 130 %	На 70 %

31. Відомо, що у сплаві міді та олова масою 60 кг міститься менше ніж 30 % міді. Серед варіантів відповідей укажіть той, що **МОЖЕ** виражати масу чистого олова в цьому сплаві.

А	Б	В	Г	Д
9 кг	18 кг	30 кг	42 кг	51 кг

32. Відомо, що у сплаві срібла та золота масою 20 г міститься більше ніж 40 % срібла. Серед варіантів відповідей укажіть той, що **МОЖЕ** виражати масу чистого золота в цьому сплаві.

А	Б	В	Г	Д
10 г	12 г	14 г	16 г	18 г

33. Змішали 100 мл 10% -го розчину соляної кислоти і 400 мл 20% -го розчину соляної кислоти. Знайдіть концентрацію соляної кислоти в отриманій суміші.

А	Б	В	Г	Д
15 %	12 %	16 %	14 %	18 %

34. Сплавили 2 кг залізної руди, що містить 40 % заліза, і 3 кг залізної руди, що містить 20 % заліза. Знайдіть відсотковий вміст заліза в отриманому сплаві.

А	Б	В	Г	Д
30 %	28 %	32 %	25 %	35 %

35. Для маринування томатів потрібен 12% -й розчин оцтової кислоти. На складі томатного цеху є тільки 20% -й і 5% -й розчини цієї кислоти. У якому відношенні слід взяти ці розчини (кількість 20% -го розчину до кількості 5% -го розчину), щоб отримати маринад для томатів?

А	Б	В	Г	Д
1:2	3:4	5:6	7:8	9:10

36. Для маринування огірків потрібен 16% -й розчин оцтової кислоти. На складі консервного цеху є тільки 10% -й і 40% -й розчини цієї кислоти. У якому відношенні слід взяти ці розчини (кількість 10% -го розчину до кількості 40% -го розчину), щоб отримати маринад для огірків?

А	Б	В	Г	Д
2:1	5:2	3:1	7:2	4:1

37. Укажіть число, яке ділиться на 3.

А	Б	В	Г	Д
214	224	234	244	254

38. Укажіть число, яке ділиться на 9.

А	Б	В	Г	Д
519	619	719	819	919

39. Після уроку математики на дошці залишився напис: «Число $5 \cdot 2$ ділиться і на 3, і на 4». Цифру, позначену зірочкою, стер черговий учень Денис, коли підстрибнув із ганчіркою, щоб витерти дошку. Але він не зміг цього зробити повністю, бо напис був надто високо. Яку цифру стер Денис?

А	Б	В	Г	Д
1	7	5	3	8

40. Яка цифра має стояти в числі $151*2$ замість зірочки, щоб це число ділилося одночасно і на 9, і на 4?

А	Б	В	Г	Д
9	6	4	3	0

41. Відомо, що n — парне натуральне число. Який із наведених виразів **ОВОБ'ЯЗКОВО** ділиться на 6?

А	Б	В	Г	Д
$n^2 - 1$	$n^3 - 1$	$n^3 - n$	$n^3 + 1$	$n^3 + n$

42. Відомо, що n — непарне натуральне число. Який із наведених виразів **ОВОБ'ЯЗКОВО** ділиться на 4?

А	Б	В	Г	Д
$n^2 - 1$	$n^2 + 1$	$n^3 + 1$	$n^3 - 1$	$n^3 + n$

43. Охоронець Борис чергує один раз на 4 доби, а прибиральниця Марія — один раз на 2 доби. Одного разу їх чергування припали на понеділок. Скільки діб пройде до того часу, коли вони **ВПЕРШЕ** після цього збігу знову чергуватимуть у понеділок?

А	Б	В	Г	Д
4 доби	14 діб	28 діб	42 доби	56 діб

44. Два пароплави заходять у порт після кожного рейсу. Перший виконує рейс за 4 дні, а другий — за 6 днів. Якось вони зустрілися в порту в неділю. Через скільки днів вони **ВПЕРШЕ** знову зустрінуться в порту в неділю?

А	Б	В	Г	Д
Через 12 днів	Через 24 дні	Через 28 днів	Через 56 днів	Через 84 дні

45. Зайчик і Білочка стрибали по лісовій доріжці, заметеній снігом. Довжина одного стрибка Зайчика дорівнює 40 см, а довжина одного стрибка Білочки — 25 см. У якийсь момент їх сліди опинилися поруч. Скільки стрибків зробить Зайчик для того, щоб його сліди знову опинилися поруч зі слідами Білочки?

А	Б	В	Г	Д
4 стрибки	5 стрибків	6 стрибків	7 стрибків	8 стрибків

46. Батько із сином вирішили поміряти кроками відстань між двома деревами. Вони домовилися йти одночасно від того самого дерева. Довжина кроку батька дорівнює 70 см, а довжина кроку сина — 56 см. Знайдіть відстань між деревами, якщо відомо, що сліди батька і сина збіглися 10 разів.

А	Б	В	Г	Д
22 м	24 м	26 м	28 м	30 м

47. Число N при діленні на 20 дає в остачі 7. Знайдіть остачу від ділення числа $3N$ на 5.

А	Б	В	Г	Д
0	1	2	3	4

48. Число M при діленні на 10 дає в остачі 3. Знайдіть остачу від ділення числа $4M$ на 5.

А	Б	В	Г	Д
0	1	2	3	4

49. Між правим і лівим берегами річки курсує катер, який починає перший рейс о 7-00 від лівого берега, а потім кожні 30 хв вирушає в новий рейс від одного берега до іншого, перевозячи щоразу не більше ніж 40 пасажирів. Укажіть час, коли **НАЙРАНИШЕ** може вирушити в рейс людина, яка зайняла чергу на лівому березі о 9-10 і була в ній дев'яносто восьмою?

А	Б	В	Г	Д
10-00	10-30	11-00	11-30	12-00

50. Між селом та містом курсує автобус, який починає перший рейс о 7-00 із міста, а потім кожні 30 хв вирушає в новий рейс між містом і селом, перевозячи щоразу не більше ніж 30 пасажирів. Укажіть час, коли **НАЙРАНИШЕ** може вирушити в рейс людина, яка зайняла чергу в місті о 10-40 і була в ній тридцять третьою?

А	Б	В	Г	Д
12-00	12-30	13-00	13-30	14-00

У завданнях 51–54 сформульовано проблему (питання), яку потрібно розв'язати (отримати однозначну відповідь на питання), використовуючи для цього додаткові дані — твердження (1) і (2). Визначте, чи достатньо цих даних для розв'язання проблеми, і оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь*.

51. На ляльковій виставі були присутні як дорослі, так і діти. Знайдіть, скільки відсотків від усіх глядачів становили діти.

(1) $\frac{1}{3}$ усіх глядачів становили дорослі.

(2) $\frac{2}{3}$ усіх глядачів становили діти.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

52. Троє викладачів зібрали разом 1500 гривень. Знайдіть, скільки відсотків від загальної кількості гривень зібрав перший із них.

(1) Другий викладач зібрав у 2 рази більше гривень, ніж третій.

(2) Третій викладач зібрав 300 гривень.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

53. Знайдіть, яку цифру позначено зірочкою у числі 257*.

(1) Число 257* є парним.

(2) Число 257* ділиться націло на 3.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

* Саму проблему розв'язувати не обов'язково.

54. Знайдіть, яку цифру позначено зірочкою у числі $82*4$.

(1) Число $82*4$ ділиться націло на 4.

(2) Число $82*4$ ділиться націло на 9.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

У завданнях 55–56 порівняйте величини X і Y та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

55. Відомо, що $a > 0$.

Величина X : 400 % від числа a .

Величина Y : 50 % від числа $8a$.

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

56. У кошику лежали яблука та груші, причому їх загальна маса дорівнювала 6 кг. Пізніше 70 % яблук і 50 % груш із цього кошика з'їли.

Величина X : 3.

Величина Y : маса фруктів, що залишилися в кошику (у кг).

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

Завдання на встановлення відповідності

У завданнях 57–60 до кожного рядка, позначеного цифрою, доберіть один відповідник, позначений літерою.

- 57.** Установіть відповідність між задачами (1–4) і твердженнями (А–Д), які є відповідями до цих задач.
- | | |
|---|------------|
| 1 Ціна деякого товару після двох послідовних підвищень зросла на 68 % від початкової ціни. Відомо, що першого разу ціну підвищили на 40 %. На скільки відсотків від ціни, яка утворилася внаслідок першого підвищення, підвищили ціну другого разу? | А На 20 % |
| 2 Для додатних чисел a і b виконується рівність $b = 2a$. На скільки відсотків треба збільшити число a , щоб у результаті отримати число b ? | Б На 25 % |
| 3 Вартість деякого товару зросла з 400 грн до 500 грн. На скільки відсотків від початкової ціни зросла ціна цього товару? | В На 28 % |
| 4 Чисельник звичайного дроби збільшили на 50 %. На скільки відсотків збільшився весь дріб? | Г На 50 % |
| | Д На 100 % |
- 58.** Установіть відповідність між задачами (1–4) і твердженнями (А–Д), які є відповідями до цих задач.
- | | |
|---|-----------|
| 1 До 100 мл 20%-го розчину солі долили 100 мл дистильованої води. На скільки відсотків зменшилася концентрація солі в розчині? | А На 5 % |
| 2 Шляхом кип'ятіння зі 100 мл 20%-го розчину солі випарили 50 мл води. На скільки відсотків збільшилася концентрація солі в розчині? | Б На 10 % |
| 3 Змішали 100 мл 10%-го розчину солі та 100 мл 20%-го розчину тієї самої солі. На скільки відсотків концентрація солі в суміші відрізняється від концентрації солі в менш концентрованому розчині? | В На 15 % |
| 4 До 100 мл 10%-го розчину солі долили 200 мл розчину тієї самої солі іншої концентрації. У результаті отримали 20% -й розчин солі. На скільки відсотків концентрація солі в долитому розчині відрізнялася від концентрації солі в початковому розчині? | Г На 20 % |
| | Д На 25 % |

59. Установіть відповідність між числами (1–4) і числовими виразами (А–Д), значення яких є взаємно простими з цими числами.
- | | |
|------|--------------|
| 1 6 | А 2·3·5·7·11 |
| 2 15 | Б 2·3·5 |
| 3 35 | В 2·3·11 |
| 4 77 | Г 2·7·11 |
| | Д 5·7·11 |
60. Установіть відповідність між числами (1–4) і числами (А–Д), які є взаємно простими з цими числами.
- | | |
|------|--------|
| 1 6 | А 385 |
| 2 10 | Б 165 |
| 3 14 | В 231 |
| 4 22 | Г 105 |
| | Д 1155 |

Завдання на встановлення послідовності

У завданнях 61–62 виберіть тільки необхідні для розв'язання поставленої задачі дії і розмістіть їх у правильній послідовності. У відповідь запишіть отриману послідовність літер.

61. Відомо, що $x > y > 0$. Як можна перевірити, на скільки відсотків число x більше за число y ?
- А Знайти число k з рівності $k = \frac{x}{y}$.
- Б Знайти число k з рівності $k = \frac{y}{x}$.
- В Знайти число k з рівності $k = x - y$.
- Г Знайти число k з рівності $k = x + y$.
- Д Шукане число відсотків знайти за формулою $k \cdot 100\%$.
- Е Шукане число відсотків знайти за формулою $(k - 1) \cdot 100\%$.
- Є Шукане число відсотків знайти за формулою $(k + 1) \cdot 100\%$.
62. Як можна перевірити, чи ділиться натуральне число a на 9?
- А Знайти суми цифр числа a , які стоять на непарних і на парних місцях, рахуючи зліва направо. Знайти число s як різницю цих сум.
- Б Знайти число s як суму цифр числа a .
- В Знайти число s як число, утворене з двох останніх цифр числа a .
- Г Знайти число s як число, утворене з трьох останніх цифр числа a .
- Д Знайти число s як останню цифру числа a .
- Е Якщо остання цифра числа s є цифрою 9, то число a ділиться на 9.
- Є Якщо число s ділиться на 9, то і число a ділиться на 9.

Завдання з короткою відповіддю

Розв'яжіть завдання 63–92 і запишіть відповідь ОДНИМ ЧИСЛОМ.

- 63.** Вартість проїзду в автобусі між деякими двома містами становила 20 грн. Через певний час вартість проїзду на автобусі між цими містами збільшилася на 50 %. Визначте нову вартість проїзду (у грн).
- 64.** Методичний посібник коштував 80 грн. Через певний час його ціна знизилася на 40 %. Визначте нову ціну посібника (у грн).
- 65.** Скільки грошей (у грн) буде на банківському рахунку через рік, якщо покласти на нього 2000 грн під 9 % річних щороку?
- 66.** Банк сплачує своїм вкладникам 8 % річних наприкінці року. Скільки грошей (у грн) потрібно покласти на рахунок у цьому банку на початку року, щоб через рік отримати 500 грн відсоткових грошей?
- 67.** За одну сорочку і дві однакові футболки заплатили 390 грн. Після того як сорочка подешевшала на 20 %, а футболка подешевшала на 10 %, вартість трьох сорочок і однієї футболки становила 468 грн. Знайдіть ціну (у грн) однієї сорочки ДО подорожчання.
- 68.** Вкладник поклав до банку 12000 грн, розділивши всю суму на дві частини. Першу частину коштів було покладено на депозит, за яким банк виплачує 9 % річних щороку, а другу частину коштів — на депозит, за яким банк виплачує 10 % річних щороку. Через рік вкладник отримав 1170 грн відсоткових грошей. Скільки грошей (у грн) було в другій частині суми?
- 69.** Дід Макар вирішив продати своїх телят. У перший тиждень їх ніхто не купив, і довелося знизити ціну на 25 %. Через тиждень Макар знизив ціну **ЩЕ** на 20 %, і тільки тоді телят купив дід Грицько за 720 грн. Якою була початкова ціна телят?
- 70.** Бізнесмен Стецько вклав в акції компаній «ОГО!!» та «АГА...» 2400 грн. Протягом року акції «ОГО!!» подорожчали на 15 %, а акції «АГА...» подешевшали на 20 %. Після продажу акцій обох компаній Стецько отримав 2550 грн. Знайдіть відношення початкового внеску Стецька в акції компанії «ОГО!!» до початкового внеску в акції компанії «АГА».
- 71.** Вкладник поклав до банку 10000 грн на депозитний рахунок під певний відсоток річних щорічно. Унаслідок економічного зростання через рік відсоток річних було збільшено на 4 %. Наприкінці другого року на рахунок цього вкладника було 12096 грн. Знайдіть початкову відсоткову ставку.

72. Вкладник поклав до банку 10 000 грн на депозитний рахунок під певний відсоток річних щорічно. Унаслідок кризових явищ через рік відсоток річних було зменшено на 5 %. Наприкінці другого року на рахунку цього вкладника було 12 650 грн. Знайдіть початкову відсоткову ставку.
73. Сестрички-близнючки Катя та Юля збирали гриби в лісі. Якщо кількість грибів, які збрала Катя, збільшити на 20 %, а кількість грибів, які збрала Юля, зменшити на 10 %, то грибів у них стане порівну. На скільки відсотків початкова кількість грибів, зібраних Катєю, менша, ніж початкова кількість грибів, зібраних Юлею?
74. Братики-близнюки Данило та Яша купили цукерки в магазині. Якщо кількість цукерок, що купив Данило, зменшити на 20 %, а кількість цукерок, що купив Яша, збільшити на 10 %, то цукерок у них стане порівну. На скільки відсотків початкова кількість цукерок, куплених Данилом, більша, ніж початкова кількість цукерок, куплених Яшею?
75. У класі 24 учні. Кожен любить або фізику, або лірику, або і те і те. Виявилося, що серед любителів фізики 20 % люблять лірику, а серед любителів лірики 25 % — любителі фізики. Скільки учнів люблять і те і те?
76. Кількість розумних дівчат у Хацапетівці на 40 % більша від кількості красивих, а 25 % розумних є красивими. Який відсоток розумних серед красивих?
77. Молода домогосподарка прочитала в кулінарній книжці, що суп має містити НЕ БІЛЬШЕ ніж 0,5 % солі. Однак у 2-літрову каструлю вже було покладено стільки солі, що її вміст становив 2 %. Яку МІНІМАЛЬНУ кількість літрів води потрібно долити в майбутній суп, щоб дотриматися поради кулінарів?
78. До розчину, який містить 40 г солі, додали 100 г води. Після цього концентрація солі в розчині стала 10 %. Скільки грамів води містив початковий розчин?
79. Є два сплави міді й цинку. Перший сплав містить 20 % цинку, а другий — 10 % цинку. Їх сплавили разом і отримали новий сплав масою 400 г, який містить 13 % цинку. Скільки грамів першого сплаву було взято?
80. Є два сплави олова та свинцю. Перший сплав містить 5 % олова, а другий — 40 % олова. Їх сплавили разом і отримали новий сплав масою 210 г, який містить 30 % олова. Скільки грамів першого сплаву було взято?

81. На кожному поверсі 20-поверхового будинку розташовано 8 квартир. Знайдіть номер поверху, на якому розташована квартира № 117, якщо нумерація поверхів та квартир іде знизу догори.
82. Флористична фірма отримала замовлення на виготовлення букетів, у кожному з яких має бути 2 червоні та 5 білих троянд. Яку **НАЙБІЛЬШУ** кількість таких букетів може виготовити ця фірма, якщо у наявності є тільки 60 червоних і 97 білих троянд?
83. У саду ростуть тільки сливи та груші. Кількість слив відноситься до кількості груш як 3:8. Скільки дерев у саду, якщо їх загальна кількість більша за 130, але менша за 140?
84. У пункті прокату, що працює на озері, є тільки човни і катамарани, причому човнів у 8 разів більше, ніж катамаранів. Скільки засобів для плавання є в пункті прокату, якщо їх загальна кількість більша за 80, але менша за 90?
85. У кошику лежить кілька цукерок. Експериментуючи, Карлсон виявив, що їх можна розкласти в 5 рядів, 8 рядів або 12 рядів так, що в кожному з рядів їх кількість буде однаковою. Яка **НАЙМЕНША** кількість цукерок могла бути в цьому кошику?
86. Майстер Ламайстер розгвинтив кілька однакових годинників і отримав 105 великих, 252 середніх і 147 маленьких коліщаток. Яка **НАЙМЕНША** загальна кількість коліщаток різного розміру може бути в **КОЖНОМУ** такому годиннику?
87. Якою цифрою закінчується число 2008^{2011} ?
88. Якою цифрою закінчується число 2007^{2010} ?
89. Дано два трицифрових числа, причому друге записано тими самими цифрами, що й перше, але у зворотному порядку. Різниця цих чисел більша за 700, а друга цифра кожного є середнім арифметичним першої і третьої. Знайдіть суму цих чисел.
90. У деякому трицифровому числі x поміняли місцями першу та другу цифри. У результаті отримали нове число y . Сума цифр числа x дорівнює 10, а різниця чисел x і y ділиться на 63. Знайдіть суму чисел x та y .

91. Петрик задумав двоцифрове число, а Миколка попросив його поміняти місцями цифри в цьому числі й отримати нове двоцифрове число. Після цього Миколка попросив відняти від початкового числа отримане і сказати йому відповідь. Петрик відповів, що в нього вийшло 72, а Миколка у відповідь назвав йому початкове число. Що це за число?
92. Якщо до двоцифрового числа M додати число 27, то отримаємо число, записане тими самими цифрами, що й у числі M , але в зворотному порядку. Знайдіть число M . Якщо таке число єдине, то запишіть ЙОГО у відповідь, а якщо таких чисел кілька, то запишіть НАЙМЕНШЕ з них.

Завдання з повним розв'язанням

Завдання 93–100 розв'яжіть із повним обґрунтуванням, посилаючись на відповідні означення, твердження, формули. У разі потреби проілюструйте розв'язання таблицями, діаграмами, графіками тощо.

93. Комерційний банк нараховує відсотки на депозитні внески за ставкою 16 % річних щокварталу (4 % кварталних). При цьому відсотки нараховуються за складною схемою (кожне наступне нарахування здійснюється від попередньої суми). Знайдіть РІЧНУ відсоткову ставку, еквівалентну даній, якщо відсотки нараховуватимуться ЩОПІВРОКУ також за складною схемою. Примітка: дві річні відсоткові ставки називають еквівалентними, якщо вони з однакових внесків дають однаковий прибуток наприкінці року.
94. Комерційний банк нараховує відсотки на депозитні внески за ставкою 12 % річних щокварталу (3 % кварталних). При цьому відсотки нараховуються за складною схемою (кожне наступне нарахування здійснюється від попередньої суми). Знайдіть РІЧНУ відсоткову ставку, еквівалентну даній, якщо відсотки нараховуватимуться ЩОПІВРОКУ також за складною схемою. Примітка: дві річні відсоткові ставки називають еквівалентними, якщо вони з однакових внесків дають однаковий прибуток наприкінці року.
95. Доведіть, що при будь-якому $n \in \mathbb{N}$ наведені вирази є цілими числами:

а) $\frac{n^2 + 25n}{2}$;

в) $\frac{3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2}}{39}$;

б) $\frac{(n+1)(n^2 + 2n)}{6}$;

г) $\frac{5^n + 5^{n+2}}{130}$.

96. Доведіть, що значення всіх наведених числових виразів НЕ є простими числами:

а) $2^{21} + 1$;

в) $111^{222} + 222^{111}$;

б) $2^{20} - 1$;

г) $5^{200} + 200^5$.

97. До задуманого натурального числа дописали праворуч цифру 9 і від утвореного нового числа відняли квадрат задуманого числа. Після цього отриману різницю зменшили на 90 %, а потім від результату відняли задумане число. У підсумку отримали число 0 (нуль). Знайдіть число, яке було задумано спочатку.

98. До задуманого натурального числа дописали праворуч цифру 7 і від утвореного нового числа відняли квадрат задуманого числа. Після цього отриману різницю зменшили на 75 %, а потім від результату відняли задумане число. У підсумку отримали число 0 (нуль). Знайдіть число, яке було задумано спочатку.

99. Маємо три сплави. Перший сплав містить 30 % олова і 70 % міді, другий — 10 % міді і 90 % свинцю, а третій — 15 % олова, 25 % міді і 60 % свинцю. З цих трьох сплавів приготували новий сплав, що містить 40 % свинцю. Знайдіть найбільший і найменший вміст міді, який може бути в новому сплаві.

100. Маємо три сплави. Перший сплав містить 70 % заліза і 30 % свинцю, другий — 80 % заліза і 20 % цинку, а третій — 50 % заліза, 10 % свинцю і 40 % цинку. З цих трьох сплавів приготували новий сплав, що містить 15 % свинцю. Знайдіть найбільший і найменший вміст заліза, який може бути в новому сплаві.

Розділ 6. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

6.1. Числові послідовності. Арифметична і геометрична прогресії

Найпростіші завдання з повним розв'язанням

Завдання 1–20 розв'яжіть УСНО.

- Знайдіть третій елемент послідовності (a_n) , заданої формулою n -го елемента:
 - $a_n = 3n$;
 - $a_n = \frac{30}{n}$;
 - $a_n = 12 - n$;
 - $a_n = (-1)^n$.
- Знайдіть перші 5 елементів послідовності:
 - $a_n = \sqrt{n}$;
 - $b_n = 3^n$;
 - $c_n = \sin(\pi n)$;
 - $d_n = \log_2 n$.
- Підберіть одну з можливих формул n -го елемента для послідовностей, перші три елементи яких є такими:
 - 2, 4, 6;
 - 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$;
 - 11, 12, 13;
 - 1, 3, 5;
 - 1, 4, 9.
- Послідовність (x_n) задано формулою n -го елемента $x_n = 5n$. Установіть, чи є елементом цієї послідовності число: 35; 108; -50; 0; 2000.
- Послідовність (y_n) задано формулою n -го елемента $y_n = \cos \frac{\pi n}{2}$. Установіть, чи є елементом цієї послідовності число 1; $\frac{1}{2}$; -1; 0; 2.
- Послідовність (c_n) задано формулою n -го елемента $c_n = (-2)^n$. Чи є ця послідовність зростаючою? спадною? обмеженою?
- Послідовність (d_n) задано формулою n -го елемента $d_n = -n^2$. Чи є ця послідовність зростаючою? спадною? обмеженою?
- Послідовність (s_n) задано формулою n -го елемента $s_n = 1 - \frac{1}{n}$. Чи є ця послідовність зростаючою? спадною? обмеженою?
- Послідовність задано рекурентною формулою: $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ ($n > 2$). Знайдіть перші 5 елементів цієї послідовності.
- Послідовність задано рекурентною формулою: $g_1 = 1$, $g_2 = 2$, $g_n = g_{n-1} \cdot g_{n-2}$ ($n > 2$). Знайдіть перші 5 елементів цієї послідовності.

20. Знайдіть суму всіх елементів нескінченно спадної геометричної прогресії (b_n) із знаменником q , якщо:

а) $b_1 = 10, q = \frac{1}{2}$;

б) $b_1 = 2, b_2 = -1$.

Завдання з вибором однієї правильної відповіді

Проаналізуйте умови та вимоги завдань 21–50 та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

21. Тетянка написала два додатні числа. Третім числом вона записала суму першого і другого чисел, четвертим — суму другого і третього і т. д., доки не записала шосте число. Потім вона додала всі отримані числа і помітила, що коли знати цю суму, то завжди можна визначити один з елементів записаної послідовності. Який саме?

А	Б	В	Г	Д
Третій	Другий	П'ятий	Четвертий	Перший або шостий

22. Оленка написала два додатні числа. Третім числом вона записала добуток першого і другого чисел, четвертим — добуток другого і третього і т. д., доки не записала шосте число. Потім вона перемножила всі отримані числа і помітила, що коли знати цей добуток, то завжди можна визначити один з елементів записаної послідовності. Який саме?

А	Б	В	Г	Д
П'ятий	Третій	Другий	Четвертий	Перший або шостий

23. Знайдіть одну з можливих формул n -го елемента для послідовності (x_n) , перші 4 елементи якої є такими: $\frac{2}{9}; \frac{-4}{27}; \frac{8}{81}; \frac{-16}{243}$.

А	Б	В	Г	Д
$x_n = \left(\frac{-2}{3}\right)^n$	$x_n = (-1)^n \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$	$x_n = (-1)^{n+1} \left(\frac{2}{3}\right)^n$	$x_n = (-1)^{n+1} \frac{2^n}{3^{n+1}}$	$x_n = (-1)^n \frac{2^n}{3^{n+1}}$

24. Знайдіть одну з можливих формул n -го елемента для послідовності (y_n) , перші 5 елементів якої є такими: $1; 2^9; 3^8; 4^7; 5^6$.

А	Б	В	Г	Д
$y_n = n^{-n}$	$y_n = n^{10-n}$	$y_n = n^{11-n}$	$y_n = (n-1)^n$	$y_n = (n-1)^{10-n}$

25. Укажіть формулу n -го елемента, яка задає зростаючу послідовність.

А	Б	В	Г	Д
$w_n = (-1)^n$	$w_n = \frac{1}{n}$	$w_n = (-2)^n$	$w_n = 2^{-n}$	$w_n = -\frac{1}{n}$

26. Укажіть формулу n -го елемента, яка задає спадну послідовність.

А	Б	В	Г	Д
$z_n = 3^n$	$z_n = 4^{-n}$	$z_n = (-2)^n$	$z_n = (-1)^n$	$z_n = -5^{-n}$

27. Перший елемент деякої арифметичної прогресії $a_1 = 3$, її різниця $d = 2$. Укажіть число, яке **МОЖЕ** бути елементом цієї прогресії.

А	Б	В	Г	Д
6	16	25	32	44

28. Перший елемент деякої арифметичної прогресії $a_1 = 3$, її другий елемент $a_2 = 6$. Укажіть число, яке **НЕ МОЖЕ** бути елементом цієї прогресії.

А	Б	В	Г	Д
36	48	63	69	73

29. Перший елемент деякої геометричної прогресії $b_1 = 1$, її знаменник $q = 3$. Укажіть число, яке **НЕ МОЖЕ** бути елементом цієї прогресії.

А	Б	В	Г	Д
9	18	27	81	243

30. Перший елемент деякої геометричної прогресії $b_1 = 2$, її другий елемент $b_2 = 4$. Укажіть число, яке **МОЖЕ** бути елементом цієї прогресії.

А	Б	В	Г	Д
32	36	42	49	81

31. Укажіть трійку чисел, які утворюють арифметичну прогресію.

А	Б	В	Г	Д
3, 6, 12	$2^3, 2^5, 2^7$	0, -1, 1	$\lg 2, \lg 4, \lg 8$	$\sqrt{5}, 5, 5\sqrt{5}$

32. Укажіть трійку чисел, які утворюють арифметичну прогресію.

А	Б	В	Г	Д
3, 6, 9	$3^3, 3^5, 3^7$	0, 1, -1	$\lg 2, \lg 4, \lg 6$	$\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}$

33. В арифметичній прогресії відомі перший елемент $a_1 = x$ і третій елемент $a_3 = y$ ($x \neq y$). Якою формулою виражається залежність різниці d цієї прогресії від значень x та y ?

А	Б	В	Г	Д
$d = \frac{y-x}{2}$	$d = y - x$	$d = \frac{x+y}{2}$	$d = x - y $	$d = 2(y - x)$

34. В арифметичній прогресії відомі перший елемент $a_1 = x$ і третій елемент $a_3 = y$ ($x \neq y$). Якою формулою виражається залежність другого елемента a_2 цієї прогресії від значень x та y ?

А	Б	В	Г	Д
$a_2 = \frac{y-x}{2}$	$a_2 = y - x$	$a_2 = \frac{x+y}{2}$	$a_2 = x + y$	$a_2 = 2(x + y)$

35. Укажіть трійку чисел, які утворюють геометричну прогресію.

А	Б	В	Г	Д
$\sin \pi, \sin \pi^2, \sin \pi^3$	3, 6, 18	$\lg 3, \lg 9, \lg 27$	-1, 0, 1	$2^2, 2^4, 2^6$

36. Укажіть трійку чисел, які утворюють геометричну прогресію.

А	Б	В	Г	Д
2, 6, 12	$3^{-2}, 3^{-4}, 3^{-6}$	-1, 0, 1	$\ln 3, \ln 9, \ln 27$	$\operatorname{tg} \pi, \operatorname{tg} \pi^2, \operatorname{tg} \pi^3$

37. У геометричній прогресії відомі перший елемент $b_1 = x$ і третій елемент $b_3 = y$ ($x > 0, y > 0, x \neq y$). Якою формулою виражається залежність знаменника $q > 0$ цієї прогресії від x та y ?

А	Б	В	Г	Д
$q = \left(\frac{y}{x}\right)^2$	$q = \sqrt{\frac{x}{y}}$	$q = \sqrt{xy}$	$q = \sqrt{\frac{y}{x}}$	$q = \left(\frac{x}{y}\right)^2$

38. У геометричній прогресії відомі перший елемент $b_1 = x$ і третій елемент $b_3 = y$ ($x > 0, y > 0, x \neq y$). Якою формулою виражається залежність другого елемента $b_2 > 0$ цієї прогресії від x та y ?

А	Б	В	Г	Д
$b_2 = xy$	$b_2 = \sqrt{\frac{x}{y}}$	$b_2 = \sqrt{xy}$	$b_2 = \sqrt{\frac{y}{x}}$	$b_2 = \frac{xy}{2}$

39. Три числа: -10 , x , 12 є трьома послідовними елементами деякої арифметичної прогресії. Знайдіть x .

А	Б	В	Г	Д
$x = 1$	$x = -1$	$x = 2$	$x = -2$	$x = 0$

40. Три числа: -1 , y , 9 є трьома послідовними елементами деякої арифметичної прогресії. Знайдіть y .

А	Б	В	Г	Д
$y = 8$	$y = 6$	$y = 5$	$y = 4$	$y = 2$

41. При якому значенні змінної x ($x \neq 0$) числа 3 , $2x$ і $8x$ будуть трьома послідовними елементами геометричної прогресії?

А	Б	В	Г	Д
$x = 4$	$x = 3$	$x = 8$	$x = 2$	$x = 6$

42. При якому ДОДАТНОМУ значенні змінної y числа 4 , $4y$ і 8 будуть трьома послідовними елементами геометричної прогресії?

А	Б	В	Г	Д
$y = \sqrt{2}$	$y = 2$	$y = 1$	$y = 4$	$y = 2\sqrt{2}$

43. Послідовність (z_n) задано формулою n -го елемента $z_n = 8$. Знайдіть суму перших 100 елементів цієї послідовності.

А	Б	В	Г	Д
108	100^8	8^{100}	800	801

44. Послідовність (y_n) задано формулою n -го елемента $y_n = (-1)^n$. Знайдіть добуток перших 100 елементів цієї послідовності.

А	Б	В	Г	Д
-100	-1	0	1	100

45. В арифметичній прогресії (a_n) $a_1 = x$, $a_{20} = y$. Укажіть формулу, за якою обчислюється сума перших двадцяти елементів цієї прогресії.

А	Б	В	Г	Д
$20(x + y)$	$10(y - x)$	$10(x + y)$	$20(y - x)$	$40(x + y)$

46. У геометричній прогресії (b_n) $b_1 = x$, знаменник $q = y$. Укажіть формулу, за якою обчислюється сума перших трьох елементів цієї прогресії.

А	Б	В	Г	Д
$x(y^2 + y + 1)$	$x(y^2 + 2y + 1)$	$x(y^2 - y + 1)$	$x(y^2 - 2y + 1)$	$x(y^2 + 1)$

47. Послідовність задано формулою $x_n = \frac{-2}{3^n}$. Знайдіть суму ВСІХ елементів цієї послідовності, якщо це можливо.

А	Б	В	Г	Д
0,5	-0,5	1	-1	Знайти неможливо

48. Послідовність задано формулою $y_n = (-1)^n \frac{3^n}{2}$. Знайдіть суму ВСІХ елементів цієї послідовності, якщо це можливо.

А	Б	В	Г	Д
0,5	-0,5	1	-1	Знайти неможливо

49. Послідовність $x_n = \frac{an + bn^2}{3n^2 + cn}$ залежить від трьох параметрів $a, b, c \in \mathbb{R}$. Від яких із цих параметрів залежить границя цієї послідовності?

А	Б	В	Г	Д
Від жодного з параметрів	Тільки від a	Тільки від b	Тільки від c	Від усіх параметрів

50. Послідовність $x_n = \frac{an^2 + bn}{cn + 4n^2}$ залежить від трьох параметрів $a, b, c \in \mathbb{R}$. Від яких із цих параметрів залежить границя цієї послідовності?

А	Б	В	Г	Д
Від жодного з параметрів	Тільки від a	Тільки від b	Тільки від c	Від усіх параметрів

У завданнях 51–54 сформульовано проблему (питання), яку потрібно розв'язати (отримати однозначну відповідь на питання), використовуючи для цього додаткові дані — твердження (1) і (2). Визначте, чи достатньо цих даних для розв'язання проблеми, і оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь*.

51. Знайдіть суму перших 39 елементів арифметичної прогресії (a_n) .

(1) $a_1 = 1$.

(2) $a_{20} = 80$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

52. Знайдіть суму перших 10 елементів послідовності (c_n) .

(1) $c_{n+1} = \frac{c_n}{2}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

(2) $c_{10} = 64$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

53. У кінозалі 25 рядів крісел, причому крісла розташовані так, що їх кількість у кожному наступному ряду відрізняється від кількості у попередньому ряду на одне й те саме число. Знайдіть загальну кількість крісел у кінозалі.

(1) У тринадцятому ряду розташовано 31 крісло.

(2) В останньому ряду розташовано найбільше крісел.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

* Саму проблему розв'язувати не обов'язково.

54. Підприємець помітив, що протягом останніх 5 місяців він отримував різні прибутки, причому сума зароблених грошей у кожному наступному місяці відрізнялася від суми грошей, зароблених у попередньому місяці, в одну й ту саму кількість разів. Знайдіть загальну кількість грошей, зароблених підприємцем за ці 5 місяців.

(1) У третьому місяці було зароблено 10 000 грн.

(2) У п'ятому місяці було зароблено найбільше грошей.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

У завданнях 55–56 порівняйте величини X і Y та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

55. (b_n) — геометрична прогресія, у якої $b_1 = 30$, $q < 0$.

Величина X : значення b_{15} .

Величина Y : значення b_{20} .

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

56. (b_n) — арифметична прогресія, у якої $b_1 = \frac{1}{10}$, $d < 0$.

Величина X : 0.

Величина Y : значення b_{10} .

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

Завдання на встановлення відповідності

У завданнях 57–60 до кожного рядка, позначеного цифрою, доберіть один відповідник, позначений літерою.

- 57.** Установіть відповідність між означеннями елементів прогресій (1–4) і наборами чисел (А–Д), які можуть бути цими елементами.
- | | |
|---|------------------------------------|
| 1 Послідовні 4 елементи геометричної прогресії зі знаменником $q = 3$ | А $3^n, 3^{n+1}, 3^{n+2}, 3^{n+3}$ |
| 2 Послідовні 4 елементи геометричної прогресії зі знаменником $q = n$ | Б $n, 3n^2, 9n^3, 27n^4$ |
| 3 Послідовні 4 елементи арифметичної прогресії з різницею $d = 1$ | В $n, 2n, 3n, 4n$ |
| 4 Послідовні 4 елементи арифметичної прогресії з різницею $d = n$ | Г $n, n+1, n+2, n+3$ |
| | Д n, n^2, n^3, n^4 |
- 58.** Установіть відповідність між означеннями елементів прогресій (1–4) і наборами чисел (А–Д), які можуть бути цими елементами.
- | | |
|--|----------------------|
| 1 Послідовні 4 елементи геометричної прогресії зі знаменником $q = 1$ | А $n, -n, n, -n$ |
| 2 Послідовні 4 елементи геометричної прогресії зі знаменником $q = -1$ | Б $n+1, n, n-1, n-2$ |
| 3 Послідовні 4 елементи арифметичної прогресії з різницею $d = -1$ | В $-n, -n, -n, -n$ |
| 4 Послідовні 4 елементи арифметичної прогресії з різницею $d = -n$ | Г $0, -n, 0, -n$ |
| | Д $5n, 4n, 3n, 2n$ |
- 59.** Установіть відповідність між властивостями (1–4) послідовностей і формулами n -го елемента (А–Д), якими задані ці послідовності.
- | | |
|--------------------------|-------------------|
| 1 Спадна і необмежена | А $x_n = 5^n$ |
| 2 Зростаюча і необмежена | Б $y_n = -5^n$ |
| 3 Спадна й обмежена | В $z_n = (-5)^n$ |
| 4 Зростаюча й обмежена | Г $v_n = 5^{-n}$ |
| | Д $w_n = -5^{-n}$ |

60. Установіть відповідність між властивостями (1–4) послідовностей і рекурентними формулами (А–Д), якими задані ці послідовності.

- | | |
|--------------------------|---|
| 1 Спадна і необмежена | А $a_1 = -2, a_{n+1} = a_n + 3$ |
| 2 Зростаюча і необмежена | Б $b_1 = 2, b_{n+1} = b_n \cdot (-3)$ |
| 3 Спадна й обмежена | В $c_1 = 2, c_{n+1} = c_n \cdot \frac{1}{3}$ |
| 4 Зростаюча й обмежена | Г $d_1 = -2, c_{n+1} = c_n \cdot \frac{1}{3}$ |
| | Д $f_1 = 2, f_{n+1} = f_n - 3$ |

Завдання на встановлення послідовності

У завданнях 61–62 виберіть тільки необхідні для розв'язання поставленої задачі дії і розмістіть їх у правильній послідовності. У відповідь запишіть отриману послідовність літер.

61. Як знайти різницю d арифметичної прогресії (a_n) , якщо відомі її елементи a_k і a_m ($k \neq m$)?

- А Знайти число x як суму $a_k + a_m$.
- Б Знайти число x як різницю $a_k - a_m$.
- В Знайти число x як різницю $a_m - a_k$.
- Г Знайти число x як частку $\frac{a_m}{a_k}$.
- Д Знайти різницю d за формулою $d = \frac{x}{m+k}$.
- Е Знайти різницю d за формулою $d = \frac{x}{m-k}$.
- Є Знайти різницю d за формулою $d = x(m+k)$.
- Ж Знайти різницю d за формулою $d = x(m-k)$.

62. Як знайти знаменник $q > 0$ геометричної прогресії (b_n) , якщо відомі її елементи b_k і b_m ($k \neq m$)?
- А Знайти число y як суму $b_k + b_m$.
- Б Знайти число y як різницю $b_m - b_k$.
- В Знайти число y як добуток $b_m \cdot b_k$.
- Г Знайти число y як частку $\frac{b_m}{b_k}$.
- Д Знайти знаменник q за формулою $q = y^{\frac{1}{m-k}}$.
- Е Знайти знаменник q за формулою $q = y^{\frac{1}{m+k}}$.
- Є Знайти знаменник q за формулою $q = y^{m-k}$.
- Ж Знайти знаменник q за формулою $q = y^{m+k}$.

Завдання з короткою відповіддю

Розв'яжіть завдання 63–92 і запишіть відповідь **ОДНИМ ЧИСЛОМ**.

63. Скільки натуральних чисел є елементами послідовності $y_n = 100 - n^2$?
64. Скільки додатних чисел є елементами послідовності $y_n = 10 - \sqrt{n}$?
65. Укажіть **НАЙМЕНШИЙ НОМЕР** елемента послідовності (a_n) , починаючи з якого елементи цієї послідовності більші за 50, якщо $a_n = 5n + 34$.
66. Укажіть **НАЙМЕНШИЙ НОМЕР** елемента послідовності (a_n) , починаючи з якого елементи цієї послідовності менші за 20, якщо $a_n = 81 - 4n$.
67. Послідовність (a_n) є арифметичною прогресією з різницею $d = 5$. Знайдіть a_6 , якщо $a_3 = -2$.
68. Послідовність (a_n) є арифметичною прогресією. Знайдіть a_1 , якщо $a_5 = 13$, $a_{15} = 53$.
69. Послідовність (b_n) є геометричною прогресією із знаменником $q = 2$. Знайдіть b_8 , якщо $b_5 = 3$.

70. Послідовність (b_n) є геометричною прогресією. Знайдіть b_1 , якщо $b_4 = -8$, $b_7 = 512$.
71. Сума третього та одинадцятого елементів арифметичної прогресії дорівнює 16, а восьмий елемент цієї прогресії дорівнює 5. Знайдіть різницю прогресії.
72. Сума четвертого і дванадцятого елементів арифметичної прогресії дорівнює 36, а сьомий елемент цієї прогресії дорівнює 20. Знайдіть різницю прогресії.
73. Добуток другого і десятого елементів геометричної прогресії дорівнює 25, а сьомий елемент цієї прогресії дорівнює 10. Знайдіть знаменник прогресії, якщо всі її елементи додатні.
74. Добуток третього і дев'ятого елементів геометричної прогресії дорівнює 49, а п'ятий елемент цієї прогресії дорівнює 14. Знайдіть знаменник прогресії, якщо всі її елементи додатні.
75. Знайдіть перший додатний елемент арифметичної прогресії, першими трьома елементами якої є числа (-28) , (-23) і (-18) .
76. Знайдіть перший від'ємний елемент арифметичної прогресії (a_n) , у якій $a_1 = 5,7$, а різниця $d = -1,2$.
77. Знайдіть суму перших двадцяти парних натуральних чисел.
78. Знайдіть суму перших тридцяти непарних натуральних чисел.
79. Обчисліть: $3,4 + 4,7 + 6 + \dots + 15,1$.
80. Обчисліть: $2007 + 2000 + 1993 + \dots + (-1962) + (-1969)$.
81. Добуток перших двадцяти елементів геометричної прогресії (b_n) , у якій $b_1 = 1$, $q = 4$, дорівнює 4^m . Знайдіть m .
82. Добуток перших тридцяти елементів геометричної прогресії (b_n) , у якій $b_1 = 1$, $q = 3$, дорівнює 3^m . Знайдіть m .
83. Перший елемент арифметичної прогресії $a_1 = -5$, її різниця $d = 6$, а сума n перших елементів цієї прогресії $S_n = 35$. Знайдіть n .
84. Перший елемент арифметичної прогресії $a_1 = 12$, її різниця $d = -2$, а сума n перших елементів цієї прогресії $S_n = -30$. Знайдіть n .
85. Відомо, що сума n перших елементів деякої геометричної прогресії (b_n) обчислюється за формулою $S_n = 5(3^n - 1)$. Знайдіть b_4 .

86. Відомо, що сума n перших елементів деякої геометричної прогресії (b_n) обчислюється за формулою $S_n = 64 \left(1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right)$. Знайдіть b_3 .
87. Іванко майстрував з іграшкових цеглинок стіну з бійницями, тому в кожному наступному ряду було на 6 цеглинок менше, ніж у попередньому. Скільки було цеглинок у найнижчому ряду, якщо в найвищому їх було 3, а всього стіна містила 300 цеглинок?
88. Андрійко розклав на столі рядами 200 цукерок так, що в кожному наступному ряду їх було на 4 менше, ніж у попередньому, а найменший ряд містив 2 цукерки. Скільки цукерок було в найдовшому ряду?
89. Зла чаклунка посадила на городі Оленки кілька кущів чаклунського осоту, який після кожного повного проривання подвоює кількість кущів, що були при цьому вирвані. Відомо, що після чотирьох повних проривань Оленка загалом вирвала 75 кущів осоту. Скільки кущів посадила чаклунка?
90. Котигорошко бився зі Змієм, але не знав, що після кожного бою, в якому він зрубав усі голови, у Змія на місці кожної зрубаної голови виростає три нових. Відомо, що після трьох боїв на полі битви залишилися лежати 52 зрубані голови. Скільки голів було у Змія на початку битви?
91. Знайдіть границю послідовності: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n - 2}{3 - 2n}$.
92. Знайдіть границю послідовності: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2n + n^2}{1 + n - 2n^2}$.

Завдання з повним розв'язанням

Завдання 93–100 розв'яжіть із повним обґрунтуванням, посилаючись на відповідні означення, твердження, формули. У разі потреби проілюструйте розв'язання таблицями, діаграмами, графіками тощо.

93. Послідовність задано формулою n -го елемента $x_n = \frac{1}{n^2 + n}$. Знайдіть:
- формулу, за якою обчислюється сума $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$;
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

94. Послідовність задано формулою n -го елемента $y_n = \frac{1}{n^2 + 4n + 3}$. Знайдіть:
- формулу, за якою обчислюється сума $S_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n$;
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.
95. Сума восьми перших елементів арифметичної прогресії дорівнює сумі її перших одинадцяти елементів. Знайдіть суму дев'ятнадцяти перших елементів цієї прогресії.
96. Сума п'яти перших елементів арифметичної прогресії дорівнює сумі її перших одинадцяти елементів. Знайдіть суму шістнадцяти перших елементів цієї прогресії.
97. Функцію $f(x)$ задано як суму нескінченно спадної геометричної прогресії:
 $f(x) = |x| + \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|x|}{(1+|x|)^2} + \dots$, де $x \neq 0$. Знайдіть значення $f(1)$. Побудуйте графік функції $y = f(x)$.
98. Функцію $g(x)$ задано як суму нескінченно спадної геометричної прогресії:
 $g(x) = x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \dots$, де $x \neq 0$. Знайдіть значення $g(-2)$. Побудуйте графік функції $y = g(x)$.
99. Сума трьох перших елементів деякої арифметичної прогресії дорівнює 30. Якщо від перших двох елементів цієї арифметичної прогресії відняти відповідно 5 і 4, а третій елемент залишити без змін, то отримаємо три перші елементи певної геометричної прогресії. Знайдіть:
- елементи вказаних арифметичної та геометричної прогресій;
 - різницю арифметичної прогресії та знаменник геометричної прогресії.
100. Сума трьох перших елементів деякої зростаючої геометричної прогресії дорівнює 50. Якщо від першого і третього елементів цієї геометричної прогресії відняти відповідно 1 і 19, а другий елемент залишити без змін, то отримаємо три перші елементи певної арифметичної прогресії. Знайдіть:
- елементи вказаних арифметичної та геометричної прогресій;
 - різницю арифметичної прогресії та знаменник геометричної прогресії.

6.2. Похідна та її застосування

Найпростіші завдання з повним розв'язанням

Знайдіть похідні функцій, наведених у завданнях 1–14. Завдання розв'яжіть УСНО.

- | | |
|------------------------|----------------------------------|
| 1. $y = x^5$. | 8. $y = e^3$. |
| 2. $y = 3^5$. | 9. $y = \ln 9$. |
| 3. $y = \frac{x}{3}$. | 10. $y = \log_2 x$. |
| 4. $y = \frac{3}{x}$. | 11. $y = \sin x$. |
| 5. $y = 2\sqrt{x}$. | 12. $y = \cos 3$. |
| 6. $y = x\sqrt{2}$. | 13. $y = \operatorname{ctg} x$. |
| 7. $y = 5^x$. | 14. $y = \operatorname{tg} 10$. |

Розв'яжіть УСНО завдання 15–18, користуючись графіком функції $y = f(x)$ на проміжку $[-3; 5]$ (рис. 1).

15. Визначте знаки чисел $f'(-2)$, $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(4)$.
16. Визначте проміжки, для яких $f'(x) < 0$.
17. Визначте проміжки, для яких $f'(x) > 0$.
18. Визначте точки, в яких $f'(x) = 0$.

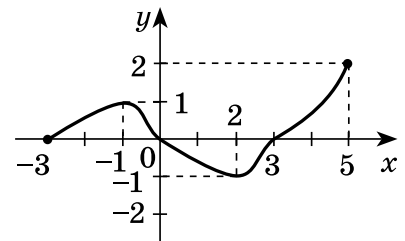


Рис. 1

Розв'яжіть УСНО завдання 19–20, користуючись тим, що закон зміни координати x матеріальної точки від часу t під час прямолінійного руху вздовж осі Ox задається функцією $x(t) = t^3 - 2t^2 + 4t - 3$.

19. Знайдіть закон зміни швидкості цієї матеріальної точки $v(t)$.
20. Знайдіть закон зміни прискорення цієї матеріальної точки $a(t)$.

Завдання з вибором однієї правильної відповіді

Проаналізуйте умови та вимоги завдань 21–50 та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

21. Знайдіть $f'(x)$, якщо $f(x) = \sin 3 + e^2$.

А	Б	В	Г	Д
$f'(x) = \cos 3 + 2e$	$f'(x) = \sin 3 + e^2$	$f'(x) = \cos 3$	$f'(x) = 2e$	$f'(x) = 0$

22. Знайдіть $g'(x)$, якщо $g(x) = \sqrt{3} + x^3$.

А	Б	В	Г	Д
$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$	$g'(x) = 3x^2$	$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3}} + 3x^2$	$g'(x) = \sqrt{3} + x^3$	$g'(x) = 0$

23. Знайдіть $f'(x)$, якщо $f(x) = \ln(\cos x)$.

А	Б	В	Г	Д
$f'(x) = -\operatorname{tg} x$	$f'(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = -\operatorname{ctg} x$	$f'(x) = \operatorname{ctg} x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos x}$

24. Знайдіть похідну функції $y = \ln(\sin x)$.

А	Б	В	Г	Д
$y' = -\operatorname{ctg} x$	$y' = \operatorname{tg} x$	$y' = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\sin x}$

25. Знайдіть похідну функції $y = e^x \cdot \sin x$.

А	Б	В
$y' = e^x (\sin x + \cos x)$	$y' = x \cdot e^{x-1} \cdot \cos x$	$y' = e^x \cdot \cos x$
Г		Д
$y' = x \cdot e^{x-1} \cdot \sin x$		$y' = e^x (\sin x - \cos x)$

26. Знайдіть похідну функції $y = x^2 \cdot \ln x$.

А	Б	В	Г	Д
$y' = x(\ln x + 1)$	$y' = 2x \cdot \ln x$	$y' = 2$	$y' = x$	$y' = x(2 \ln x + 1)$

27. Укажіть правильну рівність.

А	Б	В	Г	Д
$(x^2)' = \frac{x^3}{3}$	$(2^x)' = x \cdot 2^{x-1}$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sqrt{x})' = 2\sqrt{x}$	$(\ln x)' = \frac{1}{\ln x}$

28. Укажіть правильну рівність.

А	Б	В	Г	Д
$(x^3)' = \frac{x^4}{4}$	$(\cos x)' = \sin x$	$(\operatorname{tg} x)' = \operatorname{ctg} x$	$(4^x)' = 4^x \cdot \ln 4$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}}$

29. Для якої з наведених функцій $f'(1) = 2$?

А	Б	В	Г	Д
$f(x) = 2$	$f(x) = 4 \ln x$	$f(x) = 4\sqrt{x}$	$f(x) = 2x^2$	$f(x) = -2 \sin(\pi x)$

30. Для якої з наведених функцій $f'(0) = 2$?

А	Б	В	Г	Д
$f(x) = 2x$	$f(x) = \ln(x+1) + 1$	$f(x) = 2 \sin(\pi x)$	$f(x) = 3x^2 - 6$	$f(x) = 2^x + 1$

31. Обчисліть значення $f'(2)$, якщо кут між дотичною, проведеною до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$, і додатним напрямком осі Ox дорівнює 60° .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$

32. Обчисліть значення $g'(3)$, якщо кут між дотичною, проведеною до графіка функції $y = g(x)$ у точці з абсцисою $x_0 = 3$, і додатним напрямком осі Ox дорівнює 45° .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$

33. На рис. 2 зображено графік функції $y = f(x)$ і дотичну до нього в точці з абсцисою x_0 . Знайдіть значення $f'(x_0)$.

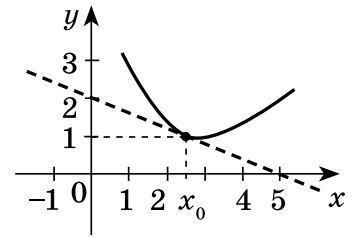


Рис. 2

А	Б	В	Г	Д
2	-2,5	2,5	-0,4	0,4

34. На рис. 3 позначено дві точки, через які проходить дотична до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою $x_0 = 5$. Знайдіть значення $f'(5)$.

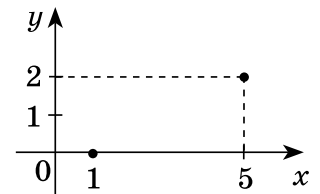


Рис. 3

А	Б	В	Г	Д
$\frac{5}{2}$	2	5	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$

35. На рис. 4 зображено п'ять пронумерованих прямих, що перетинаються в точці $M(8; 7)$. Укажіть номер прямої, яка **МОЖЕ** бути дотичною до графіка функції $y = f(x)$ у точці $M(8; 7)$, якщо $f'(8) = 0,6$.

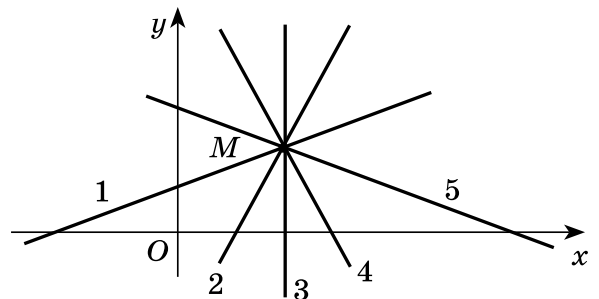


Рис. 4

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	5

36. За рис. 4 укажіть номер прямої, яка **МОЖЕ** бути дотичною до графіка функції $y = f(x)$ у точці $M(8; 7)$, якщо $f'(8) = -3$.

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	5

37. Функція $s = s(t)$, графік якої зображено на рис. 5, виражає залежність відстані від тіла до початку відліку від часу. Укажіть графік функції, яка **МОЖЕ** виражати залежність швидкості руху v цього тіла від часу t .

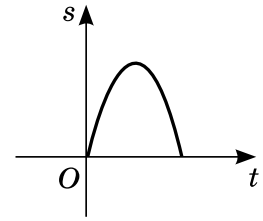


Рис. 5

А	Б	В	Г	Д

38. Функція $s = s(t)$, графік якої зображено на рис. 6, виражає залежність відстані від тіла до початку відліку від часу. Укажіть графік функції, яка **МОЖЕ** виражати залежність швидкості руху v цього тіла від часу t .

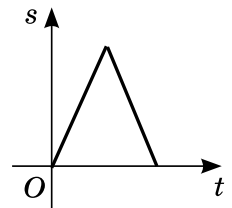


Рис. 6

А	Б	В	Г	Д

39. На рис. 7 зображено графік залежності координати x від часу t для матеріальної точки, яка рухається прямолінійно вздовж осі Ox . $v(t_0)$ — миттєва швидкість цієї матеріальної точки в момент часу t_0 . Укажіть правильне співвідношення, якщо масштаби по осях Ox і Ot однакові.

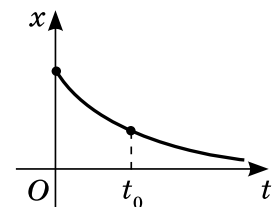


Рис. 7

А	Б	В	Г	Д
$v(t_0) < -1$	$-1 < v(t_0) < 0$	$v(t_0) = 0$	$0 < v(t_0) < 1$	$v(t_0) > 1$

40. На рис. 8 зображено графік залежності координати x від часу t для матеріальної точки, яка рухається прямолінійно вздовж осі Ox . $v(t_0)$ — миттєва швидкість цієї матеріальної точки в момент часу t_0 . Укажіть правильне співвідношення, якщо масштаби по осях Ox і Ot однакові.

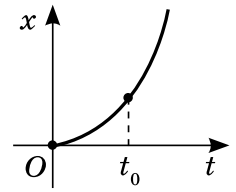
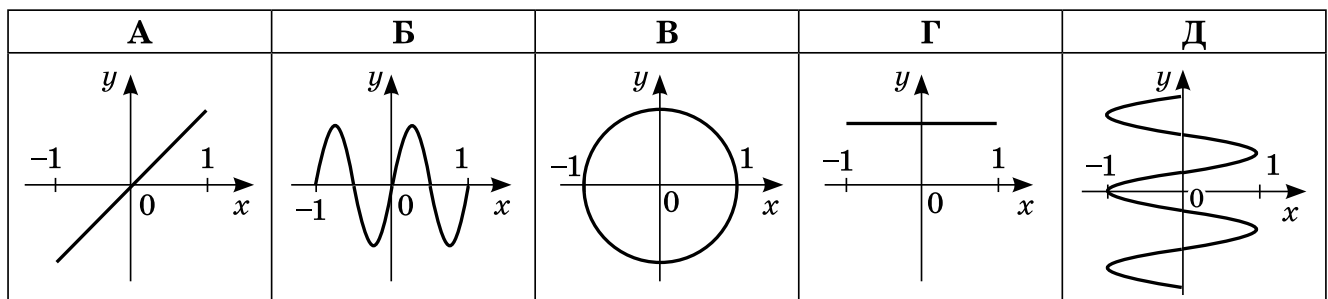


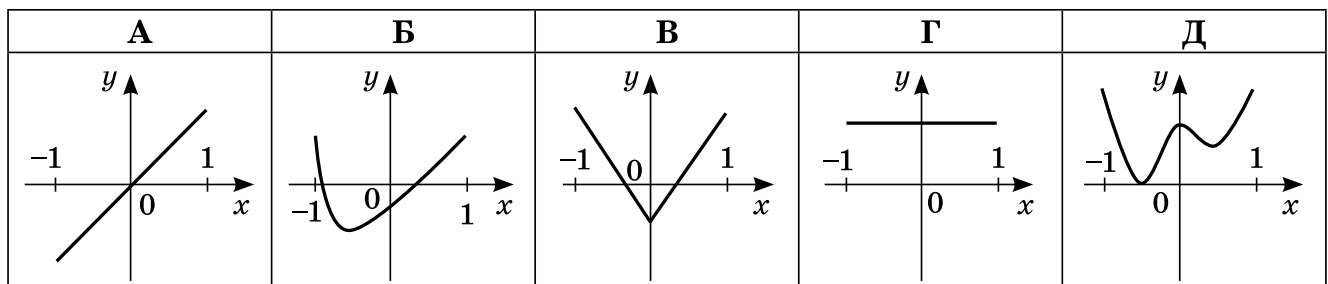
Рис. 8

А	Б	В	Г	Д
$v(t_0) < -1$	$-1 < v(t_0) < 0$	$v(t_0) = 0$	$0 < v(t_0) < 1$	$v(t_0) > 1$

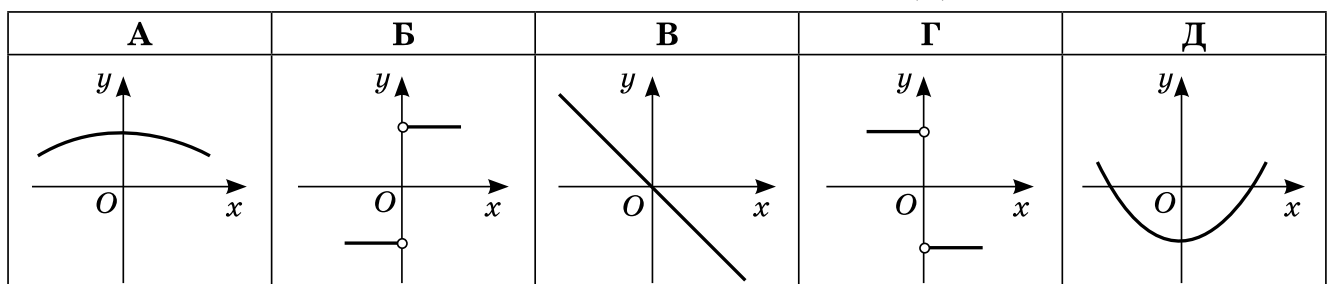
41. Який із наведених графіків **МОЖЕ** бути графіком залежності $y = f(x)$, якщо відомо, що рівняння $f'(x) = 0$ має **БЕЗЛІЧ** коренів на проміжку $(-1; 1)$?



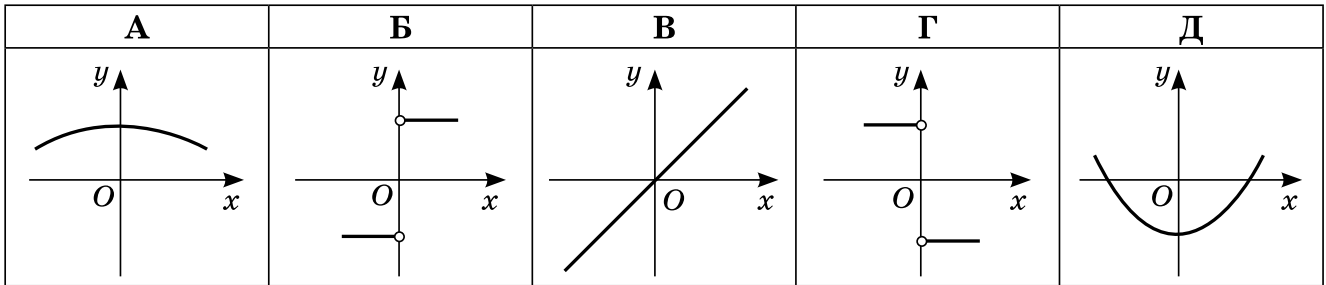
42. Який із наведених графіків **МОЖЕ** бути графіком функції $y = f(x)$, якщо відомо, що рівняння $f'(x) = 0$ має **ОДИН** корінь на проміжку $(-1; 1)$?



43. Відомо, що функція $f(x)$ зростає на проміжку $(-\infty; 0)$ і спадає на проміжку $(0; +\infty)$, а точка $x_0 = 0$ є стаціонарною точкою для цієї функції. Укажіть графік, який **МОЖЕ** бути графіком функції $y = f'(x)$.



44. Відомо, що функція $g(x)$ спадає на проміжку $(-\infty; 0)$ і зростає на проміжку $(0; +\infty)$, а точка $x_0 = 0$ є критичною, але не є стаціонарною точкою для цієї функції. Укажіть графік, який **МОЖЕ** бути графіком функції $y = g'(x)$.



45. За графіком функції $y = f'(x)$, який зображено на рис. 9, знайдіть точку максимуму функції $y = f(x)$.

А	Б	В	Г	Д
$x = -2$	$x = -1$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 3$

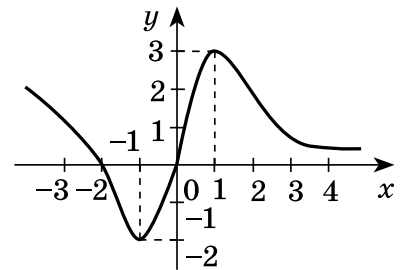


Рис. 9

46. За графіком функції $y = f'(x)$, який зображено на рис. 9, знайдіть точку мінімуму функції $y = f(x)$.

А	Б	В	Г	Д
$x = -2$	$x = -1$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 3$

47. На рис. 10 зображено фрагмент графіка функції $y = x^3 - 2x^2 + ax + b$. Визначте знаки параметрів a і b , якщо це можливо.

А	Б	В	Г	Д
$a > 0,$ $b > 0$	$a > 0,$ $b < 0$	$a < 0,$ $b < 0$	$a < 0,$ $b > 0$	Визначити неможливо

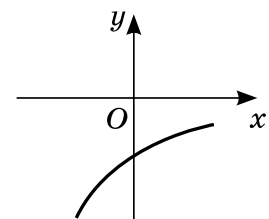


Рис. 10

48. На рис. 11 зображено фрагмент графіка функції $y = x^3 + 5x^2 + ax + b$. Визначте знаки параметрів a і b , якщо це можливо.

А	Б	В	Г	Д
$a > 0,$ $b > 0$	$a > 0,$ $b < 0$	$a < 0,$ $b < 0$	$a < 0,$ $b > 0$	Визначити неможливо

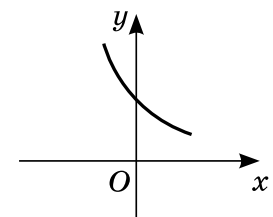


Рис. 11

49. На рис. 12 зображено графік функції $y = f(x)$.
Укажіть правильну подвійну нерівність.

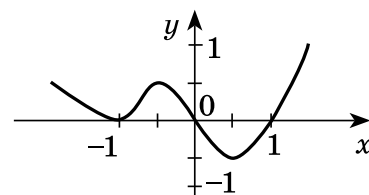


Рис. 12

А	Б	В
$f'(0) < f'(1) < f'(-1)$	$f'(0) < f'(-1) < f'(1)$	$f'(-1) < f'(0) < f'(1)$
Г		Д
$f'(-1) < f'(1) < f'(0)$		$f'(1) < f'(0) < f'(-1)$

50. На рис. 13 зображено графік функції $y = g(x)$.
Укажіть правильну подвійну нерівність.

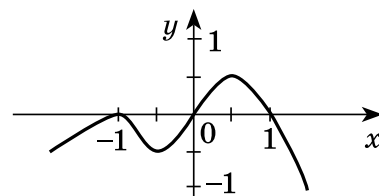


Рис. 13

А	Б	В
$g'(1) < g'(-1) < g'(0)$	$g'(1) < g'(0) < g'(-1)$	$g'(-1) < g'(0) < g'(1)$
Г		Д
$g'(-1) < g'(1) < g'(0)$		$g'(0) < g'(-1) < g'(1)$

У завданнях 51–54 сформульовано проблему (питання), яку потрібно розв'язати (отримати однозначну відповідь на питання), використовуючи для цього додаткові дані — твердження (1) і (2). Визначте, чи достатньо цих даних для розв'язання проблеми, і оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь*.

51. Скільки коренів має рівняння $f'(x) = 0$ на проміжку $[0; 1]$?
 (1) Рівняння $f(x) = 0$ має один корінь на проміжку $[0; 1]$.
 (2) Функція $f(x)$ є зростаючою на проміжку $[0; 1]$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

* Саму проблему розв'язувати не обов'язково.

52. Скільки коренів має рівняння $g'(x)=0$ на проміжку $[0;1]$?

(1) Рис. 14.

(2) Функція $g(x)$ має дві стаціонарні точки на проміжку $[0;1]$.

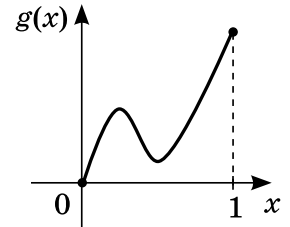


Рис. 14

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

53. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції $y=f(x)$ у точці з абсцисою $x_0=3$.

(1) $f(3)=4$.

(2) $f'(3)=-1$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

54. Знайдіть миттєву швидкість тіла, що рухається за законом $s=s(t)$, у момент часу $t_0=5$.

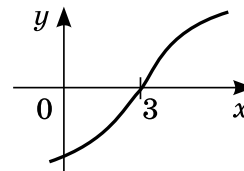
(1) $s'(5)=7$.

(2) $s''(5)=2$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

У завданнях 55–56 порівняйте величини X і Y та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

55. На рис. 15 зображено фрагмент графіка функції $y = f(x)$.



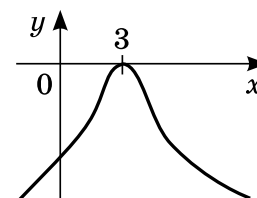
Величина X : значення $f(3)$.

Величина Y : значення $f'(3)$.

Рис. 15

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

56. На рис. 16 зображено фрагмент графіка функції $y = h(x)$.



Величина X : значення $h(3)$.

Величина Y : значення $h'(3)$.

Рис. 16

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

Завдання на встановлення відповідності

Завдання 57–60 передбачають встановлення правильної відповідності. До кожного рядка, позначеного цифрою, доберіть один відповідник, позначений літерою.

57. Установіть відповідність між твердженнями (1–4), які описують похідну функції $f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{якщо } x \in [-1; 1], \\ -x^2 + 4x - 3, & \text{якщо } x \in (1; +\infty) \end{cases}$ у деяких точках, і значеннями $f'(x)$ (А–Д) у цих точках, користуючись рис. 17, на якому зображено графік функції $f(x)$.

1 Дорівнює 1

А $f'(0,5)$

2 Не існує

Б $f'(2)$

3 Дорівнює 0

В $f'(-0,5)$

4 Дорівнює (-1)

Г $f'(3)$

Д $f'(1)$

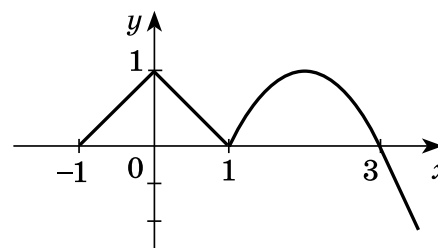


Рис. 17

58. Установіть відповідність між твердженнями (1–4), які описують похідну функції $g(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in (-\infty; 0], \\ \sqrt{10x - x^2}, & \text{якщо } x \in (0; 10] \end{cases}$ у деяких точках, і значеннями $g'(x)$ (А–Д) у цих точках, користуючись рис. 18, на якому зображено графік функції $g(x)$.

- | | |
|------------------|------------|
| 1 Дорівнює 1 | А $g'(8)$ |
| 2 Від'ємне число | Б $g'(5)$ |
| 3 Не існує | В $g'(1)$ |
| 4 Дорівнює 0 | Г $g'(-1)$ |
| | Д $g'(0)$ |

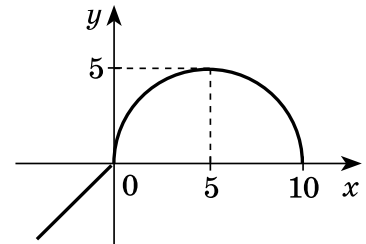


Рис. 18

59. Установіть відповідність між характеристиками руху (1–4) матеріальної точки, яка рухається вздовж осі абсцис, і законами $x(t)$ зміни координати x цієї точки від часу t (А–Д).

- | | |
|---|-----------------------|
| 1 Швидкість матеріальної точки є постійною | А $x(t) = t^2 - 3t$ |
| 2 Швидкість матеріальної точки з часом тільки збільшується | Б $x(t) = t^3 - 3t^2$ |
| 3 Швидкість матеріальної точки з часом тільки зменшується | В $x(t) = 3t^2 - t^3$ |
| 4 Швидкість матеріальної точки з часом спочатку збільшується, а потім зменшується | Г $x(t) = 3t - t^2$ |
| | Д $x(t) = 3t - 3t^2$ |

60. Установіть відповідність між характеристиками руху (1–4) матеріальної точки, яка рухається вздовж осі ординат, і законами $y(t)$ зміни координати y цієї точки від часу t (А–Д).

- | | |
|---|--------------------------|
| 1 Швидкість матеріальної точки є постійною | А $y(t) = \log_3(t + 2)$ |
| 2 Швидкість матеріальної точки з часом тільки збільшується | Б $y(t) = 3^{t+2}$ |
| 3 Швидкість матеріальної точки з часом тільки зменшується | В $y(t) = (t - 2)^3$ |
| 4 Швидкість матеріальної точки на нескінченній кількості проміжків збільшується і на нескінченній кількості проміжків зменшується | Г $y(t) = e^2 \cdot t$ |
| | Д $y(t) = \sin 5t$ |

Завдання на встановлення послідовності

У завданнях 61–62 виберіть тільки необхідні для розв’язання поставленої задачі дії і розмістіть їх у правильній послідовності. У відповідь запишіть отриману послідовність літер.

61. Як обчислити похідну функції $y = f(x)$ у точці $x_0 = 3$ за означенням?
- А Обчислити приріст функції Δy за формулою $\Delta y = f(3 + \Delta x) - f(\Delta x)$.
- Б Обчислити приріст функції Δy за формулою $\Delta y = f(3 + \Delta x) - f(3)$.
- В Обчислити приріст функції Δy за формулою $\Delta y = f(3 + \Delta x) + f(3)$.
- Г Знайти частку $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
- Д Знайти частку $\frac{\Delta x}{\Delta y}$.
- Е Знайти границю знайденої частки при $\Delta x \rightarrow 3$.
- Є Знайти границю знайденої частки при $\Delta x \rightarrow 0$.
62. Відомо, що областю визначення неперервної функції $y = f(x)$ є проміжок $(-\infty; +\infty)$. Як дослідити цю функцію на монотонність?
- А Позначити $g(x) = f'(x)$.
- Б Позначити $g(x) = f''(x)$.
- В Розв’язати нерівності $f(x) > 0$ (1) і $f(x) < 0$ (2).
- Г Розв’язати нерівності $g(x) > 0$ (1) і $g(x) < 0$ (2).
- Д Проміжки, що є розв’язками нерівності (1), записати як проміжки зростання функції, а проміжки, що є розв’язками нерівності (2), записати як проміжки спадання функції.
- Е Проміжки, що є розв’язками нерівності (1), записати як проміжки спадання функції, а проміжки, що є розв’язками нерівності (2), записати як проміжки зростання функції.

Завдання з короткою відповіддю

Розв’яжіть завдання 63–92 і запишіть відповідь **ОДНИМ ЧИСЛОМ**.

63. Обчисліть значення $f'(3)$, якщо $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.
64. Обчисліть значення $h'(-2)$, якщо $h(x) = \frac{1-2x}{2x+3}$.

65. Знайдіть похідну функції $y = \frac{\sin(\pi - x)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)}$ у точці $x_0 = -\frac{\pi}{6}$.
66. Знайдіть похідну функції $y = \frac{\cos(\pi + x)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}$ у точці $x_0 = -\frac{\pi}{4}$.
67. Відомо, що $f(x)$ — лінійна функція, причому $f(0) = 6$, а $f'(1) = 4$. Знайдіть значення $f(5)$.
68. Відомо, що $g(x)$ — лінійна функція, причому $g(1) = -2$, а $g'(0) = 3$. Знайдіть значення $g(-2)$.
69. Відомо, що $f(x)$ — квадратична функція, причому $f(0) = 3$, $f'(0) = -1$, а $f''(0) = 2$. Знайдіть значення $f(4)$.
70. Відомо, що $h(x)$ — квадратична функція, причому $h(1) = 0$, $h'(1) = 2$, а $h''(1) = -1$. Знайдіть значення $h(2)$.
71. Нехай $\psi(x) = x \cdot \varphi(x)$. Знайдіть значення $\psi'(-1)$, якщо відомо, що функція $\varphi(x)$ є диференційовною на множині дійсних чисел і $\varphi(-1) = 3$, а $\varphi'(-1) = -5$.
72. Нехай $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. Знайдіть значення $g'(2)$, якщо відомо, що функція $f(x)$ є диференційовною на множині дійсних чисел і $f(2) = -1$, а $f'(2) = 5$.
73. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції $y = x^3 - 4x^2 + 8x + 9$ у точці з абсцисою $x_0 = -1$.
74. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції $y = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$ у точці з абсцисою $x_0 = -2$.
75. Дотична, проведена до параболи $y = 2x^2 - 3x + 7$ у деякій точці, утворює з додатним напрямком осі Ox кут 45° . Знайдіть ординату точки дотику.

76. Дотична, проведена до параболи $y = -x^2 + 3x - 4$ у деякій точці, утворює з додатним напрямком осі Ox кут 135° . Знайдіть ординату точки дотику.
77. Обчисліть площу трикутника, утвореного осями координат і дотичною до графіка функції $y = x^3 + 2x^2 - 6$ у точці з абсцисою $x_0 = -1$.
78. Обчисліть площу трикутника, утвореного осями координат і дотичною до графіка функції $y = x^3 - x^2 - 6x + 2$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.
79. Знайдіть значення параметра a , при якому дотична до графіка функції $y = ax^2$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$ проходить через точку $P(4; 4)$.
80. Знайдіть значення параметра a , при якому дотична до графіка функції $y = x^2 + ax$ у точці з абсцисою $x_0 = -1$ проходить через точку $S(1; 2)$.
81. Матеріальна точка рухається прямолінійно вздовж осі абсцис, причому закон зміни координати x залежно від часу t задано функцією $x(t) = t^2 - 2t + 5$. Знайдіть момент часу t_0 , для якого миттєва швидкість $v(t_0) = 3$.
82. Матеріальна точка рухається прямолінійно вздовж осі ординат, причому закон зміни координати y залежно від часу t задано функцією $y(t) = (t + 3)(t - 4)$. Знайдіть момент часу t_0 , для якого миттєва швидкість $v(t_0) = 0$ (матеріальна точка зупинилася).
83. Тіло масою $m = 2$ кг рухається під дією змінної сили $F(t)$, причому закон зміни швидкості цього тіла задається функцією $v(t) = t^4 - 2t^2 + 4$ (F вимірюється в Н, v — у м/с, t — у с). Знайдіть закон зміни сили $F(t)$. У відповідь запишіть значення $F(3)$.
84. Тіло масою $m = 3$ кг рухається під дією змінної сили $F(t)$ за законом $s(t) = 5t^3 - t^2 + 10$ (F вимірюється в Н, s — у м, t — у с). Знайдіть закон зміни сили $F(t)$. У відповідь запишіть значення $F(2)$.
85. Знайдіть абсцису точки локального мінімуму функції $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 10$.
86. За умовою попередньої задачі знайдіть абсцису точки перегину для наведеної функції.

87. Знайдіть абсцису точки локального максимуму функції $y = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x + 6$.
88. За умовою попередньої задачі знайдіть абсцису точки перегину для наведеної функції.
89. Площа малюнка, який замовили художнику, має дорівнювати 432 см^2 . Яким має бути периметр (у см) прямокутного аркуша паперу **НАЙМЕНШОЇ** площі, на якому поміститься цей малюнок, якщо поля для рамки становлять: 2 см знизу, згори і зліва та 1 см справа?
90. Для виготовлення акваріума Петрик взяв прямокутний шматок скла завдовжки 50 см і завширшки 80 см та розрізав його так, як це зображено на рис. 19. Після вилучення чотирьох однакових кутових квадратів акваріум було склеєно. Який **НАЙБІЛЬШИЙ** об'єм (у л) може мати акваріум Петрика?



Рис. 19

91. Витрати бензину V під час руху автомобіля зі швидкістю x м/с виражаються формулою $V(x) = 125 + 0,2x^2$ (см³/с). При якій швидкості руху автомобіля (у м/с) витрати бензину **НА 1 М ШЛЯХУ** будуть **НАЙМЕНШИМИ**?
92. Служба експрес-таксі встановила тариф $T(x) = x^3 - 120x^2 + 7800x$ копійок за 1 год під час руху автомобіля зі швидкістю x км/год. Пасажир, сідаючи в таксі, може обирати швидкість руху автомобіля. Яку швидкість (у км/год) має обрати пасажир, щоб його витрати **НА 1 КМ ШЛЯХУ** були **НАЙМЕНШИМИ**?

Завдання з повним розв'язанням

Завдання 93–100 розв'яжіть із повним обґрунтуванням, посилаючись на відповідні означення, твердження, формули. У разі потреби проілюструйте розв'язання таблицями, діаграмами, графіками тощо.

93. Знайдіть рівняння горизонтальних дотичних, проведених до графіка функції $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5$.

94. Знайдіть рівняння дотичної, проведеної до графіка функції $f(x) = \frac{5x-1}{x+3}$, яка:
- паралельна прямій $y = 4x - 9$;
 - перпендикулярна до прямої $y = -4x + 8$.
95. Скільки критичних точок має функція $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 8$ на проміжку $[-a; a]$ ($a > 0$) залежно від значень параметра a ?
96. Знайдіть кількість критичних точок функції $y = (2x-1)\sqrt{x-a}$ залежно від значень параметра a .
97. Задано функцію $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x$.
- Знайдіть екстремуми і проміжки монотонності цієї функції.
 - Знайдіть інтервали опуклості й точки перегину цієї функції.
 - Побудуйте ескіз графіка функції $y = f(x)$.
 - Укажіть кількість коренів рівняння $f(x) = a$ залежно від значень параметра a .
98. Задано функцію $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$.
- Знайдіть екстремуми і проміжки монотонності цієї функції.
 - Знайдіть інтервали опуклості й точки перегину цієї функції.
 - Побудуйте ескіз графіка функції $y = f(x)$.
 - Укажіть кількість коренів рівняння $f(x) = a$ залежно від значень параметра a .
99. У фігуру, обмежену лініями $y = 6x^2$ та $y = 8$, вписано прямокутник НАЙБІЛЬШОЇ площі так, що дві його вершини лежать на прямій, а дві інші — на параболі. Знайдіть:
- координати вершин цього прямокутника;
 - площу цього прямокутника.
100. Точки $A(0; 0)$, $B(9; 3)$ і $C(x; y)$ лежать на графіку функції $y = \sqrt{x}$, причому трикутник ACB має НАЙБІЛЬШУ площу. Знайдіть:
- абсцису точки C , якщо $x \in [0; 9]$;
 - площу трикутника ACB .

6.3. Первісна, інтеграл та їх застосування

Найпростіші завдання з повним розв'язанням

Знайдіть первісні $F(x)$ функцій $f(x)$, наведених у завданнях 1–12. Завдання розв'яжіть УСНО.

1. $f(x) = 5.$

2. $f(x) = 0.$

3. $f(x) = x^4.$

4. $f(x) = 2^4.$

5. $f(x) = 2^x.$

6. $f(x) = e^x.$

7. $f(x) = \frac{1}{x}.$

8. $f(x) = \frac{1}{x^2}.$

9. $f(x) = \cos x.$

10. $f(x) = \sin 2.$

11. $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}.$

12. $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}.$

Розв'яжіть УСНО завдання 13–18, користуючись графіком функції $y = f(x)$ (рис. 20). Установіть, які з наведених інтегралів є додатними числами; від'ємними числами; такими, що дорівнюють нулю.

13. $\int_{-4}^0 f(x) dx.$

16. $\int_0^4 f(x) dx.$

14. $\int_0^2 f(x) dx.$

17. $\int_{-2}^2 f(x) dx.$

15. $\int_2^4 f(x) dx.$

18. $\int_{-4}^4 f(x) dx.$

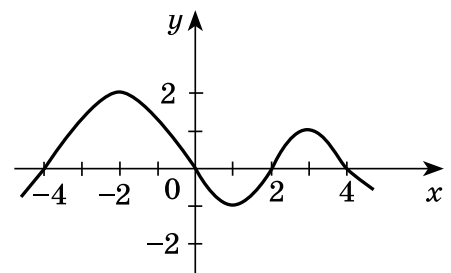


Рис. 20

Розв'яжіть УСНО завдання 19–20, користуючись тим, що закон зміни миттєвої швидкості v матеріальної точки, що рухається прямолінійно вздовж осі абсцис, від часу t задано функцією $v(t) = 3t^2$, причому в початковий момент часу $t_0 = 0$ ця матеріальна точка знаходилася в початку координат.

19. Знайдіть залежність $x(t)$ координати x цієї матеріальної точки від часу t .

20. Знайдіть шлях, пройдений цією матеріальною точкою від моменту часу $t_0 = 0$ до моменту часу $t_1 = 5$.

Завдання з вибором однієї правильної відповіді

Проаналізуйте умови та вимоги завдань 21–50 та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

21. Для функції $f(x) = \sin x$ знайдіть первісну $F(x)$, графік якої проходить через точку $O(0; 0)$.

А	Б	В	Г	Д
$F(x) = \cos x - 1$	$F(x) = 1 - \cos x$	$F(x) = \cos x + 1$	$F(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$

22. Для функції $g(x) = \cos x$ знайдіть первісну $G(x)$, графік якої проходить через точку $P(0; 1)$.

А	Б	В	Г	Д
$G(x) = \sin x$	$G(x) = \cos x$	$G(x) = \sin x + 1$	$G(x) = -\cos x + 2$	$G(x) = -\sin x + 1$

23. Укажіть функцію $G(x)$, яка є первісною функції $g(x) = x + 4$.

А	Б	В	Г	Д
$G(x) = \frac{x^2}{2} + 4x$	$G(x) = \frac{(x+4)^2}{2}$	$G(x) = 1$	$G(x) = x^2 + 4x$	$G(x) = \frac{x^2}{2} + 4$

24. Укажіть функцію $F(x)$, яка є первісною функції $f(x) = e^{-2x}$.

А	Б	В	Г	Д
$F(x) = -2e^{-2x}$	$F(x) = e^{-2x}$	$F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$	$F(x) = 2e^{-2x}$	$F(x) = \frac{1}{2}e^{-2x}$

25. На рис. 21 зображено 6 точок: A, B, C, D, K, M . Через точку K проходить графік функції, що є первісною функції $g(x)$. Укажіть точку, через яку **ОБОВ'ЯЗКОВО** проходить графік якоїсь іншої первісної функції $g(x)$.

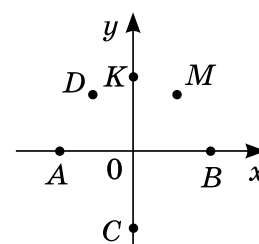


Рис. 21

А	Б	В	Г	Д
A	B	C	D	M

26. Відомо, що графік однієї з первісних функції $f(x)$ проходить через точку $M(-5; 3)$. Яка з наведених точок **ОБОВ'ЯЗКОВО** належить графіку якоїсь іншої первісної функції $f(x)$?

А	Б	В	Г	Д
$K(1; 3)$	$L(-3; 5)$	$P(5; -3)$	$Q(3; -5)$	$S(-5; 1)$

27. На рис. 22 зображено графік функції $y = f'(x)$. Яка з наведених нижче функцій **МОЖЕ** бути функцією $y = f(x)$?

А	Б	В	Г	Д
$y = \cos x$	$y = x^2 + 1$	$y = \frac{1}{x}$	$y = x$	$y = 1$

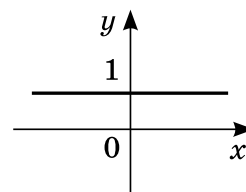


Рис. 22

28. На рис. 23 зображено графік функції $y = f'(x)$. Яка з наведених нижче функцій **МОЖЕ** бути функцією $y = f(x)$?

А	Б	В	Г	Д
$y = 2^x$	$y = x$	$y = \frac{1}{x}$	$y = \operatorname{tg} x$	$y = \lg x$

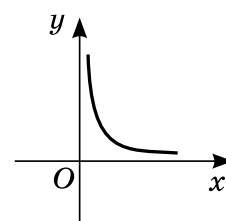


Рис. 23

29. Відомо, що функція $F(x)$ є первісною функції $f(x)$, а функція $G(x)$ є первісною функції $g(x)$. Які з наведених тверджень є правильними?

I. Функція $F(x) + G(x)$ є первісною функції $f(x) + g(x)$.

II. Функція $F(x) \cdot G(x)$ є первісною функції $f(x) \cdot g(x)$.

III. Функція $\frac{F(x)}{G(x)}$ є первісною функції $\frac{f(x)}{g(x)}$.

А	Б	В	Г	Д
Тільки I	Тільки II	Тільки III	Тільки I і II	Усі твердження

30. Відомо, що функція $F(x)$ є первісною функції $f(x)$. Які з наведених тверджень є **НЕПРАВИЛЬНИМИ**?

I. Функція $2F(x)$ є первісною функції $2f(x)$.

II. Функція $F(x) + 2$ є первісною функції $f(x) + 2$.

III. Функція $\frac{1}{2}F\left(\frac{1}{2}x\right)$ є первісною функції $f\left(\frac{1}{2}x\right)$.

А	Б	В	Г	Д
Тільки I	Тільки II	Тільки III	Тільки II і III	Усі твердження

31. Укажіть інтеграл, значення якого є додатним числом.

А	Б	В	Г	Д
$\int_{-1}^1 x dx$	$\int_{-1}^1 (-x) dx$	$\int_{-1}^1 x^2 dx$	$\int_{-1}^1 (-x^2) dx$	$\int_{-1}^1 x^3 dx$

32. Укажіть інтеграл, значення якого є від'ємним числом.

А	Б	В	Г	Д
$\int_{-2}^2 x^3 dx$	$\int_{-2}^2 (-x^5) dx$	$\int_{-2}^2 x^4 dx$	$\int_{-2}^2 (-x^6) dx$	$\int_{-2}^2 x^7 dx$

33. Укажіть формулу, за якою обчислюється площа S заштрихованої криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = x^2 - 2x$ і віссю абсцис (рис. 24).

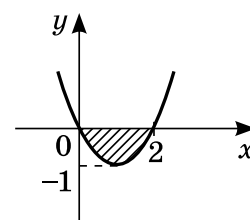


Рис. 24

А	Б	В	Г	Д
$S = \int_0^2 (2x - x^2) dx$	$S = \int_{-1}^0 (2x - x^2) dx$	$S = \int_{-1}^2 (x^2 - 2x) dx$	$S = \int_{-1}^0 (x^2 - 2x) dx$	$S = \int_0^2 (x^2 - 2x) dx$

34. На рис. 25 зображено графіки функцій $y = 2x$ і $y = 2\sqrt{x}$. Укажіть формулу, за якою обчислюється площа S заштрихованої геометричної фігури.

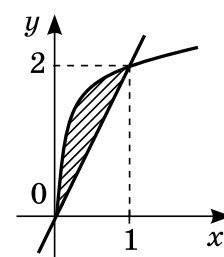


Рис. 25

А	Б	В	Г	Д
$S = 2 \int_0^2 (\sqrt{x} - x) dx$	$S = 2 \int_0^1 (\sqrt{x} - x) dx$	$S = 2 \int_0^1 \sqrt{x} dx$	$S = 2 \int_0^1 (x - \sqrt{x}) dx$	$S = 2 \int_0^2 (x - \sqrt{x}) dx$

35. Обчисліть площу S заштрихованої криволінійної трапеції (рис. 26).

А	Б	В	Г	Д
$S = -\ln 3$	$S = 3\ln 3$	$S = 3$	$S = -3\ln 3$	$S = \ln 3$

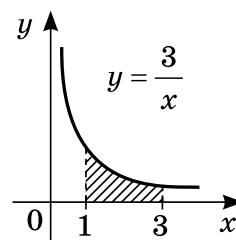


Рис. 26

36. Обчисліть площу S заштрихованої криволінійної трапеції (рис. 27).

А	Б	В	Г	Д
$S = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$S = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$S = \frac{1}{2}$	$S = \frac{\pi}{4}$	$S = 1$

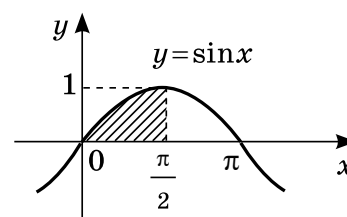


Рис. 27

37. На рис. 28 зображено фрагмент графіка функції $y = f(x)$. Укажіть проміжок, якому належить значення інтеграла $\int_0^1 f(x) dx$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$	$\left(0; \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}; 1\right)$	$(1; 2)$

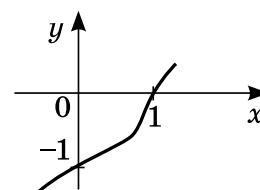


Рис. 28

38. На рис. 29 зображено фрагмент графіка функції $y = h(x)$. Укажіть проміжок, якому належить значення інтеграла $\int_0^1 h(x) dx$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$	$\left(0; \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}; 1\right)$	$(1; 2)$

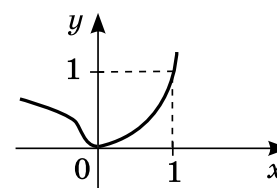


Рис. 29

39. Укажіть інтеграл, значення якого належить проміжку $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

А	Б	В	Г	Д
$\int_0^1 x dx$	$\int_{-1}^1 x dx$	$\int_0^1 x^2 dx$	$\int_{-1}^1 x^2 dx$	$\int_0^1 \sqrt{x} dx$

40. Укажіть інтеграл, значення якого належить проміжку $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

А	Б	В	Г	Д
$\int_0^1 x dx$	$\int_{-1}^1 x dx$	$\int_0^1 x^2 dx$	$\int_{-1}^0 x^2 dx$	$\int_0^1 \sqrt{x} dx$

41. На рис. 30 зображено графік функції $y = f(x)$. Укажіть

правильну подвійну нерівність, якщо: $a = \int_0^1 f(x) dx$,

$$b = \int_1^2 f(x) dx, \quad c = \int_2^3 f(x) dx.$$

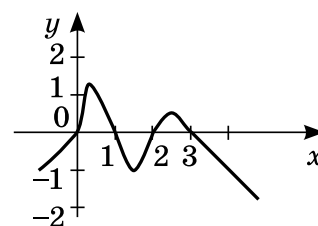


Рис. 30

А	Б	В	Г	Д
$a < b < c$	$c < b < a$	$c < a < b$	$b < c < a$	$b < a < c$

42. На рис. 31 зображено графік функції $y = f(x)$. Укажіть

правильну подвійну нерівність, якщо: $a = \int_0^1 f(x) dx$,

$$b = \int_1^2 f(x) dx, \quad c = \int_2^3 f(x) dx.$$

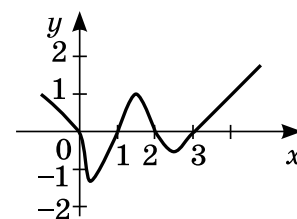


Рис. 31

А	Б	В	Г	Д
$a < b < c$	$c < a < b$	$c < b < a$	$b < a < c$	$a < c < b$

43. Знайдіть $\int_1^5 f(x) dx$, якщо $\int_1^2 f(x) dx = -3$, $\int_2^5 f(x) dx = -3$.

А	Б	В	Г	Д
-6	-3	0	3	6

44. Знайдіть $\int_1^3 g(x) dx$, якщо $\int_3^7 g(x) dx = -2$, $\int_1^7 g(x) dx = 7$.

А	Б	В	Г	Д
-5	-9	7	9	5

45. Серед наведених функцій $f(x)$ укажіть таку, що задовольняє умову

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 0.$$

А	Б	В	Г	Д
$f(x) = 1$	$f(x) = \sqrt{x}$	$f(x) = x^2$	$f(x) = \sin x$	$f(x) = \cos x$

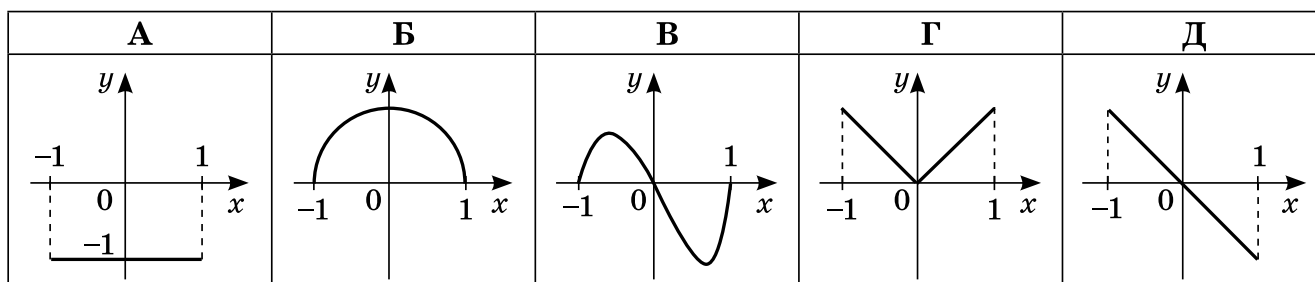
46. Серед наведених функцій $g(x)$ укажіть таку, що задовольняє умову

$$\int_{-1}^1 g(x) dx = 2 \int_0^1 g(x) dx.$$

А	Б	В	Г	Д
$g(x) = 2^x$	$g(x) = 2x$	$g(x) = \cos x$	$g(x) = \operatorname{tg} x$	$g(x) = \sin x$

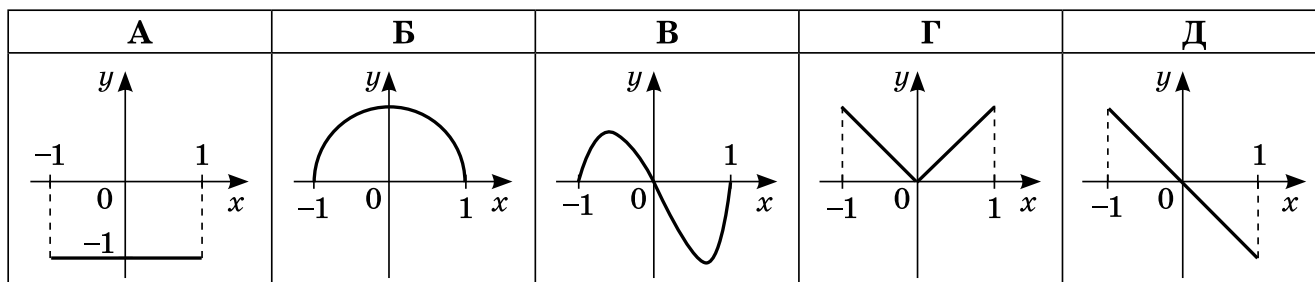
47. Укажіть графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-1; 1]$, якщо

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 0.$$



48. Укажіть графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-1; 1]$, якщо

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx, \text{ причому } \int_{-1}^1 f(x) dx < 0.$$



49. Які з наведених тверджень є правильними?

$$\text{I. } \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

$$\text{II. } \int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_b^a (g(x) - f(x)) dx.$$

$$\text{III. } \int_a^b (f(x) \cdot g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx.$$

А	Б	В	Г	Д
Тільки I	Тільки II	Тільки III	Тільки I і II	Усі твердження

50. Які з наведених тверджень є НЕПРАВИЛЬНИМИ?

$$\text{I. } \int_a^b 3 \cdot f(x) dx = 3 \cdot \int_a^b f(x) dx.$$

$$\text{II. } \int_a^b (3 + f(x)) dx = 3(b - a) + \int_a^b f(x) dx.$$

$$\text{III. } \int_a^b f(3 + x) dx = 3 + \int_a^b f(x) dx.$$

А	Б	В	Г	Д
Тільки I	Тільки II	Тільки III	Тільки II і III	Усі твердження

У завданнях 51–54 сформульовано проблему (питання), яку потрібно розв'язати (отримати однозначну відповідь на питання), використовуючи для цього додаткові дані — твердження (1) і (2). Визначте, чи достатньо цих даних для розв'язання проблеми, і оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь*.

51. Побудуйте графік функції $y = f(x)$.

(1) Будь-яка функція виду $F(x) = -\sin x + C$, $C \in \mathbb{R}$, є первісною функції $f(x)$.

(2) $f'(x) = \sin x$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

* Саму проблему розв'язувати не обов'язково.

52. Побудуйте графік функції $y = g(x)$.

(1) функція $g(x)$ є первісною функції $y = \cos x$.

(2) функція $g(x)$ є непарною.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

53. Функція $y = f(x)$ є однією з таких: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$. Якою саме?

$$(1) \int_{-1}^1 f(x) dx = 0.$$

$$(2) \int_{0,1}^{1,5} f(x) dx > 2.$$

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

54. Функція $y = h(x)$ є однією з таких: $y = 2x$, $y = x^2$, $y = 2^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Якою саме?

$$(1) \int_{-1}^0 h(x) dx > 0.$$

$$(2) \int_{-1}^1 h(x) dx = 2 \int_0^1 h(x) dx.$$

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

У завданнях 55–56 порівняйте величини X і Y та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

55. Величина $X: \int_{-1}^0 x^2 dx$.
 Величина $Y: \int_0^1 x^2 dx$.

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

56. На рисунку 32 зображено графік функції $y = f(x)$.

Величина $X: \int_{-1}^0 f(x) dx$.
 Величина $Y: \int_0^1 f(x) dx$.

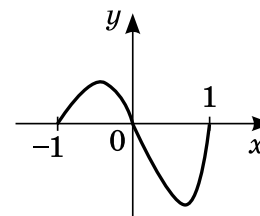


Рис. 32

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

Завдання на встановлення відповідності

У завданнях 57–60 до кожного рядка, позначеного цифрою, доберіть один відповідник, позначений літерою.

57. Установіть відповідність між функціями (1–4) і первісними цих функцій (А–Д).

1 $y = 4x$

2 $y = 6x^2$

3 $y = 8x^3$

4 $y = 10x^4$

А $y = 2x^5 + 9$

Б $y = 2x^4 + 7$

В $y = 2x^3 + 5$

Г $y = 2x^2 + 3$

Д $y = 2x + 1$

58. Установіть відповідність між функціями (1–4) і первісними цих функцій (А–Д).

1 $y = 3\sqrt{x}$

А $y = -\frac{1}{x}$

2 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Б $y = -\frac{1}{x^2}$

3 $y = \frac{1}{x}$

В $y = \ln x$

4 $y = \frac{1}{x^2}$

Г $y = 2\sqrt{x}$

Д $y = 2\sqrt{x^3}$

59. Графіки функцій $f(x) = 2 + x$ і $g(x) = 4 - x$ перетинаються в точці $C(1; 3)$ (рис. 33). Установіть відповідність між многокутниками (1–4), зображеними на рисунку, і інтегралами (А–Д), за якими обчислюються площі цих многокутників.

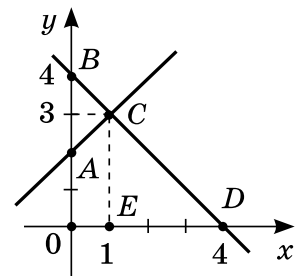


Рис. 33

1 Трикутник OBD

А $\int_0^1 f(x) dx$

2 Трикутник ABC

Б $\int_0^4 g(x) dx$

3 Чотирикутник $OACE$

В $\int_0^1 (f(x) - g(x)) dx$

4 Чотирикутник $OBCE$

Г $\int_0^1 (g(x) - f(x)) dx$

Д $\int_0^1 g(x) dx$

60. Графіки лінійних функцій $f(x)$ і $g(x)$ перетинаються в точці $C(4; 0)$ (рис. 34). Установіть відповідність між трикутниками (1–4), зображеними на рисунку, і інтегралами (А–Д), за якими обчислюються площі цих трикутників.

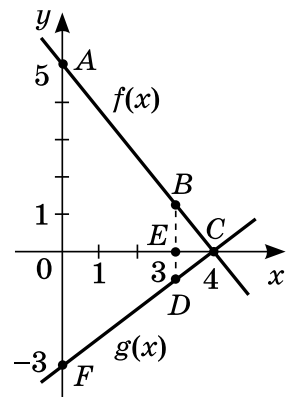


Рис. 34

1 OFC

2 OAC

3 ACF

4 DBC

А $\int_0^4 f(x)dx$

Б $\int_0^4 (f(x) - g(x))dx$

В $\int_0^4 g(x)dx$

Г $\int_3^4 (f(x) - g(x))dx$

Д $\int_0^4 (-g(x))dx$

Завдання на встановлення послідовності

У завданнях 61–62 виберіть тільки необхідні для розв'язання поставленої задачі дії і розмістіть їх у правильній послідовності. У відповідь запишіть отриману послідовність літер.

61. Як обчислити площу заштрихованої геометричної фігури (рис. 35)?

А Знайти число S_1 за формулою $S_1 = \int_0^a f(x)dx$.

Б Знайти число S_1 за формулою $S_1 = \int_b^a f(x)dx$.

В Знайти число S_2 за формулою $S_2 = \int_0^a g(x)dx$.

Г Знайти число S_2 за формулою $S_2 = \int_b^a g(x)dx$.

Д Знайти шукану площу за формулою $S = S_1 - S_2$.

Е Знайти шукану площу за формулою $S = S_2 - S_1$.

Є Знайти шукану площу за формулою $S = S_1 + S_2$.

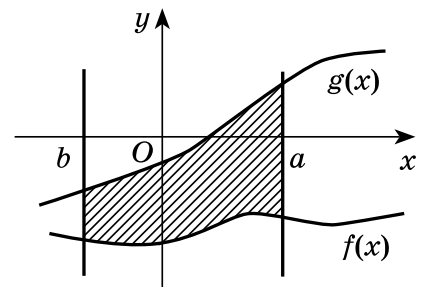


Рис. 35

62. Як знайти об'єм тіла, утвореного внаслідок обертання навколо осі абсцис заштрихованої геометричної фігури (рис. 36)?

А Знайти число V_1 за формулою $V_1 = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$.

Б Знайти число V_1 за формулою $V_1 = \pi \int_0^b (f(x))^2 dx$.

В Знайти число V_2 за формулою $V_2 = \pi \int_a^b (g(x))^2 dx$.

Г Знайти число V_2 за формулою $V_2 = \pi \int_0^b (g(x))^2 dx$.

Д Знайти шуканий об'єм за формулою $V = V_1 - V_2$.

Е Знайти шуканий об'єм за формулою $V = V_2 - V_1$.

Є Знайти шуканий об'єм за формулою $V = V_1 + V_2$.

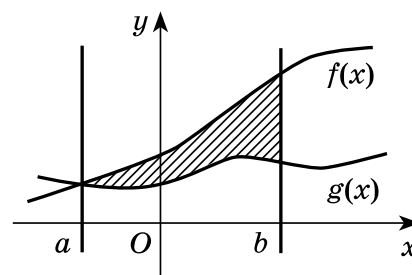


Рис. 36

Завдання з короткою відповіддю

Розв'яжіть завдання 63–92 і запишіть відповідь **ОДНИМ ЧИСЛОМ**.

63. Функція $F(x)$ є первісною функції $f(x) = 2x$, причому $F(2) = 5$. Знайдіть значення $F(-3)$.

64. Функція $G(x)$ є первісною функції $g(x) = 3x^2$, причому $G(-1) = 2$. Знайдіть значення $G(2)$.

65. Обчисліть інтеграл $\int_{-1}^{10} (3 \sin^2 x + 3 \cos^2 x) dx$.

66. Обчисліть інтеграл $\int_{0,5}^{1,2} 5 \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x dx$.

67. Обчисліть інтеграл $\int_{-2}^{-1} \frac{x^2 - x}{2x} dx$.

68. Обчисліть інтеграл $\int_1^2 \frac{x^3 + 2x^2 - 2}{x^2} dx$.

69. Обчисліть інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(3x) \cos x dx$.

70. Обчисліть інтеграл $\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \cos(3x) \cos x dx$.

71. На рис. 37 зображено графік лінійної функції $y = f(x)$. Обчисліть інтеграл $\int_{-3}^5 f(x) dx$.

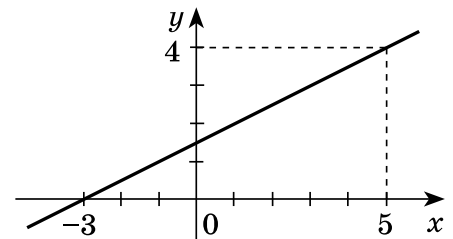


Рис. 37

72. На рис. 38 зображено графік лінійної функції $y = g(x)$. Обчисліть інтеграл $\int_{-1}^5 g(x) dx$.

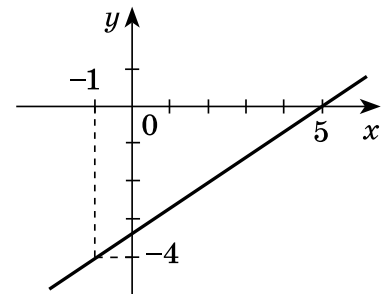


Рис. 38

73. На рис. 39 зображено графік функції $y = f(x)$. Обчисліть інтеграл $\int_0^{15} f'(x) dx$.

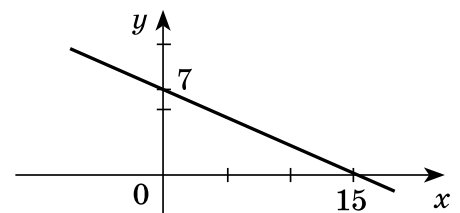


Рис. 39

74. На рис. 40 зображено графік функції $y = h(x)$.

Обчисліть інтеграл $\int_0^6 h'(x) dx$.

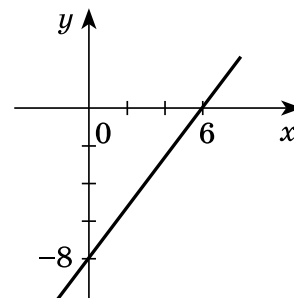


Рис. 40

75. Обчисліть інтеграл $\int_{-3}^1 |x| dx$.

76. Обчисліть інтеграл $\int_{-2}^1 |x+1| dx$.

77. Обчисліть інтеграл $\int_0^5 ||x| - 3| dx$.

78. Обчисліть інтеграл $\int_{-1}^2 |1 - |x|| x$.

79. Обчисліть інтеграл $\int_{-5}^5 \sqrt{25 - x^2} dx$.

80. Обчисліть інтеграл $\int_3^5 \sqrt{6x - x^2 - 5} dx$.

81. Обчисліть інтеграл $\int_{-1}^1 (8x + f(x)) dx$, якщо функція $f(x)$ є парною і $\int_0^1 f(x) dx = 14$.

82. Обчисліть інтеграл $\int_{-2}^2 (6x^2 + h(x)) dx$, якщо функція $h(x)$ є непарною і $\int_0^2 h(x) dx = 7$.

83. Знайдіть площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = -x^2 + 2x$ і $y = -x$.

84. Обчисліть площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = x^2 - 2x + 3$ і $y = 3x - 1$.
85. Задано функцію $y = a \sin x$ (рис. 41). Знайдіть значення параметра a , при якому площа заштрихованої криволінійної трапеції дорівнює 9.

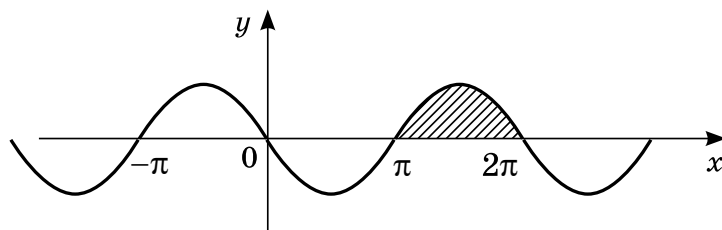


Рис. 41

86. Задано функцію $y = b \cos x$ (рис. 42). Знайдіть значення параметра b , при якому площа заштрихованої криволінійної трапеції дорівнює 6.

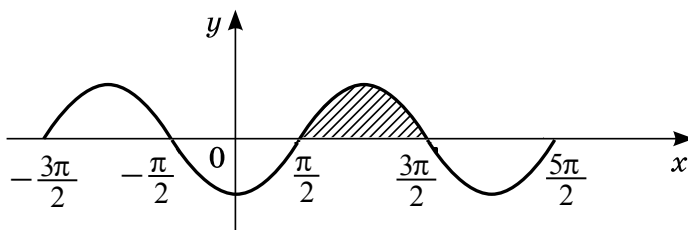


Рис. 42

87. Знайдіть об'єм тіла, утвореного внаслідок обертання навколо осі Ox геометричної фігури, обмеженої графіками функцій $y = \sqrt{x}$, $y = 1$ і $x = 3$.
88. Знайдіть об'єм тіла, утвореного внаслідок обертання навколо осі Ox геометричної фігури, обмеженої графіками функцій $y = x^2$ і $y = 2x$.
89. Тіло рухається прямолінійною ділянкою шляху, а його швидкість (u м/с) при цьому змінюється за законом $v(t) = 6t^2 + 2t - 2$. На якій відстані (u м) від початку відліку знаходилося тіло через 1 с після початку руху, якщо через 2 с після початку руху ця відстань становила 18 м?

90. Тіло рухається прямолінійною ділянкою шляху, а його швидкість (у м/с) при цьому змінюється за законом $v(t) = 9t^2 - 4t + 1$. На якій відстані (у м) від початку відліку знаходилося тіло через 2 с після початку руху, якщо через 1 с після початку руху ця відстань становила 1 м?
91. Матеріальна точка масою 2 кг рухається прямолінійно під дією постійної сили 8 Н. Яку відстань (у м) пододала ця матеріальна точка за перші 5 с руху, якщо через 2 с після початку руху вона мала швидкість 10 м/с?
92. Матеріальна точка масою 4 кг рухається прямолінійно під дією постійної сили 8 Н. Яку відстань (у м) пододала ця матеріальна точка за перші 6 с руху, якщо через 2 с після початку руху вона мала швидкість 10 м/с?

Завдання з повним розв'язанням

Завдання 93–100 розв'яжіть із повним обґрунтуванням, посилаючись на відповідні означення, твердження, формули. У разі потреби проілюструйте розв'язання таблицями, діаграмами, графіками тощо.

93. Використовуючи геометричний зміст інтеграла, обчисліть інтеграл

$$\int_{0,5}^1 \arcsin x \, dx.$$

94. Використовуючи геометричний зміст інтеграла, обчисліть інтеграл

$$\int_{-0,5}^{0,5} \arccos x \, dx.$$

95. Знайдіть усі значення параметра a , для яких виконується нерівність

$$\int_0^1 (a^2 + 10ax + 4x^3) \, dx \leq 7.$$

96. Знайдіть усі значення параметра b , для яких виконується нерівність

$$\int_0^1 \left(4x^3 b^2 - \frac{3b\sqrt{x}}{2} - 36x^2 \right) dx < 0.$$

97. Знайдіть функцію $f(x)$, яка задовольняє співвідношення $f(x) = x^2 + \int_0^2 t \cdot f(t) dt$.

98. Знайдіть функцію $g(x)$, яка задовольняє співвідношення

$$g(x) = 2x + \int_0^1 t^2 \cdot g(t) dt.$$

99. Побудуйте графік функції $f(x) = \int_0^x (2t + 8) dt$. Знайдіть множину значень цієї функції.

100. Побудуйте графік функції $h(x) = \int_0^x (10 - 2t) dt$. Знайдіть множину значень цієї функції.

Розділ 7. ПЛАНІМЕТРІЯ

7.1. Трикутники та їх елементи

Найпростіші завдання з повним розв'язанням

Завдання 1–20 розв'яжіть УСНО.

1. На відрізку AB позначили точку C . Знайдіть довжину відрізка BC , якщо $AB = 10$, $AC = 3$.
2. Точка M ділить відрізок $KL = 20$ см на два відрізки KM і ML , причому перший із них на 2 см менший за другий. Знайдіть довжини відрізків KM і ML .
3. Один із двох суміжних кутів у 9 разів більший за інший. Знайдіть градусні міри цих кутів.
4. При перетині двох прямих утворилися чотири кути, причому градусна міра одного з них дорівнює 140° . Знайдіть градусні міри інших трьох кутів.
5. Градусна міра одного з восьми кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 50° . Знайдіть градусні міри решти семи кутів.
6. Градусні міри двох кутів трикутника дорівнюють 30° і 100° . Знайдіть градусну міру третього кута цього трикутника.
7. Градусна міра одного з гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 44° . Знайдіть градусну міру іншого гострого кута цього трикутника.
8. Сума двох зовнішніх кутів, взятих по одному при вершинах A і B трикутника ABC , дорівнює 200° . Знайдіть градусну міру зовнішнього кута при вершині C .
9. У деякому трикутнику всі три кути рівні між собою, а одна зі сторін дорівнює 2. Знайдіть площу цього трикутника.
10. Один із катетів прямокутного трикутника дорівнює 4, а гіпотенуза цього трикутника дорівнює 5. Знайдіть інший катет цього трикутника.
11. За умовою попередньої задачі знайдіть радіус кола, вписаного в прямокутний трикутник.
12. У прямокутному трикутнику гіпотенуза дорівнює 7. Знайдіть радіус кола, описаного навколо цього трикутника.
13. За умовою попередньої задачі знайдіть довжину медіани, проведену до гіпотенузи прямокутного трикутника.
14. Знайдіть площу прямокутного трикутника, катети якого дорівнюють 1 і 6.

15. У прямокутному трикутнику градусна міра одного з гострих кутів дорівнює 30° , а катет, що лежить проти цього кута, дорівнює 3. Знайдіть гіпотенузу цього трикутника.
16. У трикутнику ABC $\angle A = \angle C$. Знайдіть периметр цього трикутника, якщо $AB = 5$, $AC = 3$.
17. У рівнобедреному трикутнику градусна міра кута при основі дорівнює 70° . Знайдіть градусні міри двох інших кутів цього трикутника.
18. У деякому трикутнику дві сторони дорівнюють 2 і 5, а градусна міра кута між ними — 30° . Знайдіть площу цього трикутника.
19. У деякому трикутнику дві сторони дорівнюють 5 см і 8 см. У яких межах може змінюватися довжина третьої сторони цього трикутника?
20. У трикутнику PRS $\angle P = 50^\circ$, $\angle R = 60^\circ$, $\angle S = 70^\circ$. Укажіть найменшу та найбільшу сторони цього трикутника.

Завдання з вибором однієї правильної відповіді

Проаналізуйте умови та вимоги завдань 21–50 та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

21. Укажіть правильне твердження.

А	Будь-які три точки на площині можуть бути вершинами деякого трикутника
Б	Будь-який відрізок на площині або належить даній прямій, або не має з нею спільних точок
В	Будь-які два промені на площині обов'язково перетинаються
Г	Будь-яка точка на площині або належить даному відрізку, або не належить йому
Д	Будь-які дві прямі на площині обов'язково перетинаються

22. Укажіть НЕПРАВИЛЬНЕ твердження.

А	Будь-які дві прямі на площині перетинаються не більш ніж в одній точці
Б	Будь-яка пряма, що перетинає одну сторону даного кута, обов'язково перетне і другу його сторону
В	Через будь-яку точку на площині можна провести пряму, перпендикулярну до даної прямої
Г	Будь-яка пряма, що не проходить через вершину трикутника, перетинає не більш ніж дві його сторони
Д	Через будь-яку точку, що не належить даній прямій, можна провести пряму, що не перетинає дану

23. На рис. 1 зображено паралельні прямі a і b та дві січні c і d . Знайдіть градусну міру кута α , якщо $\beta = 135^\circ$, $\gamma = 150^\circ$.

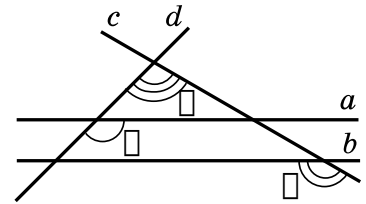


Рис. 1

А	Б	В	Г	Д
75°	90°	95°	100°	105°

24. За рис. 1 знайдіть градусну міру кута, суміжного з кутом β , якщо $\alpha = 110^\circ$, $\gamma = 160^\circ$.

А	Б	В	Г	Д
30°	50°	60°	120°	150°

25. α і β — два з восьми кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, причому $\alpha = 70^\circ$. Укажіть значення, якого МОЖЕ набувати градусна міра кута β .

А	Б	В	Г	Д
110°	90°	120°	130°	20°

26. α , β і γ — три з восьми кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, причому $\alpha + \beta = 100^\circ$. Укажіть значення, якого МОЖЕ набувати градусна міра кута γ .

А	Б	В	Г	Д
90°	120°	80°	130°	100°

27. Укажіть НЕПРАВИЛЬНЕ твердження.

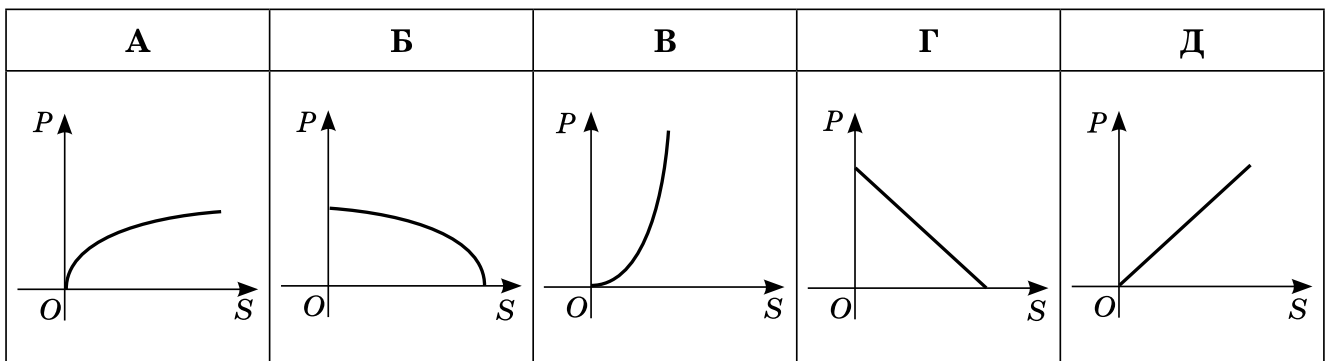
А	Навколо будь-якого трикутника можна описати коло
Б	Усі три медіани будь-якого трикутника перетинаються в одній точці, що знаходиться всередині цього трикутника
В	Усі три висоти будь-якого трикутника перетинаються в одній точці, що знаходиться всередині цього трикутника
Г	Усі три бісектриси будь-якого трикутника перетинаються в одній точці, що знаходиться всередині цього трикутника
Д	У будь-який трикутник завжди можна вписати коло

28. Дано три твердження. Які з них є правильними?

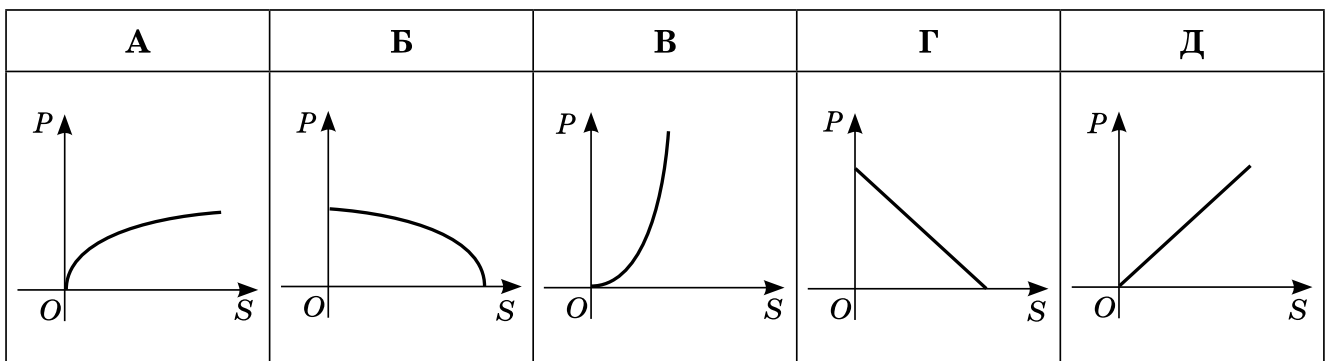
- I. У будь-якому трикутнику проти найбільшої сторони лежить найбільший кут.
- II. Площі подібних трикутників відносяться як квадрати їх периметрів.
- III. Центр кола, описаного навколо будь-якого гострокутного трикутника, знаходиться всередині цього трикутника.

А	Б	В	Г	Д
Тільки I	Тільки I і II	Тільки II і III	Тільки I і III	Усі твердження

29. Укажіть графік, який МОЖЕ бути графіком залежності $P = f(S)$ периметра P правильного трикутника від його площі S .



30. Укажіть графік, який МОЖЕ бути графіком залежності $S = f(P)$ площі S правильного трикутника від його периметра P .



31. У прямокутному трикутнику градусна міра одного з гострих кутів дорівнює 25° . Знайдіть градусну міру іншого гострого кута цього трикутника.

А	Б	В	Г	Д
155°	55°	75°	65°	20°

32. У рівнобедреному трикутнику градусна міра одного з кутів при основі дорівнює 25° . Знайдіть градусну міру кута при вершині цього трикутника.

А	Б	В	Г	Д
155°	130°	150°	75°	50°

33. У рівнобедреному прямокутному трикутнику з гіпотенузою $4\sqrt{2}$ точка M є серединою одного з катетів, а точка N — серединою гіпотенузи. Знайдіть довжину відрізка MN .

А	Б	В	Г	Д
2	4	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	Знайти неможливо

34. У рівнобедреному прямокутному трикутнику з катетом $8\sqrt{2}$ точка A є серединою одного з катетів, а точка B — серединою іншого катета. Знайдіть довжину відрізка AB .

А	Б	В	Г	Д
4	$4\sqrt{2}$	8	$8\sqrt{2}$	Знайти неможливо

35. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC $\angle B = 120^\circ$, а бічна сторона $BC = 14$ см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо цього трикутника.

А	Б	В	Г	Д
7 см	$7\sqrt{2}$ см	28 см	$14\sqrt{2}$ см	14 см

36. У трикутнику ABC $\angle A = 30^\circ$, а $\angle B = 105^\circ$. Знайдіть відношення $\frac{AB}{BC}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	2

37. Дано трикутник ABC . Висоти цього трикутника, проведені до сторін AC і AB , дорівнюють 3 см і 2 см відповідно. Знайдіть відношення $\frac{AC}{AB}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$

38. На рис. 2 зображено рівнобедрений трикутник ABC , BM — його медіана, проведена до основи, точка D належить відрізку BM . Знайдіть відношення площі трикутника ADC до площі трикутника ABC , якщо $BM = 5$ см, а $BD = 4$ см.

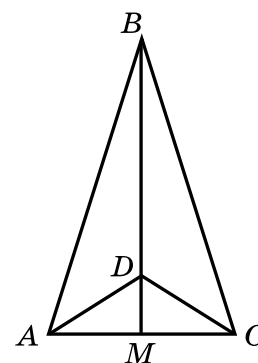


Рис. 2

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{16}{25}$	$\frac{1}{4}$

39. Якщо AB і AC — катети прямокутного трикутника ABC , то **ОБОВ'ЯЗКОВО...**

А	Б	В	Г	Д
$AB < AC$	$\angle ABC = 90^\circ$	$AC < BC$	$\angle ACB = 90^\circ$	$BC < AB$

40. Якщо у трикутнику ABC кут ABC — тупий, то **ОБОВ'ЯЗКОВО...**

А	Б	В	Г	Д
$AB < BC$	$\angle BAC$ найменший	$AC < AB$	$\angle ACB$ найменший	$BC < AC$

41. Обчисліть, якщо це можливо, площу трикутника, сторони якого дорівнюють 7, 8 і 15.

А	Б	В	Г	Д
420	$\sqrt{420}$	85	$\sqrt{85}$	Обчислити неможливо, оскільки такого трикутника не існує

42. У прямокутному трикутнику гіпотенуза дорівнює 10, а висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює 6. Обчисліть площу цього трикутника, якщо це можливо.

А	Б	В	Г	Д
15	30	60	90	Обчислити неможливо, оскільки такого трикутника не існує

43. Навколо трикутника ABC описано коло з центром у точці O , причому $AC = 5$, $OB = 6$. Знайдіть периметр трикутника OAC .

А	Б	В	Г	Д
8	10	11	17	20

44. У трикутник ABC вписано коло з центром у точці I . Знайдіть відстань від цієї точки до прямої AC , якщо діаметр кола дорівнює 8.

А	Б	В	Г	Д
2	4	6	8	10

45. Довжини трьох сторін трикутника дорівнюють 2 см, 4 см і 5 см. Укажіть вид цього трикутника.

А	Б	В	Г	Д
Тупокутний	Гострокутний	Прямокутний	Однозначно визначити неможливо	Такого трикутника не існує

46. Довжини трьох сторін трикутника дорівнюють 10 см, 11 см і 13 см. Укажіть вид цього трикутника.

А	Б	В	Г	Д
Тупокутний	Гострокутний	Прямокутний	Однозначно визначити неможливо	Такого трикутника не існує

47. Сторони трикутника дорівнюють 1, 4 і $\sqrt{17}$. Знайдіть градусну міру найбільшого з кутів цього трикутника.

А	Б	В	Г	Д
75°	60°	120°	100°	90°

48. Сторони трикутника дорівнюють 3 см, 5 см і 6 см. Знайдіть косинус найбільшого кута цього трикутника.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{15}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$-\frac{2}{15}$	$\frac{13}{15}$

49. Через точку перетину медіан трикутника ABC паралельно стороні AB проведено пряму, яка перетинає сторони AC і BC у точках M і N відповідно. Знайдіть відношення периметрів трикутників CMN і ABC .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

50. Через точку перетину медіан трикутника ABC паралельно стороні AC проведено пряму, яка перетинає сторони AB і BC у точках K і L відповідно. Знайдіть відношення площ трикутників BKL і ABC .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$

У завданнях 51–54 сформульовано проблему (питання), яку потрібно розв'язати (отримати однозначну відповідь на питання), використовуючи для цього додаткові дані — твердження (1) і (2). Визначте, чи достатньо цих даних для розв'язання проблеми, і оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь*.

51. Точка L належить стороні BC прямокутника $ABCD$ (рис. 3). Знайдіть площу цього прямокутника.
 (1) Площа трикутника ALD дорівнює 30.
 (2) Площа трикутника ABL дорівнює 20, а площа трикутника LCD дорівнює 10.

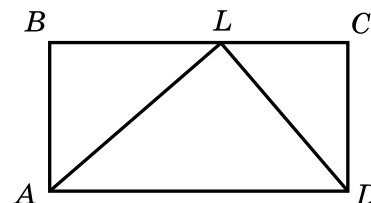


Рис. 3

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

52. Точка L належить стороні BC прямокутника $ABCD$ (див. рис. 3). Знайдіть периметр трикутника ALD .
 (1) $BL = 5$, $LC = 2$.
 (2) DL — бісектриса кута ADC .

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

* Саму проблему розв'язувати не обов'язково.

53. Дано відрізок, довжина якого дорівнює стороні AB трикутника ABC і кут, градусна міра якого дорівнює градусній мірі кута B цього трикутника. За допомогою циркуля та лінійки побудуйте трикутник ABC .

(1) Дано кут, градусна міра якого дорівнює градусній мірі кута A трикутника ABC .

(2) Дано відрізок, довжина якого дорівнює висоті CK трикутника ABC .

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

54. Дано відрізок, довжина якого дорівнює гіпотенузі KM прямокутного трикутника KLM . За допомогою циркуля та лінійки побудуйте цей трикутник.

(1) Дано відрізок, довжина якого дорівнює радіусу кола, описаного навколо трикутника KLM .

(2) Дано відрізок, довжина якого дорівнює висоті LH , проведеної до гіпотенузи KM .

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

У завданнях 55–56 порівняйте величини X і Y та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

55. На рис. 4 зображено трикутник ABC , у якому $BC = 4$, $AC = 8$, $\angle ABC = 120^\circ$.

Величина X : площа трикутника ABC .

Величина Y : 16.

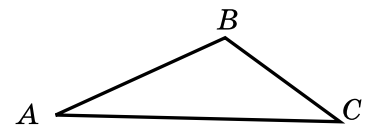


Рис. 4

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

56. У трикутнику PQS $PQ = 3$ см, $QS = 7$ см.

Величина X : 9 см

Величина Y : довжина сторони PS .

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

Завдання на встановлення відповідності

У завданнях 57–60 до кожного рядка, позначеного цифрою, доберіть один відповідник, позначений літерою.

57. Установіть відповідність між тригонометричними функціями гострих кутів прямокутного трикутника (1–4) і числовими значеннями цих функцій (А–Д), якщо катет прямокутного трикутника дорівнює 2 см, а його гіпотенуза — $\sqrt{5}$ см.

1 Тангенс меншого гострого кута

А $\frac{1}{2}$

2 Тангенс більшого гострого кута

3 Косинус меншого гострого кута

Б $\frac{1}{\sqrt{5}}$

4 Косинус більшого гострого кута

В $\sqrt{5}$

Г 2

Д $\frac{2}{\sqrt{5}}$

58. Установіть відповідність між величинами (1–4), пов'язаними з прямокутним трикутником, і числовими значеннями цих величин (А–Д), якщо катети прямокутного трикутника дорівнюють 6 і 8.

1 Площа трикутника

А 2

2 Півпериметр трикутника

Б 5

3 Радіус описаного кола

В 10

4 Радіус вписаного кола

Г 12

Д 24

59. Установіть відповідність між твердженнями (1–4) і множинами геометричних фігур (А–Д), для **КОЖНОГО** елемента яких виконуються ці твердження.
- | | | | |
|---|--|---|---|
| 1 | Центр описаного кола є точкою перетину медіан | А | Множина всіх правильних трикутників |
| 2 | Основа однієї з висот належить продовженню однієї зі сторін | Б | Множина всіх гострокутних трикутників, що не є правильними |
| 3 | Центр описаного кола знаходиться на одній із сторін | В | Множина всіх прямокутних трикутників |
| 4 | Точка перетину висот не збігається з точкою перетину медіан і знаходиться всередині трикутника | Г | Множина всіх тупокутних трикутників |
| | | Д | Множина всіх рівнобедрених трикутників, що не є рівносторонніми |
60. Установіть відповідність між множинами геометричних фігур (1–4) і властивостями (А–Д), які має **КОЖНИЙ** елемент цих множин.
- | | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | Множина всіх рівносторонніх трикутників | А | Центри вписаного та описаного кіл лежать на одній із медіан і не збігаються |
| 2 | Множина всіх рівнобедрених трикутників, що не є рівносторонніми | Б | Один із зовнішніх кутів є гострим |
| 3 | Множина всіх прямокутних трикутників | В | Сума всіх внутрішніх кутів дорівнює 360° |
| 4 | Множина всіх тупокутних трикутників | Г | Один із кутів дорівнює сумі двох інших |
| | | Д | Центри вписаного та описаного кіл збігаються |

Завдання на встановлення послідовності

У завданнях 61–62 виберіть тільки необхідні для розв'язання поставленої задачі дії і розмістіть їх у правильній послідовності. У відповідь запишіть отриману послідовність літер.

61. Як поділити даний відрізок AB навпіл за допомогою циркуля та лінійки?
- А Через точки A і B провести по дві довільні прямі: AA_1 , AA_2 , BB_1 , BB_2 .
- Б Побудувати два кола ω_1 і ω_2 довільного, але того самого радіуса $r > \frac{1}{2}AB$ з центрами в точках A та B відповідно.

- В** Побудувати два кола ω_1 і ω_2 довільного, але того самого радіуса $r < \frac{1}{2}AB$ з центрами в точках A та B відповідно.
- Г** Визначити точки C_1 і C_2 як точки перетину прямих AA_1 і BB_1 та AA_2 і BB_2 відповідно.
- Д** Визначити точки C_1 і C_2 як точки перетину кіл ω_1 і ω_2 .
- Е** Визначити середину відрізка AB як точку перетину відрізків C_1C_2 і AB .
- Є** Визначити середину відрізка AB як точку перетину відрізків AC_1 і BC_2 .
- 62.** Як поділити даний кут A навпіл за допомогою циркуля та лінійки?
- А** Провести дві довільні прямі, що перетинають різні сторони кута в точках B і C .
- Б** Провести коло довільного радіуса R з центром у точці A , яке перетинає різні сторони кута в точках B і C .
- В** Через точки B і C провести довільні прямі BB_1 і CC_1 , які перетинаються в точці M .
- Г** Побудувати два кола ω_1 і ω_2 довільного, але того самого радіуса $r < R$ з центрами в точках B і C відповідно.
- Д** Побудувати два кола ω_1 і ω_2 радіуса R з центрами в точках B і C відповідно.
- Е** Визначити точку M як одну з точок перетину кіл ω_1 і ω_2 , відмінну від точки A .
- Є** Промінь AM є шуканим, тобто він ділить кут з вершиною в точці A навпіл.
- Ж** Промінь BC є шуканим, тобто він ділить кут з вершиною в точці A навпіл.

Завдання з короткою відповіддю

Розв'яжіть завдання 63–92 і запишіть відповідь **ОДНИМ ЧИСЛОМ**.

- 63.** З вершини прямого кута KLM , зображеного на рис. 5, проведено два промені LP і LN так, що $\angle KLN = 54^\circ$, а $\angle PLM = 68^\circ$. Знайдіть градусну міру кута PLN .

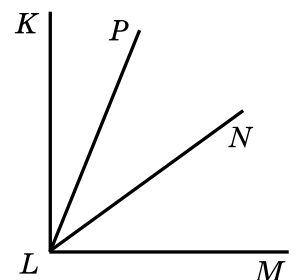


Рис. 5

64. На відрізку $AB = 110$ см (рис. 6) позначили точки C і D так, що $AD = 89$ см, а $BC = 56$ см. Знайдіть довжину відрізка CD .

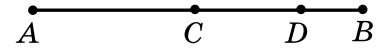


Рис. 6

65. У правильному трикутнику ABC проведено бісектриси AK і BL . Точка O — точка їх перетину. Знайдіть площу трикутника LOK , якщо $AC = 8\sqrt{3}$.
66. Сторона правильного трикутника дорівнює $20\sqrt{3}$. Знайдіть проекцію однієї медіани цього трикутника на іншу.
67. У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) проведено бісектрису BL . Периметр трикутника ABC дорівнює 90, а периметр трикутника ABL дорівнює 60. Знайдіть довжину бісектриси BL .
68. У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) проведено медіану BM . Периметр трикутника ABC дорівнює 36, а периметр трикутника ABM дорівнює 30. Знайдіть довжину медіани BM .
69. Градусна міра кута при вершині B рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$) дорівнює 40° . Знайдіть градусну міру більшого кута між висотами цього трикутника, проведеними з вершин A і B .
70. У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) проведено висоти AK і BM , градусна міра кута між якими дорівнює 100° . Знайдіть градусну міру кута ABC .
71. Центр кола, вписаного в рівнобедрений трикутник, ділить його висоту у відношенні $10:3$, а бічна сторона дорівнює 60. Знайдіть периметр цього трикутника.
72. У рівнобедреному трикутнику висота, проведена до основи, дорівнює 30, а висота, проведена до бічної сторони, дорівнює 48. Знайдіть периметр цього трикутника.
73. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 60 см, а периметр дорівнює 192 см. Обчисліть відстань (у см) між точками перетину медіан і бісектрис цього трикутника.
74. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 144 см, а периметр дорівнює 384 см. Обчисліть відстань (у см) між точками перетину медіан і серединних перпендикулярів цього трикутника.
75. У прямокутному трикутнику градусна міра одного з кутів дорівнює 38° . Знайдіть градусну міру кута між медіаною та висотою, які проведені з вершини прямого кута.

76. У прямокутному трикутнику градусна міра кута між медіаною та висотою, проведеними з вершини прямого кута, дорівнює 16° . Знайдіть градусну міру більшого гострого кута цього трикутника.
77. Знайдіть площу прямокутного трикутника, якщо бісектриса його прямого кута ділить гіпотенузу на відрізки завдовжки 4 і 8.
78. Знайдіть площу прямокутного трикутника, якщо бісектриса його гострого кута ділить катет на відрізки завдовжки 9 і 15.
79. Катет прямокутного трикутника дорівнює 12, а медіана, проведена до іншого катета, дорівнює 13. Знайдіть радіус кола, описаного навколо цього трикутника.
80. Катет прямокутного трикутника дорівнює 24, а медіана, проведена до цього катета, дорівнює $2\sqrt{61}$. Знайдіть радіус кола, вписаного в цей трикутник.
81. З точки M до прямої l проведено дві похилі MA і MB та перпендикуляр MC . Відомо, що $\angle AMB = 90^\circ$. Знайдіть довжину відрізка AB (у см), якщо $MC = 2\sqrt{3}$ см, а проекція похилої MA на пряму l на 1 см більша за проекцію похилої MB на ту саму пряму.
82. З точки S до прямої a проведено перпендикуляр SA і похилу SB . Відомо, що проекція цієї похилої на пряму a на 14 см більша за перпендикуляр і на 2 см менша за саму похилу. Знайдіть площу трикутника ASB (у см^2).
83. Дано прямокутний трикутник ABC , у якому гіпотенуза AB дорівнює 10, а катет BC дорівнює 6. Знайдіть радіус кола з центром на відрізку AC , яке дотикається до гіпотенузи AB і проходить через вершину C .
84. Гіпотенуза AB прямокутного трикутника ABC дорівнює 12, а його катет AC дорівнює 8. Знайдіть радіус кола з центром на гіпотенузі, яке дотикається до катета BC і проходить через вершину A .
85. Сума градусних мір зовнішніх кутів трикутника KLM , взятих по одному при вершинах K і L , дорівнює 330° . Знайдіть градусну міру внутрішнього кута M цього трикутника.
86. У трикутнику ABC $\angle A = 40^\circ$. Знайдіть суму градусних мір зовнішніх кутів цього трикутника, взятих по одному при вершинах B і C .
87. Площа трикутника ABC дорівнює 54 см^2 . Знайдіть висоту, проведenu з вершини C , якщо $AB = 9$ см.
88. Площа трикутника ABC дорівнює 16 см^2 . Знайдіть $\sin \angle B$, якщо $BC = 8$ см, $AB = 10$ см.

89. У трикутнику ABC проведено медіани AK і BM , які перетинаються в точці O (рис. 7). Площа трикутника ABC дорівнює 120. Знайдіть площу чотирикутника $MCKO$.

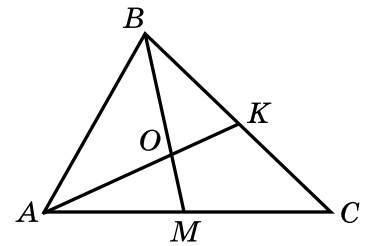


Рис. 7

90. У трикутнику ABC проведено медіану BM (рис. 8), потім у трикутниках ABM і MBC проведено медіани AK і ML відповідно. Знайдіть площу чотирикутника $AKLM$, якщо площа трикутника ABC дорівнює 40.

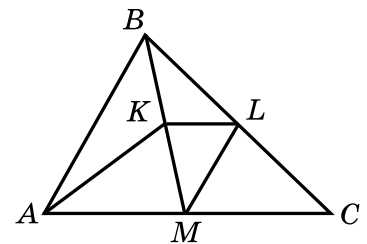


Рис. 8

91. Сторони трикутника дорівнюють 5, 7 і 9. На більшій стороні позначено точку, рівновіддалену від двох інших сторін. Знайдіть довжину більшого з відрізків, на які ця точка ділить більшу сторону.
92. Дано трикутник PRS , в якому $PR=4$, $PS=6$, $RS=8$; PL — бісектриса, проведена з вершини P ; точка I — точка перетину бісектрис трикутника. Знайдіть відношення $\frac{PI}{IL}$.

Завдання з повним розв'язанням

Завдання 93–100 розв'яжіть із повним обґрунтуванням, посилаючись на відповідні означення, твердження, формули. У разі потреби проілюструйте розв'язання таблицями, діаграмами, графіками тощо.

93. На сторонах правильного трикутника ABC зі стороною 3 см позначили точки L , K , M так, що $LB = KC = AM = 1$ см (рис. 9).
- а) Доведіть, що трикутник LKM правильний.
- б) Знайдіть довжину сторони трикутника LKM .

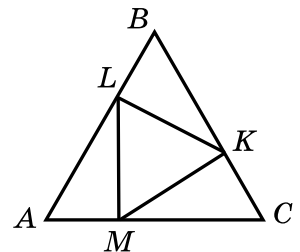


Рис. 9

94. На продовженнях сторін AB , BC , AC правильного трикутника ABC відкладено відрізки AL , BK , CM так, що $AL = BK = CM = AB$ (рис. 10).
 а) Доведіть, що трикутник LKM правильний.
 б) Знайдіть, у скільки разів площа трикутника LKM більша за площу трикутника ABC .

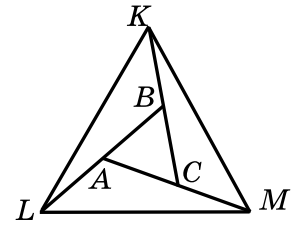


Рис. 10

95. У трикутнику ABC відомі довжини сторін: $AB = 4$, $BC = 6$, $AC = a$.
 а) Яких значень може набувати параметр a ?
 б) При яких значеннях параметра a трикутник ABC буде прямокутним? гострокутним? тупокутним?
96. Дано трикутник ABC , на сторонах AB і AC якого позначені точки D і E відповідно. Відомо, що $EC = AB = 4$, $AD = 1$, $BC = 8$, $AC = 6$. Знайдіть:
 а) косинус кута BAC ;
 б) довжину відрізка DE .
97. Дано трикутник ABC , на сторонах AB і AC якого позначені точки M і N відповідно. Відомо, що $AN = MB = 3$, $AM = 5$, $NC = a$, $\angle ANM = 90^\circ$.
 а) Знайдіть значення параметра a , при якому трикутники ABC і AMN будуть подібними.
 б) Виразіть довжину відрізка BC через параметр a .
98. а) Користуючись рис. 11, знайдіть відношення $AK : KF$.
 б) Користуючись рис. 12, знайдіть відношення $KN : NC$.

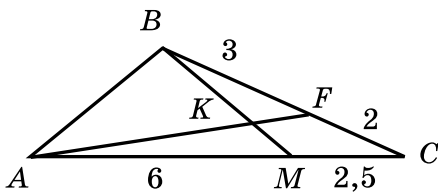


Рис. 11

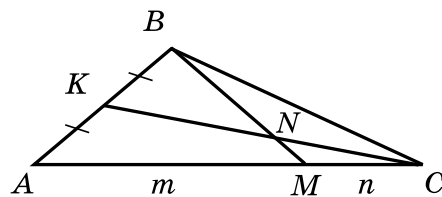


Рис. 12

99. У трикутнику KLM точка F — точка перетину бісектриси, проведеної з вершини M , зі стороною KL , причому $\frac{1}{KM} + \frac{1}{LM} = \frac{1}{FM}$. Доведіть, що $\angle KML = 120^\circ$.
100. У трикутнику PRS проведено медіани PK і SM , причому $\angle SMP = \angle PKS$. Доведіть, що трикутник PRS рівнобедрений.

7.2. Чотирикутники і многокутники

Найпростіші завдання з повним розв'язанням

Завдання 1–20 розв'яжіть УСНО.

1. Площа квадрата дорівнює 25 см^2 . Знайдіть периметр цього квадрата і радіус кола, вписаного в цей квадрат.
2. Діагональ квадрата дорівнює $4\sqrt{2}$ см. Знайдіть площу цього квадрата і радіус кола, описаного навколо нього.
3. Діагоналі квадрата $ABCD$ перетинаються в точці O , причому $AO = 6$ см. Знайдіть довжину відрізка BD .
4. Площа прямокутника дорівнює 80 см^2 , а одна з його сторін дорівнює 10 см. Знайдіть довжини решти сторін цього прямокутника.
5. Діагоналі прямокутника дорівнюють 20 см, а градусна міра кута між ними дорівнює 30° . Знайдіть площу цього прямокутника.
6. Відстані від точки перетину діагоналей прямокутника до двох його сторін дорівнюють 1 см і 3 см. Знайдіть площу цього прямокутника.
7. Знайдіть площу і сторону ромба, діагоналі якого дорівнюють 6 см і 8 см.
8. Сторона ромба дорівнює 10 см, а градусна міра його гострого кута дорівнює 30° . Знайдіть площу цього ромба.
9. Одна зі сторін паралелограма дорівнює 8 см, а його периметр дорівнює 30 см. Знайдіть довжини решти сторін цього паралелограма.
10. Градусна міра одного з кутів паралелограма дорівнює 50° . Знайдіть градусні міри решти кутів цього паралелограма.
11. Знайдіть площу паралелограма, сторони якого дорівнюють 4 см і 6 см, а градусна міра кута між ними дорівнює 30° .
12. Основи трапеції дорівнюють 5 см і 7 см. Знайдіть середню лінію цієї трапеції.
13. Середня лінія трапеції дорівнює 8 см, а її висота дорівнює 4 см. Знайдіть площу цієї трапеції.
14. Косинус кожного кута деякого чотирикутника дорівнює нулю. Укажіть вид цього чотирикутника.
15. Протилежні сторони деякого чотирикутника мають однакову довжину і паралельні між собою. Укажіть вид цього чотирикутника.

16. Діагоналі деякого паралелограма є бісектрисами його внутрішніх кутів. Укажіть вид цього паралелограма.
17. Дано опуклий чотирикутник $ABCD$, причому $AB=3$ см, $BC=5$ см, $CD=6$ см. Якою має бути довжина сторони AD , щоб у цей чотирикутник можна було вписати коло?
18. Дано опуклий чотирикутник $ABCD$, причому $\angle A=50^\circ$, $\angle B=110^\circ$. Якими повинні бути градусні міри кутів C і D , щоб навколо цього чотирикутника можна було описати коло?
19. Для опуклого 8-кутника знайдіть кількість діагоналей, суму внутрішніх кутів і суму зовнішніх кутів, взятих по одному при кожній вершині.
20. Знайдіть внутрішній кут правильного 6-кутника; 10-кутника; 12-кутника; 36-кутника.

Завдання з вибором однієї правильної відповіді

Проаналізуйте умови та вимоги завдань 21–50 та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

21. Квадрат розрізали по прямій на дві геометричні фігури. Яку з наведених геометричних фігур НЕ МОЖНА було отримати при такому розрізанні?

А	Б	В	Г	Д
П'ятикутник	Прямокутний трикутник	Квадрат	Паралелограм	Рівнобедрений трикутник

22. Ромб розрізали по прямій на дві геометричні фігури. Яку з наведених геометричних фігур НЕ МОЖНА було отримати при такому розрізанні?

А	Б	В	Г	Д
Ромб	Прямокутний трикутник	П'ятикутник	Рівнобедрений трикутник	Паралелограм

23. Сторона ромба є цілим числом. Укажіть число, яке МОЖЕ бути значенням периметра цього ромба.

А	Б	В	Г	Д
10	27	28	49	55

24. Сторона квадрата є цілим числом. Укажіть число, яке МОЖЕ бути значенням площі цього квадрата.

А	Б	В	Г	Д
8	25	40	75	120

25. Укажіть правильне твердження.

А	Сума всіх кутів будь-якого паралелограма дорівнює 180°
Б	Діагоналі будь-якого прямокутника перпендикулярні
В	Протилежні сторони будь-якої трапеції рівні між собою
Г	Діагоналі будь-якого ромба перпендикулярні
Д	Суміжні кути будь-якого паралелограма рівні між собою

26. Укажіть НЕПРАВИЛЬНЕ твердження.

А	Протилежні сторони будь-якого паралелограма рівні між собою
Б	Діагоналі будь-якого прямокутника рівні між собою
В	Діагоналі будь-якого прямокутника є бісектрисами його внутрішніх кутів
Г	Діагоналі будь-якого квадрата перпендикулярні.
Д	Сума кутів при бічній стороні будь-якої трапеції дорівнює 180°


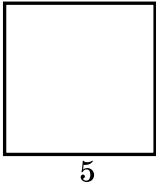
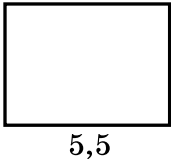
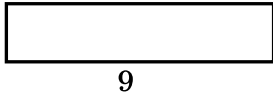

27. У прямокутнику $ABCD$ $AB = 15$, $\angle CAB > 45^\circ$. Яке з наведених чисел **МОЖЕ** бути довжиною сторони BC цього прямокутника?

А	Б	В	Г	Д
5	16	12	10	15


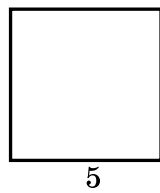
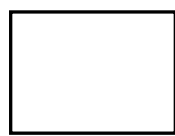
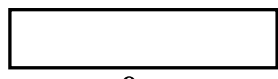
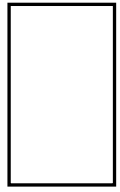
28. У прямокутнику $KLMP$ $KL = 12$, $\angle MKL < 45^\circ$. Яке з наведених чисел **МОЖЕ** бути довжиною сторони LM цього прямокутника?

А	Б	В	Г	Д
11	12	15	20	24

29. Який із наведених прямокутників має **НАЙБІЛЬШУ ПЛОЩУ**?

А	Б	В	Г	Д
				

30. Який із наведених прямокутників має **НАЙБІЛЬШИЙ ПЕРИМЕТР**?

А	Б	В	Г	Д
				

31. На рис. 13 зображено прямокутник $ABCD$, периметр якого дорівнює 40. Знайдіть довжину ламаної $A E F G C D A$, якщо $EF \parallel AD$, а $FG \parallel CD$.

А	Б	В	Г	Д
10	20	30	40	60

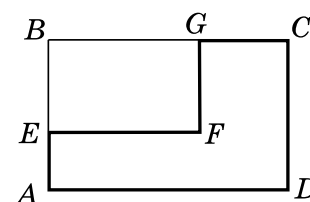


Рис. 13

32. На рис. 14 зображено прямокутник $ABCD$, причому $AD=12$, $CD=8$. Знайдіть довжину ламаної $A K L M S P T D$.

А	Б	В	Г	Д
12	18	20	24	28

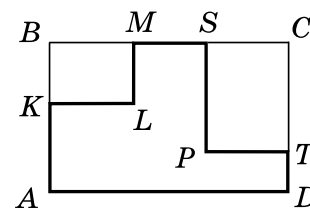


Рис. 14

33. Діагональ ромба утворює з однією з його сторін кут $\alpha = 12^\circ$. Знайдіть градусну міру більшого кута цього ромба.

А	Б	В	Г	Д
12°	24°	108°	156°	168°

34. Сторона ромба дорівнює $\sqrt{2}$ см, а його площа дорівнює 1 см^2 . Знайдіть градусну міру меншого кута цього ромба.

А	Б	В	Г	Д
15°	30°	45°	60°	75°

35. На рис. 15 зображено квадрат $ABCD$. На діагоналі AC позначено точку N , причому $OB:CN = 3:1$. Знайдіть $\text{tg} \angle NBO$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	3

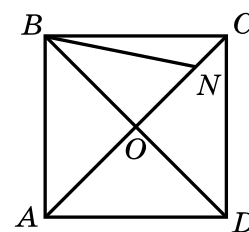


Рис. 15

36. На рис. 16 зображено квадрат $KLMP$. На діагоналі KM позначено точку N , причому $\operatorname{ctg} \angle NLO = \frac{5}{3}$. Знайдіть відношення $\frac{ON}{NM}$.

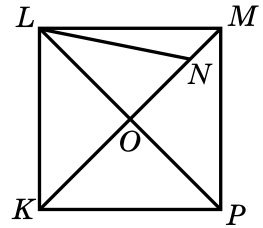


Рис. 16

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{2}$

37. Периметр паралелограма $ABCD$ дорівнює P , а довжина сторони AB дорівнює x . Укажіть формулу, за якою обчислюється довжина y сторони BC цього паралелограма.

А	Б	В	Г	Д
$y = P - x$	$y = P - 2x$	$y = \frac{P - x}{2}$	$y = P - \frac{x}{2}$	$y = \frac{P}{2} - x$

38. У паралелограмі $KLMP$ $\angle K = \alpha$, а $\angle P = \beta$. Укажіть формулу, яка виражає залежність між градусними мірами цих кутів.

А	Б	В	Г	Д
$\beta = \alpha$	$\beta = 180^\circ - \alpha$	$\beta = 360^\circ - \alpha$	$\beta = 90^\circ + \alpha$	$\beta = 360^\circ - 2\alpha$

39. Кути рівнобічної трапеції, прилеглі до її більшої основи, дорівнюють α і β . Укажіть рівності, які МОЖУТЬ бути правильними.

А	Б	В	Г	Д
$\alpha = 30^\circ$, $\beta = 150^\circ$	$\alpha = 100^\circ$, $\beta = 100^\circ$	$\alpha = 90^\circ$, $\beta = 90^\circ$	$\alpha = 80^\circ$, $\beta = 80^\circ$	$\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$

40. Кути рівнобічної трапеції, прилеглі до її меншої основи, дорівнюють α і β . Укажіть рівності, які МОЖУТЬ бути правильними.

А	Б	В	Г	Д
$\alpha = 210^\circ$, $\beta = 210^\circ$	$\alpha = 120^\circ$, $\beta = 60^\circ$	$\alpha = 90^\circ$, $\beta = 90^\circ$	$\alpha = 80^\circ$, $\beta = 80^\circ$	$\alpha = 150^\circ$, $\beta = 150^\circ$

41. У прямокутній трапеції $ABCD$ $\angle A = \angle B = 90^\circ$, довжина сторони AB дорівнює x , а довжина середньої лінії дорівнює m . Укажіть формулу, якою виражається залежність площі S цієї трапеції від x та m , якщо це можливо.

А	Б	В	Г	Д
$S = xm$	$S = \frac{1}{2}xm$	$S = \frac{1}{2}(x + m)$	$S = 2xm$	Для розв'язання задачі не вистачає даних

42. Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює x , а периметр цієї трапеції дорівнює P . Укажіть формулу, за якою обчислюється довжина m середньої лінії цієї трапеції.

А	Б	В	Г	Д
$m = \frac{P-x}{2}$	$m = P - 2x$	$m = \frac{P}{2} - x$	$m = P - x$	$m = P - \frac{x}{2}$

43. У трапецію $ABCD$, бічні сторони якої $AB = 4$ км, $CD = 7$ км, а висота $h = 2$ км, можна вписати коло. Знайдіть площу цієї трапеції, якщо це можливо.

А	Б	В	Г	Д
22 км ²	11 км ²	28 км ²	56 км ²	Для розв'язання задачі не вистачає даних

44. У трапецію $KLMP$ можна вписати коло. Знайдіть висоту цієї трапеції, якщо її бічні сторони $KL = 4$ м, $MP = 5$ м, а площа $S = 4,5$ м².

А	Б	В	Г	Д
1 м	1,5 м	2 м	2,5 м	3 м

45. Знайдіть площу зображеного на рис. 17 п'ятикутника $ABCDE$, якщо площа однієї клітинки дорівнює 1.

А	Б	В	Г	Д
7,5	8	8,5	9	9,5

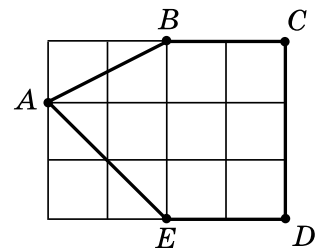


Рис. 17

46. Знайдіть площу зображеного на рис. 18 п'ятикутника $ABCDE$, якщо площа однієї клітинки дорівнює 1.

А	Б	В	Г	Д
7,5	8	8,5	9	9,5

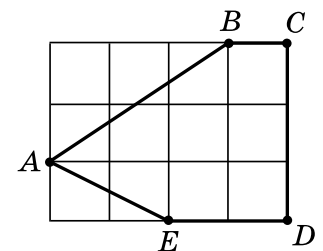


Рис. 18

47. Периметр правильного многокутника дорівнює 30 см. Знайдіть довжину сторони цього многокутника, якщо сума всіх його внутрішніх кутів дорівнює 540° .

А	Б	В	Г	Д
5 см	7,5 см	10 см	3,75 см	6 см

48. Сторона правильного багатокутника дорівнює 10 см. Знайдіть периметр цього багатокутника, якщо сума його внутрішніх кутів дорівнює 720° .

А	Б	В	Г	Д
60 см	120 см	90 см	50 см	100 см

49. У правильному n -кутнику зовнішній кут у чотири рази менший за відповідний йому внутрішній кут. Тоді цей n -кутник є...

А	Б	В	Г	Д
12-кутником	10-кутником	9-кутником	8-кутником	6-кутником

50. У n -кутнику кількість діагоналей у 2,5 раза більша за кількість його сторін. Тоді цей n -кутник є...

А	Б	В	Г	Д
12-кутником	10-кутником	9-кутником	8-кутником	6-кутником

У завданнях 51–54 сформульовано проблему (питання), яку потрібно розв'язати (отримати однозначну відповідь на питання), використовуючи для цього додаткові дані — твердження (1) і (2). Визначте, чи достатньо цих даних для розв'язання проблеми, і оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь*.

51. Одна сторона паралелограма на 8 см більша за іншу сторону. Знайдіть довжину більшої сторони цього паралелограма.
(1) Периметр цього паралелограма дорівнює 48 см.

(2) Відношення двох сторін цього паралелограма дорівнює $\frac{1}{2}$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

* Саму проблему розв'язувати не обов'язково.

52. Знайдіть довжину сторони ромба.
 (1) Площа цього ромба дорівнює 64 см^2 .
 (2) Периметр цього ромба дорівнює 32 см .

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

53. Знайдіть кількість сторін правильного опуклого n -кутника.
 (1) Сума всіх внутрішніх кутів цього n -кутника дорівнює 3600° .
 (2) Сума всіх зовнішніх кутів цього n -кутника, взятих по одному при кожній вершині, дорівнює 360° .

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

54. Знайдіть радіус R кола, описаного навколо правильного 10-кутника.
 (1) Радіус r кола, вписаного в цей 10-кутник.
 (2) Сторона a цього 10-кутника.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

У завданнях 55–56 порівняйте величини X і Y та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

55. Дано прямокутник $ABCD$ і трикутник APD (рис. 19), причому $AL = LP$.
 Величина X : площа прямокутника $ABCD$.
 Величина Y : площа трикутника APD .

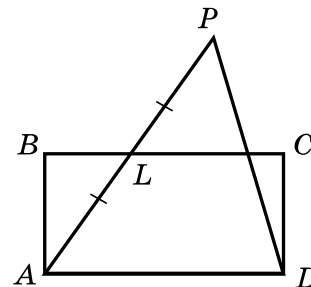


Рис. 19

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

56. Задано два ромби $ABCD$ і $KLMN$, периметри яких рівні між собою.
Величина X : площа ромба $ABCD$.
Величина Y : площа ромба $KLMN$.

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

Завдання на встановлення відповідності

У завданнях 57–60 до кожного рядка або рисунка, позначеного цифрою, доберіть один відповідник, позначений літерою.

57. Установіть відповідність між номерами множин геометричних фігур (1–4), співвідношення між якими показано діаграмою на рис. 20, і цими множинами (А–Д).

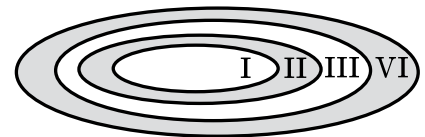
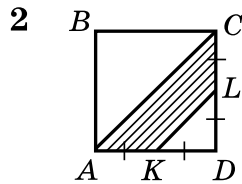
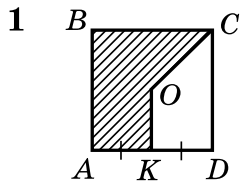


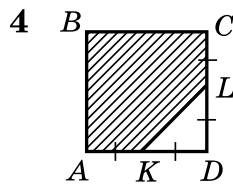
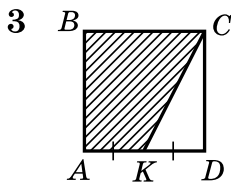
Рис. 20

- | | |
|-------|---|
| 1 I | А Множина всіх опуклих чотирикутників |
| 2 II | Б Множина всіх неопуклих чотирикутників |
| 3 III | В Множина всіх паралелограмів |
| 4 IV | Г Множина всіх ромбів |
| | Д Множина всіх квадратів |
58. Установіть відповідність між множинами чотирикутників (1–4) і властивостями, які мають УСІ чотирикутники з цих множин (А–Д)
- | | |
|-------------------------------------|---|
| 1 Множина всіх ромбів | А Усі сторони і всі кути рівні між собою |
| 2 Множина всіх прямокутників | Б Діагоналі рівні між собою і в точці перетину діляться навпіл |
| 3 Множина всіх рівнобічних трапецій | В Діагоналі є бісектрисами внутрішніх кутів |
| 4 Множина всіх паралелограмів | Г Завжди можна описати коло, центр якого не збігається з точкою перетину діагоналей |
| | Д Протилежні гострі кути рівні між собою, а діагоналі не завжди є перпендикулярними |

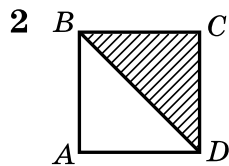
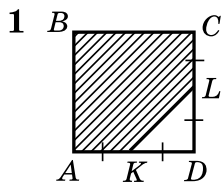
59. Установіть відповідність між заштрихованими многокутниками на рисунках (1–4) і числами (А–Д), що дорівнюють площам цих многокутників, якщо сторони квадратів $ABCD$ дорівнюють 4, а точка O — точка перетину діагоналей квадрата $ABCD$.



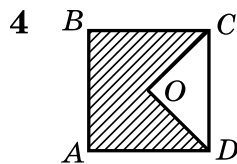
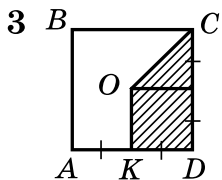
- А 6
- Б 8
- В 10
- Г 12
- Д 14



60. Установіть відповідність між заштрихованими многокутниками на рисунках (1–4) і числами (А–Д), що дорівнюють периметрам цих многокутників, якщо сторони квадратів $ABCD$ дорівнюють 2, а точки O — точки перетину діагоналей квадратів $ABCD$.



- А $4 + \sqrt{2}$
- Б $4 + 2\sqrt{2}$
- В 6
- Г $6 + \sqrt{2}$
- Д $6 + 2\sqrt{2}$



Завдання на встановлення послідовності

У завданнях 61–62 виберіть тільки необхідні для розв'язання поставленої задачі дії і розмістіть їх у правильній послідовності. У відповідь запишіть отриману послідовність літер.

61. Як перевірити, чи можна описати коло навколо даного опуклого чотирикутника $ABCD$?
- А Знайти суму σ всіх внутрішніх кутів цього чотирикутника.
 - Б Знайти суму σ всіх зовнішніх кутів цього чотирикутника, взятих по одному при кожній вершині.
 - В Знайти $\alpha = \angle A + \angle B$ і $\beta = \angle C + \angle D$.
 - Г Знайти $\alpha = \angle A + \angle C$ і $\beta = \angle B + \angle D$.
 - Д Якщо $\sigma = 360^\circ$, то навколо чотирикутника $ABCD$ можна описати коло, у протилежному випадку коло описати не можна.
 - Е Якщо $\alpha = \beta$, то навколо чотирикутника $ABCD$ можна описати коло, у протилежному випадку коло описати не можна.
 - Є Якщо $\alpha - \beta = 180^\circ$, то навколо чотирикутника $ABCD$ можна описати коло, у протилежному випадку коло описати не можна.
62. Як перевірити, чи можна вписати коло в даний опуклий чотирикутник $ABCD$?
- А Знайти $\alpha = \angle A + \angle C$ і $\beta = \angle B + \angle D$.
 - Б Знайти $a = AB + BC$ і $b = CD + AD$.
 - В Знайти $a = AB + CD$ і $b = BC + AD$.
 - Г Якщо $\alpha + \beta = 180^\circ$, то в чотирикутник $ABCD$ можна вписати коло, у протилежному випадку коло вписати не можна.
 - Д Якщо $\alpha = \beta$, то в чотирикутник $ABCD$ можна вписати коло, у протилежному випадку коло вписати не можна.
 - Е Якщо $a = b$, то в чотирикутник $ABCD$ можна вписати коло, у протилежному випадку коло вписати не можна.
 - Є Якщо $a = 2b$, то в чотирикутник $ABCD$ можна вписати коло, у протилежному випадку коло вписати не можна.

Завдання з короткою відповіддю

Розв'яжіть завдання 63–92 і запишіть відповідь **ОДНИМ ЧИСЛОМ**.

63. Сторони прямокутника дорівнюють 9 і 16. Знайдіть периметр квадрата, площа якого дорівнює площі цього прямокутника.
64. Діагональ квадрата $ABCD$ дорівнює стороні квадрата $KLMP$. Знайдіть площу квадрата $ABCD$, якщо периметр квадрата $KLMP$ дорівнює 20.

65. Сторони прямокутника відносяться як $5:12$, а площа круга, описаного навколо цього прямокутника, дорівнює 676π . Знайдіть периметр прямокутника.
66. Периметр ромба дорівнює 80 , а діагоналі відносяться, як $3:4$. Знайдіть радіус кола, вписаного в цей ромб.
67. У трикутник ABC вписано ромб $LMCK$ (рис. 21). Знайдіть довжину сторони AC трикутника, якщо довжина його сторони BC дорівнює 7 , а сторона ромба дорівнює 5 .

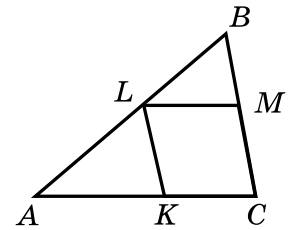


Рис. 21

68. У трикутник ABC вписано ромб $LMCK$ (рис. 21). Знайдіть периметр ромба, якщо $AK = 10$, а $BM = 2$.
69. Бісектриса кута A прямокутника $ABCD$ перетинає сторону BC в точці K , а діагональ BD — у точці P . Відомо, що $BK:KC = 7:1$. Знайдіть відношення $BP:PD$.
70. Бісектриса кута K прямокутника $KLMP$ перетинає сторону LM у точці A . Знайдіть площу цього прямокутника, якщо $AM = 30$, а $KL:LM = 3:8$.
71. На рис. 22 зображено прямокутник $ABCD$, $\angle BOC = 132^\circ$. Знайдіть градусну міру кута ODC .

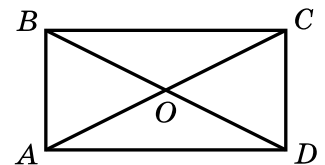


Рис. 22

72. За рис. 22 знайдіть градусну міру кута BOA , якщо $\angle OAD = 28^\circ$.
73. У паралелограмі діагональ, перпендикулярна до однієї зі сторін, дорівнює $10\sqrt{3}$, а площа паралелограма дорівнює $100\sqrt{3}$. Знайдіть градусну міру гострого кута цього паралелограма.
74. Одна з діагоналей паралелограма дорівнює $6\sqrt{6}$ і утворює з його стороною кут 60° . Знайдіть іншу діагональ, якщо вона утворює з тією самою стороною кут 45° .
75. Точка N належить стороні AB паралелограма $ABCD$. Відрізок DN перетинає його діагональ AC в точці K , а $AN:NB = 1:7$. Знайдіть відношення $AK:KC$.

76. Точка O належить діагоналі AC паралелограма $ABCD$. Пряма DO перетинає його сторону AB в точці N , а $AO:OC = 2:5$. Знайдіть відношення $BN:NA$.
77. Діагоналі рівнобічної трапеції ділять її середню лінію на три рівні частини і є взаємно перпендикулярними. Знайдіть площу трапеції, якщо її більша основа дорівнює 12.
78. У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою гострого кута й утворює з більшою основою кут 30° . Знайдіть більшу основу цієї трапеції, якщо її периметр дорівнює 50.
79. У прямокутній трапеції $ABCD$ (рис. 23) $CD = 3\sqrt{2}$, $BC = 4$. Знайдіть площу цієї трапеції, якщо $\angle D = 45^\circ$.

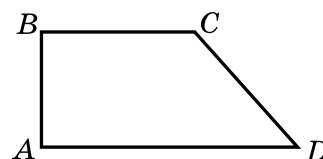


Рис. 23

80. Знайдіть площу рівнобічної трапеції, ескіз якої зображено на рис. 24.

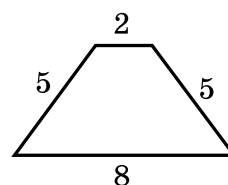


Рис. 24

81. Бісектриси тупих кутів при основі рівнобічної трапеції ділять її більшу основу на три рівні частини і не перетинаються. Знайдіть відношення середньої лінії цієї трапеції до її меншої основи, якщо градусні міри кутів при основі дорівнюють 120° .
82. У прямокутній трапеції діагональ, проведена з вершини тупого кута, дорівнює бічній стороні. Знайдіть відношення середньої лінії цієї трапеції до її більшої основи.
83. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 6 і 10, а її діагоналі є бісектрисами її гострих кутів. Знайдіть периметр цієї трапеції.
84. Діагональ рівнобічної трапеції ділить її на два рівнобедрені трикутники. Знайдіть градусну міру кутів при меншій основі цієї трапеції.
85. Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці K , причому $AB:BK = 2:5$. AD — більша основа трапеції. Знайдіть довжину основи BC , якщо різниця основ трапеції дорівнює 10.
86. Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці L , причому $LC:CD = 3:1$. BC — менша основа трапеції. Знайдіть довжину основи AD , якщо середня лінія трапеції дорівнює 21.

87. Кількість сторін опуклого многокутника втричі менша за кількість його діагоналей. Знайдіть суму градусних мір внутрішніх кутів цього многокутника.
88. Сума градусних мір зовнішніх кутів правильного многокутника, взятих по одному при кожній вершині, на 900° менша за суму його внутрішніх кутів. Знайдіть кількість діагоналей цього многокутника.
89. У чотирикутнику $ABCD$, який можна вписати в коло, кут A вдвічі більший за кут C , а кут B втричі менший за кут C . Знайдіть градусну міру кута D .
90. В опуклому п'ятикутнику два внутрішні кути прямі, а градусні міри інших відносяться як $2:3:4$. Знайдіть градусну міру найбільшого кута цього п'ятикутника.
91. У правильному шестикутнику зі стороною $2\sqrt{3}$ сполучено вершини через одну так, щоб утворився правильний трикутник. Знайдіть площу цього трикутника.
92. У коло вписано правильний 6-кутник, а в нього вписано ще одне коло. Площа кільця, утвореного цими двома колами, дорівнює 64π . Знайдіть довжину сторони 6-кутника.

Завдання з повним розв'язанням

Завдання 93–100 розв'яжіть із повним обґрунтуванням, посилаючись на відповідні означення, твердження, формули. У разі потреби проілюструйте розв'язання таблицями, діаграмами, графіками тощо.

93. Точка O є точкою перетину діагоналей квадрата $ABCD$. Через середину відрізка AO проведено пряму, паралельну діагоналі BD . Знайдіть відношення площ двох фігур, на які ділить квадрат ця пряма.
94. Пряма, паралельна діагоналі квадрата, ділить його на дві фігури, площі яких відносяться як $1:2$. У якому відношенні ділить ця пряма іншу діагональ квадрата?
95. Доведіть, що з усіх паралелограмів зі сторонами a і b найбільшу площу має прямокутник.
96. Доведіть, що з усіх ромбів із даною площею найменший периметр має квадрат.
97. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ точка O — точка перетину діагоналей. Доведіть, що для площ трикутників AOB , BOC , COD і DOA має місце така рівність: $S_{AOB} \cdot S_{COD} = S_{BOC} \cdot S_{AOD}$.

98. У трапеції $ABCD$ з основами AD і BC точка O є точкою перетину діагоналей, а площі трикутників AOD і BOC дорівнюють S_1 та S_2 відповідно. Доведіть, що площа S трапеції $ABCD$ обчислюється за формулою $S = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2$.
99. Сторона правильного n -кутника дорівнює a . Знайдіть площу цього n -кутника.
100. Площа правильного n -кутника дорівнює S , площа вписаного в нього круга дорівнює S_1 , а площа описаного навколо нього круга дорівнює S_2 . Знайдіть залежність між S і S_1 та між S і S_2 .

7.3. Коло, круг та їх елементи

Найпростіші завдання з повним розв'язанням

Завдання 1–20 розв'яжіть УСНО.

1. Якою геометричною фігурою є множина всіх точок площини, віддалених від даної точки на відстань 5 см?
2. Якою геометричною фігурою є множина всіх точок площини, віддалених від даної точки на відстань, не більшу за 5 см?
3. Знайдіть довжину кола, діаметр якого дорівнює 40 см, і площу круга, обмеженого цим колом.
4. Знайдіть діаметр кола, довжина якого дорівнює 100π .
5. Знайдіть діаметр круга, площа якого дорівнює 36π .
6. Знайдіть площу кільця, обмеженого концентричними колами, радіуси яких дорівнюють 2 см і 5 см.
7. Радіус кола дорівнює 100. Знайдіть довжину дуги цього кола, що відповідає центральному куту 180° ; 90° ; 270° .
8. Радіус круга дорівнює 10. Знайдіть площу сектора цього круга, що відповідає центральному куту 180° ; 90° ; 270° ; 120° ; 60° .
9. Знайдіть радіус кола, вписаного в квадрат зі стороною 8 см.
10. Знайдіть радіус кола, описаного навколо квадрата зі стороною 8 см.
11. Знайдіть радіус кола, описаного навколо шестикутника, довжина сторони якого дорівнює 10 см. Знайдіть також радіус кола, вписаного в цей шестикутник.

12. Точка O — центр кола радіуса R , а відрізок AB — хорда цього кола. Визначте вид трикутника AOB , якщо $AB = R$.
13. За умовою попередньої задачі визначте відстань від точки O до хорди AB , якщо $R = 4$.
14. На рис. 25 зображено коло, діаметром якого є відрізок AB . Точка C належить колу. Знайдіть градусну міру кутів ACB і CAB , якщо $\angle ABC = 70^\circ$.

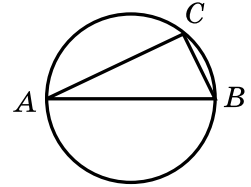


Рис. 25

15. Точка O — центр кола, зображеного на рис. 26, точки A , B і C лежать на цьому колі. Знайдіть градусну міру кута AOC , якщо $\angle ABC = 40^\circ$.
16. За рис. 26 знайдіть градусну міру кута ABC , якщо $\angle AOC = 72^\circ$.

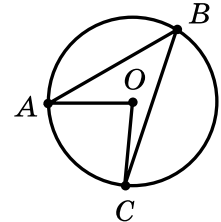


Рис. 26

17. Відстань від точки A до центра кола діаметра 30 см дорівнює 10 см. Знайдіть відстань від точки A до цього кола. Установіть, чи належить точка A колу, обмеженому цим колом.
18. Точка O є центром кола, діаметр якого дорівнює 10. Відстань від точки O до прямої m дорівнює 6. Установіть взаємне розміщення цього кола і цієї прямої.
19. Дано два кола, радіуси яких дорівнюють 5 см і 7 см. Знайдіть відстань між центрами цих кіл у випадку зовнішнього дотику.
20. Дано два кола, радіуси яких дорівнюють 5 см і 7 см. Знайдіть відстань між центрами цих кіл у випадку внутрішнього дотику.

Завдання з вибором однієї правильної відповіді

Проаналізуйте умови та вимоги завдань 21–50 та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

21. Укажіть правильне твердження.

А	Через будь-які три точки можна провести коло
Б	Навколо будь-якого ромба можна описати коло
В	У будь-який ромб можна вписати коло
Г	У будь-який прямокутник можна вписати коло
Д	Навколо будь-якого чотирикутника можна описати коло

22. Укажіть НЕПРАВИЛЬНЕ твердження.

А	У будь-який ромб можна вписати коло
Б	Навколо будь-якого прямокутника можна описати коло
В	Навколо будь-якого трикутника можна описати коло
Г	Навколо будь-якого паралелограма можна описати коло
Д	У будь-який трикутник можна вписати коло

23. Скільки осей симетрії має круг?

А	Б	В	Г	Д
Жодної	Одну	Дві	Більше двох, але не безліч	Безліч

24. Яка з наведених геометричних фігур НЕ МАЄ центра симетрії?

А	Б	В	Г	Д
Правильний чотирикутник	Відрізок	Коло	Ромб	Правильний трикутник

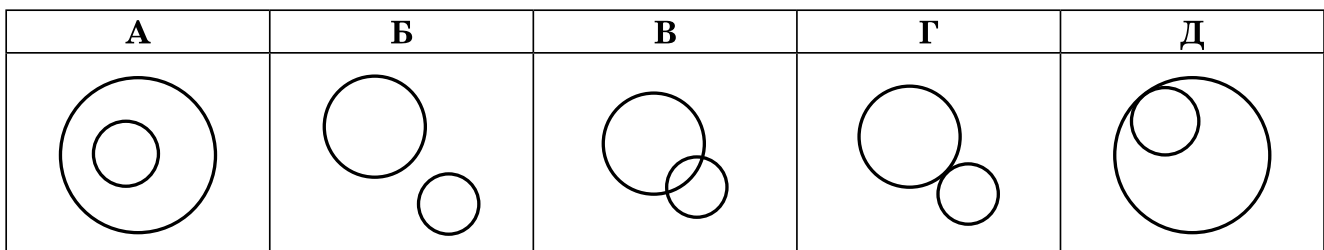
25. Яке з наведених чисел МОЖЕ бути значенням периметра многокутника, описаного навколо кола, радіус якого дорівнює 10?

А	Б	В	Г	Д
65	60	55	50	45

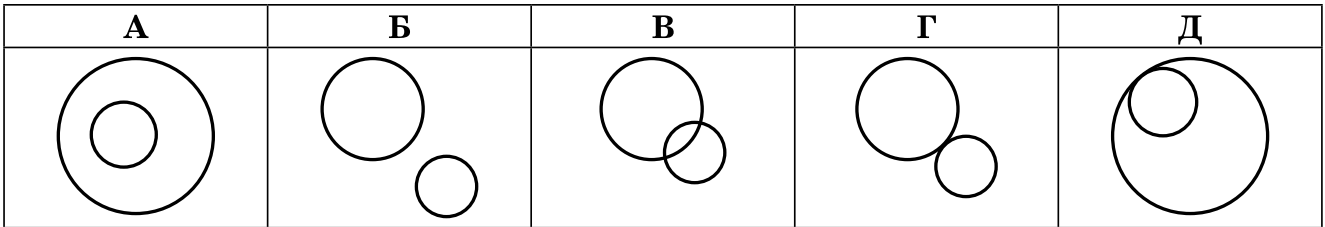
26. Яке з наведених чисел МОЖЕ бути значенням площі многокутника, вписаного в коло, радіус якого дорівнює 2?

А	Б	В	Г	Д
20	18	16	14	12

27. Відстань між центрами двох кіл дорівнює 10 см, а радіуси цих кіл дорівнюють 5 см і 7 см. Укажіть рисунок, на якому зображено взаємне розміщення цих кіл.



28. Відстань між центрами двох кіл дорівнює 1 см, а радіуси цих кіл дорівнюють 3 см і 5 см. Укажіть рисунок, на якому зображено взаємне розміщення цих кіл.



29. Площа круга дорівнює 49π . Знайдіть довжину кола, яке обмежує цей круг.

А	Б	В	Г	Д
$3,5\pi$	14π	$10,5\pi$	7π	28π

30. Довжина кола дорівнює 16π . Знайдіть площу круга, обмеженого цим колом.

А	Б	В	Г	Д
256π	36π	128π	16π	64π

31. Кінці хорди кола ділять його на дві дуги, градусні міри яких відносяться як 1:8. Знайдіть градусну міру більшої з цих дуг.

А	Б	В	Г	Д
280°	320°	80°	160°	340°

32. Кінці хорди кола ділять його на дві дуги, причому градусна міра однієї з них дорівнює 60° . Знайдіть відношення довжин цих дуг.

А	Б	В	Г	Д
1:2	1:3	1:4	1:5	1:6

33. На рис. 27 зображено коло і два його діаметри AB і CD . Знайдіть градусну міру кута CAB , якщо градусна міра дуги $DACB$ дорівнює 340° .

А	Б	В	Г	Д
85°	170°	20°	160°	80°

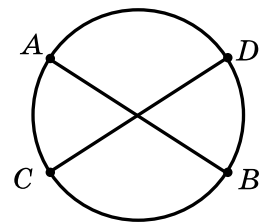


Рис. 27

34. За рис. 27 знайдіть градусну міру дуги $ADBC$, якщо $\angle DCB = 40^\circ$.

А	Б	В	Г	Д
320°	140°	280°	200°	340°

35. Знайдіть відношення довжини діаметра AB до довжини хорди AC (рис. 28), якщо косинус кута BAC дорівнює $0,6$.

А	Б	В	Г	Д
2:1	5:1	3:2	5:3	5:2

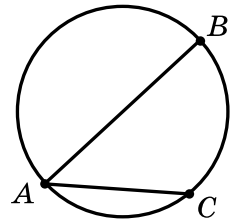


Рис. 28

36. Знайдіть площу трикутника ABC (див. рис. 28), якщо $\cos \angle BAC = 0,4$ і $AB = 10$.

А	Б	В	Г	Д
$4\sqrt{21}$	20	$6\sqrt{7}$	32	$12\sqrt{3}$

37. На рис. 29 зображено коло з центром у точці O і правильний трикутник OAB , сторони OA і OB якого перетинають це коло у точках C і D відповідно. Точка L належить даному колу. Знайдіть градусну міру кута CLD .

А	Б	В	Г	Д
60°	120°	140°	150°	300°

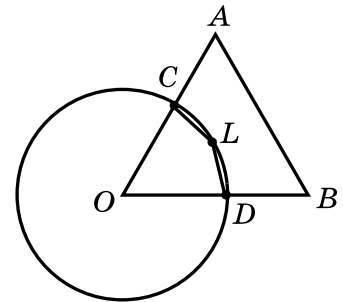


Рис. 29

38. На рис. 30 зображено квадрат $ABCD$ і коло, яке проходить через його вершину C і перетинає сторони BC і CD квадрата у точках L і M відповідно. Виразіть довжину хорди LM через радіус кола R , якщо це можливо.

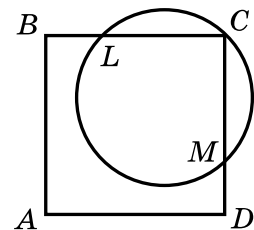


Рис. 30

А	Б	В	Г	Д
Виразити неможливо	$LM = R$	$LM = 2R$	$LM = R\sqrt{2}$	$LM = R\sqrt{3}$

39. Дано коло з центром у точці O . Точки A і B належать цьому колу, а точка N розташована так, що прямі NA та NB є дотичними до нього. Знайдіть градусну міру кута ANB , якщо $\angle ABO = 10^\circ$.

А	Б	В	Г	Д
10°	20°	30°	80°	100°

40. Дано коло з центром у точці O . Точки A і B належать цьому колу, а точка M розташована так, що прямі MA та MB є дотичними до нього. Знайдіть градусну міру кута OBA , якщо $\angle OMA = 20^\circ$.

А	Б	В	Г	Д
10°	20°	30°	70°	90°

41. Через точку P до кола з центром у точці O проведено дотичну PM , точка M — точка дотику. Знайдіть PM , якщо $\angle POM = \alpha$, а $PO = a$.

А	Б	В	Г	Д
$PM = atg\alpha$	$PM = asin\alpha$	$PM = \frac{a}{sin\alpha}$	$PM = a\cos\alpha$	$PM = \frac{a}{\cos\alpha}$

42. Через точку P до кола з центром у точці O проведено дотичну PM , точка M — точка дотику. Відомо, що $\angle OPM = \beta$, а радіус кола дорівнює R . Виразіть довжину відрізка OP через R і β .

А	Б	В	Г	Д
$OP = R\sin\beta$	$OP = \frac{R}{\cos\beta}$	$OP = \frac{R}{tg\beta}$	$OP = R\cos\beta$	$OP = \frac{R}{\sin\beta}$

43. У колі, радіус якого дорівнює 3 см, проведено хорду завдовжки 2 см. Знайдіть відстань від центра цього кола до цієї хорди.

А	Б	В	Г	Д
1 см	2 см	$\sqrt{2}$ см	$\sqrt{5}$ см	$2\sqrt{2}$ см

44. У колі, радіус якого дорівнює 5 см, проведено хорду завдовжки x см. Знайдіть x , якщо відстань від центра цього кола до цієї хорди дорівнює 4 см.

А	Б	В	Г	Д
$x = 1$	$x = 3$	$x = 4$	$x = 6$	$x = 8$

45. Відстань по прямій між точками з позначками 7 і 9 на циферблаті круглого годинника дорівнює $\sqrt{6}$. Знайдіть довжину хвилинної стрілки, якщо вона є радіусом круга (циферблата годинника).

А	Б	В	Г	Д
$2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$

46. Відстань по прямій між точками з позначками 1 і 4 на циферблаті круглого годинника дорівнює $\sqrt{6}$. Знайдіть довжину хвилинної стрілки, якщо вона є радіусом круга (циферблата годинника).

А	Б	В	Г	Д
$2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$

47. На рис. 31 зображено коло і дві його січні; $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$ і $SD = d$. Укажіть правильну рівність.

А	Б	В
$ad - bc = 0$	$a(c - a) - b(d - b) = 0$	$ac - bd = 0$
Г	Д	
$a(b - a) - c(d - c) = 0$	$ab - cd = 0$	

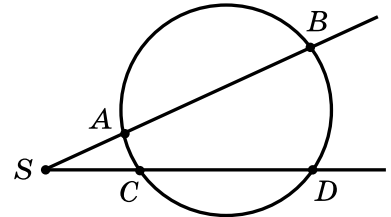


Рис. 31

48. На рис. 32 зображено коло і дві його хорди; $AB = x$, $AO = y$, $CD = u$ і $CO = v$. Укажіть правильну рівність.

А	Б	В
$xy - uv = 0$	$y(x - y) - v(u - v) = 0$	$xu - yv = 0$
Г	Д	
$x(x - y) - u(u - v) = 0$	$xv - yu = 0$	

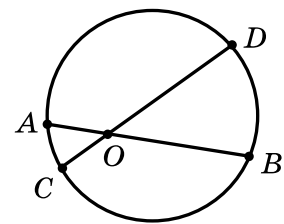


Рис. 32

49. Відрізок AB є діаметром кола, точка C належить цьому колу, $AC = x$, $BC = y$, а радіус кола дорівнює R . Укажіть правильну рівність.

А	Б	В	Г	Д
$x^2 + y^2 = 4R^2$	$x^2 - y^2 = R^2$	$x^2 + y^2 = R^2$	$x^2 - y^2 = 4R^2$	$x^2 + y^2 = 2R^2$

50. Відрізок AB є діаметром півкола, а точка C належить цьому півколу. Відстань від точки C до діаметра AB дорівнює y , а довжина відрізка AC дорівнює x . Укажіть графік, який МОЖЕ бути графіком залежності $y = f(x)$.

А	Б	В	Г	Д

У завданнях 51–54 сформульовано проблему (питання), яку потрібно розв'язати (отримати однозначну відповідь на питання), використовуючи для цього додаткові дані — твердження (1) і (2). Визначте, чи достатньо цих даних для розв'язання проблеми, і оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь*.

51. На рис. 33 зображено коло з центром у точці O , AC — діаметр цього кола, BC — його хорда. Знайдіть кут AOB .

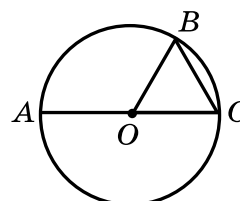


Рис. 33

- (1) Довжина хорди BC дорівнює радіусу кола.
(2) $\angle BCO = 60^\circ$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

52. Точки B і C лежать по один бік від діаметра AD кола з центром у точці O (рис. 34). Знайдіть кут BCD .

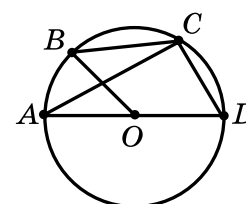


Рис. 34

- (1) $\angle ACB = 10^\circ$.
(2) $\angle AOB = 20^\circ$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

53. Дано два кола: ω_1 — із центром у точці O_1 і радіусом R_1 та ω_2 — із центром у точці O_2 і радіусом R_2 . Відомо, що $R_1 = 8$. Знайдіть R_2 .

- (1) Точка O_1 належить колу ω_2 .
(2) Точка O_2 належить колу ω_1 .

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

* Саму проблему розв'язувати не обов'язково.

54. Дано два кола: ω_1 — із центром у точці O_1 і радіусом R_1 та ω_2 — із центром у точці O_2 і радіусом R_2 . Відомо, що $R_1 = 12$. Знайдіть R_2 .

(1) Кола ω_1 і ω_2 дотикаються внутрішньо.

(2) Точка O_1 належить колу ω_2 .

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

У завданнях 55–56 порівняйте величини X і Y та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

55. Спільна хорда двох кіл, що перетинаються, є діаметром одного з них. Радіуси кіл дорівнюють 8 см і 10 см.

Величина X : довжина спільної хорди.

Величина Y : 16 см.

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

56. Спільна хорда двох кіл, що перетинаються, є стороною квадрата $ABCD$, вписаного в одне з цих кіл. Радіуси кіл дорівнюють 8 см і 10 см.

Величина X : діагональ квадрата $ABCD$.

Величина Y : 16 см.

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

Завдання на встановлення відповідності

У завданнях 57–60 до кожного рядка або рисунка, позначеного цифрою, доберіть один відповідник, позначений літерою.

57. Точки B , N і D належать колу з центром у точці O (рис. 35). Градусна міра вписаного в коло кута CAK дорівнює 20° . Установіть відповідність між кутами (1–4) і градусними мірами цих кутів (А–Д).

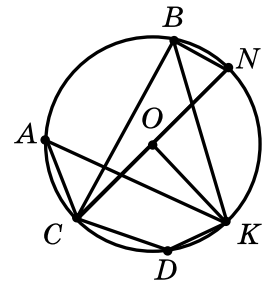


Рис. 35

- | | | | |
|---|--------------|---|-------------|
| 1 | $\angle COK$ | А | 20° |
| 2 | $\angle CDK$ | Б | 40° |
| 3 | $\angle CBK$ | В | 90° |
| | | Г | 140° |
| 4 | $\angle CBN$ | Д | 160° |

58. Коло з центром у точці O розбито точками A_1, A_2, \dots, A_{12} на 12 рівних дуг (рис. 36). Установіть відповідність між кутами (1–4) і градусними мірами цих кутів (А–Д).

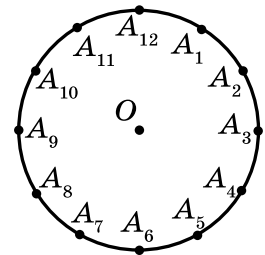


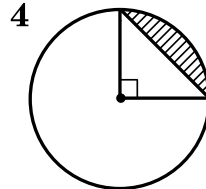
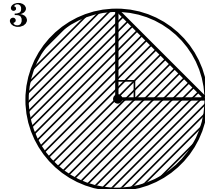
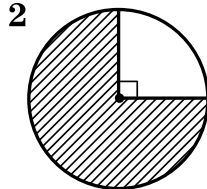
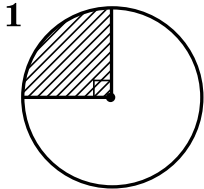
Рис. 36

- | | | | |
|---|-------------------------|---|-------------|
| 1 | $\angle A_4 A_9 A_{10}$ | А | 30° |
| 2 | $\angle A_7 O A_8$ | Б | 45° |
| 3 | $\angle A_{10} A_1 A_6$ | В | 60° |
| | | Г | 90° |
| 4 | $\angle A_6 A_{12} A_9$ | Д | 120° |

59. Установіть відповідність між довжинами дуг кола ω радіуса $R = 12$ (1–4) і виразами (А–Д), які чисельно дорівнюють цим довжинам.

- | | | | |
|---|---|---|---------|
| 1 | Половина довжини кола ω | А | 4π |
| 2 | Довжина меншої дуги кола ω , обмеженої двома сусідніми вершинами квадрата, вписаного в це коло | Б | 6π |
| 3 | Довжина меншої дуги кола ω , обмеженої двома вершинами правильного трикутника, вписаного в це коло | В | 8π |
| | | Г | 10π |
| 4 | Довжина меншої дуги кола ω , обмеженої двома сусідніми вершинами правильного шестикутника, вписаного в це коло | Д | 12π |

60. Установіть відповідність між заштрихованими фігурами, наведеними на рисунках (1–4), і виразами (А–Д), які чисельно дорівнюють площам цих фігур, якщо радіуси всіх кругів на рисунках однакові й дорівнюють 6.



- А $9\pi - 18$
 Б 9π
 В $27\pi - 18$
 Г 27π
 Д $27\pi + 18$

Завдання на встановлення послідовності

У завданнях 61–62 виберіть тільки необхідні для розв'язання поставленої задачі дії і розмістіть їх у правильній послідовності. У відповідь запишіть отриману послідовність літер.

61. Як у дане коло вписати правильний трикутник?
- А Вибрати на колі точку A_1 .
 Б Провести діаметр кола A_1A_2 .
 В Починаючи з точки A_1 , відкласти на колі точки A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 так, щоб відстані між цими точками були однаковими і дорівнювали радіусу кола.
 Г Провести діаметр кола $A_3A_4 \perp A_1A_2$.
 Д Сполучити точки A_1, A_2, A_3 .
 Е Сполучити точки A_1, A_3, A_5 .
 Є Сполучити точки A_1, A_3, A_4 .
 Ж Сполучити точки A_1, A_3, A_6 .
62. Як навколо даного кола описати правильний трикутник?
- А Вибрати на колі точку A_1 .
 Б Провести діаметр кола A_1A_2 .
 В Провести діаметр кола $A_3A_4 \perp A_1A_2$.
 Г Починаючи з точки A_1 , відкласти на колі точки A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 так, щоб відстані між цими точками були однаковими і дорівнювали радіусу кола.
 Д Через точки A_1, A_2, A_3 провести дотичні до кола, які, попарно перетнувшись, утворять шуканий трикутник.
 Е Через точки A_1, A_3, A_4 провести дотичні до кола, які, попарно перетнувшись, утворять шуканий трикутник.
 Є Через точки A_1, A_3, A_5 провести дотичні до кола, які, попарно перетнувшись, утворять шуканий трикутник.
 Ж Через точки A_1, A_3, A_6 провести дотичні до кола, які, попарно перетнувшись, утворять шуканий трикутник.

Завдання з короткою відповіддю

Розв'яжіть завдання 63–92 і запишіть відповідь **ОДНИМ ЧИСЛОМ**.

63. Два кола радіуса 3 і 4 дотикаються зовні і мають внутрішній дотик із колом радіуса 10. Знайдіть периметр трикутника, вершинами якого є центри цих трьох кіл.
64. Три кола, радіуси яких дорівнюють 2, 3 і 10, попарно дотикаються зовні. Знайдіть площу трикутника, вершини якого є центрами цих кіл.
65. Три точки A, B, C ділять коло на дуги, довжини яких відносяться як $2:3:4$. Знайдіть градусну міру **НАЙБІЛЬШОГО** кута трикутника ABC .
66. Чотири точки A, B, C, D ділять коло на дуги, довжини яких відносяться як $3:4:5:6$. Знайдіть градусну міру **НАЙМЕНШОГО** кута чотирикутника $ABCD$.
67. Точки A, B, C, D належать колу (рис. 37), $AB = BC$ і $\angle ACB = 35^\circ$. Знайдіть градусну міру кута ADC .
68. Точки A, B, C, D належать колу (див. рис. 37), $AB = BC$ і $\angle ADC = 86^\circ$. Знайдіть градусну міру кута BAC .

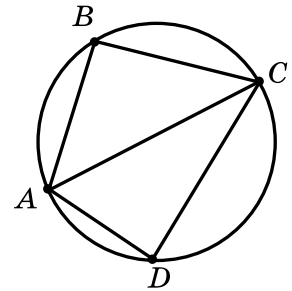


Рис. 37

69. На рис. 38 зображено рівні трикутники ACD і ABD зі спільною стороною AD , яка є діаметром кола. Градусна міра дуги BmC дорівнює 92° . Знайдіть градусну міру кута CAD .
70. За рис. 38 знайдіть градусну міру дуги BmC , якщо $\angle BDA = 34^\circ$.

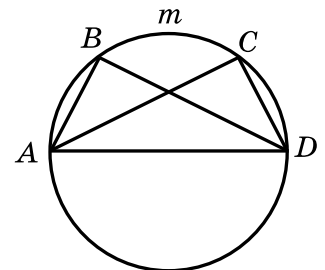


Рис. 38

71. На рис. 39 зображено дуги двох кіл: ω_1 — із центром у точці A і радіусом R та ω_2 — із центром у точці B і радіусом r . Ці дуги перетинаються в точці C , а точка B належить колу ω_1 . Знайдіть $\cos \angle BCA$, якщо $R = 2r$.

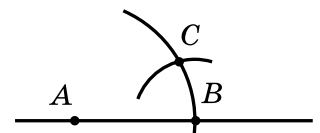


Рис. 39

72. За рис. 39 знайдіть відношення $R:r$, якщо $\operatorname{ctg} \angle BCA = 0,4$.

73. Два кола, що дотикаються між собою, дотикаються до прямої (рис. 40). Відомо, що $O_2B = AB = 8$. Знайдіть довжину відрізка O_1A .

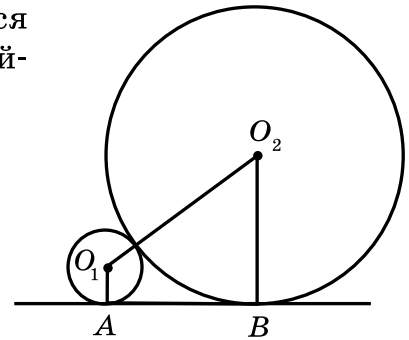


Рис. 40

74. Три кола радіуса $r=1$ попарно дотикаються зовні, а трикутник ABC утворений радіусами цих кіл (рис. 41). Знайдіть площу заштрихованої фігури. У відповідь запишіть наближене значення площі, скориставшись у разі потреби наближеними значеннями: $\sqrt{3} \approx 1,73$, $\sqrt{2} \approx 1,41$, $\pi \approx 3,14$.

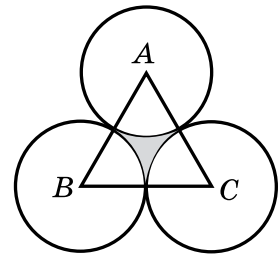


Рис. 41

75. У півкруг вписано квадрат (рис. 42), а в цей квадрат вписано круг. Знайдіть площу круга, якщо площа півкруга дорівнює 10.
76. У півкруг вписано квадрат (див. рис. 42), а в цей квадрат вписано круг. Знайдіть площу півкруга, якщо площа круга дорівнює 5.

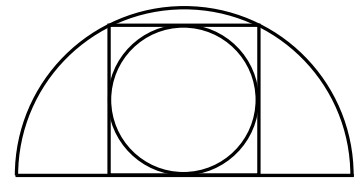


Рис. 42

77. Дано два концентричних кола. З точки, яка лежить на більшому колі, проведено дві однакові взаємно перпендикулярні хорди так, що вони дотикаються до меншого кола. Знайдіть площу (у см^2) кільця між більшим та меншим колом, якщо обидві хорди мають довжину 10 см.
78. Дано два концентричних кола. З точки, яка лежить на більшому колі, проведено дві однакові взаємно перпендикулярні хорди так, що вони дотикаються до меншого кола. Знайдіть довжину (у см) цих хорд, якщо площа круга, обмеженого більшим колом, дорівнює $64\pi \text{ см}^2$.
79. Точки A , B і C належать колу ω , причому відрізок $AB=30$ є діаметром цього кола. Через точку C проведено дотичну t до ω . Знайдіть відстань від точки B до прямої t , якщо відстань від точки A до цієї прямої дорівнює 6.

80. Відрізок KM є діаметром кола ω , а точка L належить цьому колу. Відстані від точок K і M до дотичної, проведеної до ω в точці L , дорівнюють 4 см і 20 см відповідно. Знайдіть радіус кола ω (у см).
81. Дві паралельні хорди кола радіуса 10 см лежать по один бік від центра цього кола і мають довжини 12 см і 16 см. Знайдіть відстань (у см) між цими хордами.
82. Дві паралельні хорди кола лежать по різні боки від центра цього кола, а відстань між ними дорівнює 21 см. Знайдіть радіус цього кола (у см), якщо ці хорди мають довжини 18 см і 24 см.
83. З точки поза колом проведено січну, яка перетинає коло в точках, віддалених від даної точки на 12 см і 20 см. Відстань від даної точки до центра кола дорівнює 17 см. Обчисліть радіус цього кола (у см).
84. Точка S розташована поза колом на відстані 22 від його центра. Січна, проведена через точку S , перетинає коло в точках A і B , причому $SA = 16$, $AB = 8$, а точка A належить відрізку SB . Знайдіть діаметр цього кола.
85. З точки M поза колом проведено січну, яка перетинає коло в точках K і L , причому точка K належить відрізку ML . Відомо, що $MK = 8$ см, $KL = 10$ см. Обчисліть довжину відрізка дотичної (у см), проведеної з точки M до цього кола.
86. З точки S до кола з центром у точці O проведено дотичну SC і січну SO , яка перетинає коло в точках A і B ($SB > SA$). Знайдіть відношення $SA : SB$, якщо радіус кола становить 75 % від SC .
87. Діаметри переднього та заднього коліс вазу дорівнюють 60 см і 90 см відповідно. Яку відстань (у м) проїхав цей віз, якщо його передні колеса за цей час зробили на 100 обертів більше, ніж задні? При обчисленнях вважайте, що $\pi \approx 3,14$.
88. На скільки метрів збільшилася би довжина екватора земної кулі, якби її радіус збільшили на 5 м? При обчисленнях вважайте, що $\pi \approx 3,14$.
89. Столяру необхідно зробити круглий стіл на 9 персон. Знайдіть діаметр цього стола (у см), якщо на кожну персону виділяється 80 см периметра стола. При обчисленнях вважайте, що $\pi \approx 3$.

90. Яку **НАЙБІЛЬШУ** кількість осіб можна розсадити за круглим столом радіуса 1 м, якщо для кожної особи потрібно виділити не менше ніж 60 см периметра стола? При обчисленнях вважайте, що $\pi \approx 3$.
91. Якщо кінокамерою знімати екран телевізора, який демонструє те, що знімає ця кінокамера, то в першому телевізорі виникає нескінченний ряд телевізорів. Круглий логотип фірми-виробника телевізорів, що наклеєний у лівому нижньому куті екрана першого телевізора, має діаметр 12 см, а зображення цього логотипа в п'ятому телевізорі вказаного нескінченного ряду є кругом діаметра 7,5 мм. Знайдіть загальну площу (у см^2) усіх кругів-логотипів у нескінченному ряді телевізорів.
92. У рівносторонній трикутник зі стороною $2\sqrt{3}$ см вписано нескінченну послідовність кіл, які дотикаються одне до одного і до сторін цього трикутника (на рис. 43 зображено перші три кола цієї послідовності). Знайдіть суму довжин (у см) усіх кіл згаданої нескінченної послідовності.

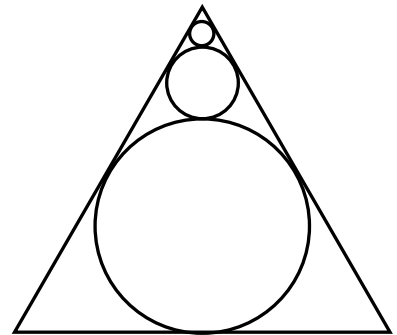


Рис. 43

Завдання з повним розв'язанням

Завдання 93–100 розв'яжіть із повним обґрунтуванням, посилаючись на відповідні означення, твердження, формули. У разі потреби проілюструйте розв'язання таблицями, діаграмами, графіками тощо.

93. У квадрат вписано круг, у який вписано інший квадрат (рис. 44). Знайдіть площу заштрихованої фігури, якщо сторона зовнішнього квадрата дорівнює 10.

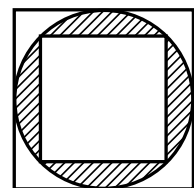


Рис. 44

94. У круг вписано правильний трикутник, у який вписано інший круг (рис. 45). Знайдіть площу заштрихованої фігури, якщо радіус зовнішнього круга дорівнює 10.

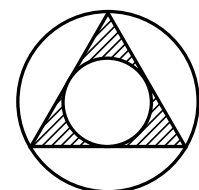


Рис. 45

95. Центри круга і квадрата, зображених на рис. 46, збігаються. Сторона квадрата дорівнює 15, а довжина хорди AB дорівнює $5\sqrt{3}$. Знайдіть площу заштрихованої фігури.

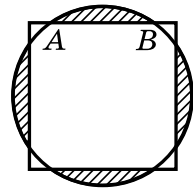


Рис. 46

96. Центри круга і правильного трикутника, зображених на рис. 47, збігаються. Сторона трикутника дорівнює $10\sqrt{3}$, а довжина хорди AB дорівнює радіусу кола, описаного навколо трикутника. Знайдіть площу заштрихованої фігури.

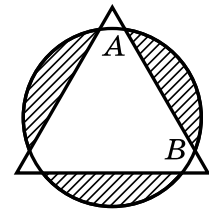


Рис. 47

97. На стороні AC трикутника ABC як на діаметрі побудовано коло, що перетинає сторони BC і AB у точках M і K відповідно. Знайдіть градусну міру кута ABC , якщо площа трикутника ABC у 9 разів більша за площу трикутника MVK .
98. На стороні AC трикутника ABC як на діаметрі побудовано коло, що перетинає сторони BC і AB у точках M і K відповідно. У скільки разів площа трикутника ABC більша за площу трикутника MVK , якщо $\angle MCK = 30^\circ$?
99. Через точку P поза колом проведено пряму, яка перетинає дане коло в точках A і B . Доведіть, що $PA \cdot PB = d^2 - R^2$, де R — радіус кола, а d — відстань від точки P до центра кола.
100. Дано два кола, які мають спільний центр. Доведіть, що сума квадратів відстаней від точки M , що належить одному з цих кіл, до кінців будь-якого діаметра іншого кола є величиною сталою і не залежить від вибору точки M .

Розділ 8. СТЕРЕОМЕТРІЯ

8.1. Прямі та площини в просторі

Найпростіші завдання з повним розв'язанням

Завдання 1–20 розв'яжіть УСНО.

1. Скільки різних площин можна провести через три точки, що лежать на одній прямій? не лежать на одній прямій?
2. У просторі дано 5 точок, які не лежать в одній площині. Яка найбільша кількість із них може лежати на одній прямій?
3. Відомо, що три вершини паралелограма належать деякій площині π . Чи можна стверджувати, що весь паралелограм належить цій площині?
4. Дві середні лінії трикутника ABC належать деякій площині σ . Чи можна стверджувати, що весь трикутник ABC належить цій площині?
5. Пряма проходить через центр кола, вписаного в трикутник ABC , і через центр кола, описаного навколо цього трикутника. Чи належить ця пряма площині трикутника ABC ?
6. Дано коло з центром у точці O , AB — хорда цього кола, що не є його діаметром. Відомо, що пряма AB і точка O лежать у площині π . Чи можна стверджувати, що все коло лежить у площині π ?
7. Чи можна стверджувати, що все коло лежить у деякій площині σ , якщо у цій площині лежать дві різні хорди цього кола?
8. Дві прямі в просторі не мають спільних точок. Чи можна стверджувати, що ці прямі обов'язково є паралельними?
9. Пряма a паралельна прямій b , а пряма b паралельна прямій c . Чи можна стверджувати, що прямі a і c паралельні?
10. Прямі x і y мимобіжні, прямі y і z мимобіжні. Чи можна стверджувати, що прямі x і z мимобіжні?
11. Пряма a не перетинає жодної прямої, що лежать у площині π . Чи можна стверджувати, що пряма a паралельна площині π ?
12. Пряма b перпендикулярна до прямої c , що лежить у площині σ . Чи можна стверджувати, що пряма b перпендикулярна до площини σ ?

13. Пряма t перпендикулярна до площини γ , а пряма l належить цій площині. Чи можна стверджувати, що кут між прямими t та l дорівнює 90° ?
14. Точки A , B і C належать і площині α , і площині β . Чи можна стверджувати, що площини α та β збігаються?
15. Пряма a належить площині α і паралельна площині β , а пряма b належить площині β і паралельна площині α . Чи можна стверджувати, що площини α та β є паралельними?
16. Чи можна при паралельному проектуванні кута $\alpha = 3^\circ$ отримати кут, градусна міра якого дорівнює 30° ; 90° ; 150° ; 180° ?
17. Чи можна при паралельному проектуванні розгорнутого кута отримати кут, градусна міра якого дорівнює 10° ; 90° ; 120° ; 180° ?
18. Чи можна при паралельному проектуванні трикутника отримати відрізок? квадрат? трапецію?
19. Чи можна при паралельному проектуванні правильного трикутника отримати правильний трикутник? прямокутний трикутник? тупокутний трикутник?
20. Чи можна при паралельному проектуванні паралелограма отримати ромб? квадрат? трапецію? чотирикутник із кутами 10° , 100° , 170° , 80° ?

Завдання з вибором однієї правильної відповіді

Проаналізуйте умови та вимоги завдань 21–50 та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

21. Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 1). Укажіть точку, яка належить площині $(AA_1 B_1)$.

А	Б	В	Г	Д
C	C_1	D	B	D_1

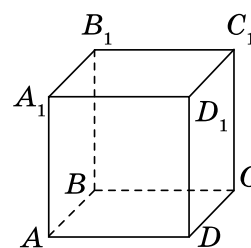


Рис. 1

22. Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 1). Укажіть пряму перетину площин $(AA_1 B)$ і $(C_1 D_1 B_1)$.

А	Б	В	Г	Д
AA_1	AB	$A_1 B_1$	$B_1 C_1$	BB_1

23. Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 1). Серед наведених пар прямих укажіть пару паралельних прямих.

А	Б	В	Г	Д
$A_1 C_1$ і AC	$B_1 D_1$ і AB	AD і AB	DC_1 і BC	AD і BC_1

24. Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 1). Серед наведених пар прямих укажіть пару мимобіжних прямих.

А	Б	В	Г	Д
AA_1 і BB_1	$A_1 C_1$ і AC	DD_1 і $A_1 D_1$	BD і DD_1	BC_1 і DC

25. Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 1). Яка з наведених прямих перпендикулярна до площини (DCC_1) ?

А	Б	В	Г	Д
AA_1	$A_1 D_1$	$D_1 B$	BC_1	BD

26. Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 1). Яка з наведених площин перпендикулярна до прямої AC ?

А	Б	В	Г	Д
$(A_1 B_1 C_1)$	(ACC_1)	(BCC_1)	(BDD_1)	$(A_1 C_1 D)$

27. У просторі дано точку A і пряму b . Скільки існує різних прямих, які проходять через точку A і НЕ ПЕРЕТИНАЮТЬ пряму b ?

А	Б	В	Г	Д
Жодної	Одна	Безліч	Одна або безліч	Жодної або безліч

28. Дано площину π і точку A . Скільки існує прямих, які проходять через точку A і НЕ ПЕРЕТИНАЮТЬ площину π ?

А	Б	В	Г	Д
Безліч	Жодної або безліч	Жодної	Одна або безліч	Тільки одна

29. Дано площину π і точку M , яка НЕ НАЛЕЖИТЬ цій площині. Скільки існує площин, які проходять через точку M і НЕ ПЕРЕТИНАЮТЬ площину π ?

А	Б	В	Г	Д
Безліч	Жодної або безліч	Жодної	Одна або безліч	Тільки одна

30. Дано площину σ і точку S , яка належить цій площині. Скільки існує площин, які проходять через точку S і перпендикулярні до площини σ ?

А	Б	В	Г	Д
Безліч	Жодної або безліч	Жодної	Одна або безліч	Тільки одна

31. У просторі задано три РІЗНІ прямі. Скільки може існувати точок, які належать ПРИНАЙМНІ двом із цих трьох прямих?

А	Б	В	Г	Д
Одна або три	Одна, дві або три	Жодної, одна або три	Жодної або три	Інша відповідь

32. У просторі задано три РІЗНІ площини. Скільки може існувати точок, які належать УСІМ цим трьом площинам?

А	Б	В	Г	Д
Жодної або безліч	Жодної, одна або безліч	Жодної або одна	Одна, три або безліч	Інша відповідь

33. Скільки різних площин МОЖУТЬ визначати три паралельні прямі a , b , c ?

А	Б	В	Г	Д
Тільки одну	Одну або дві	Одну або три	Дві або три	Тільки три

34. Скільки прямих перетину можуть мати три різні площини α , β і γ ?

А	Б	В	Г	Д
Або одну, або жодної	Або три, або жодної	Або три, або одну	Або три, або одну, або жодної	Інша відповідь

35. Пряма b паралельна площинам α і β . Яке взаємне розташування цих площин?

А	Б	В	Г	Д
Перетинаються	Паралельні	Збігаються	Паралельні або збігаються	Визначити неможливо

36. Пряма b перпендикулярна до площин α і β . Яке взаємне розташування цих площин?

А	Б	В	Г	Д
Перетинаються	Паралельні	Збігаються	Паралельні або збігаються	Визначити неможливо

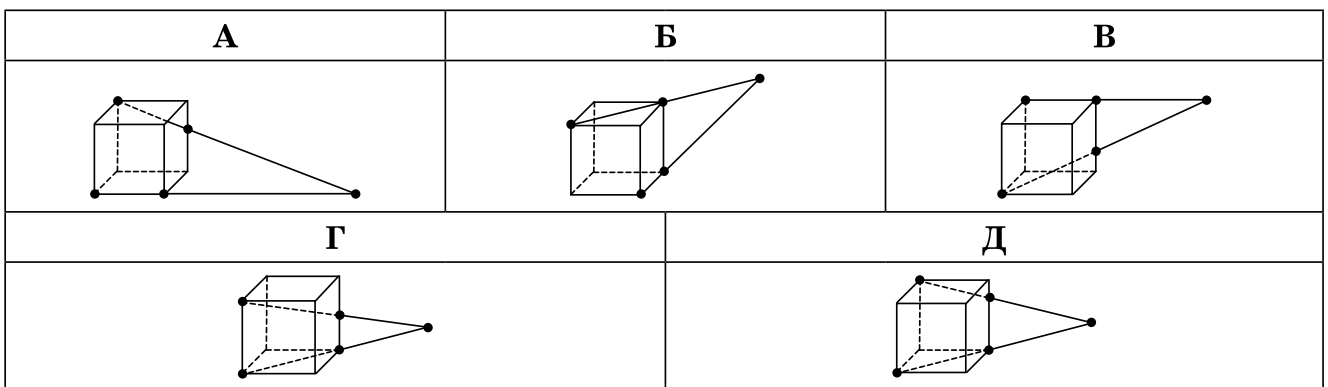
37. Пряма t паралельна стороні BC трикутника ABC . Яким є взаємне розміщення прямих t і AB в просторі?

А	Б	В	Г	Д
Мимобіжні або перетинаються	Мимобіжні або паралельні	Мимобіжні	Паралельні	Перетинаються

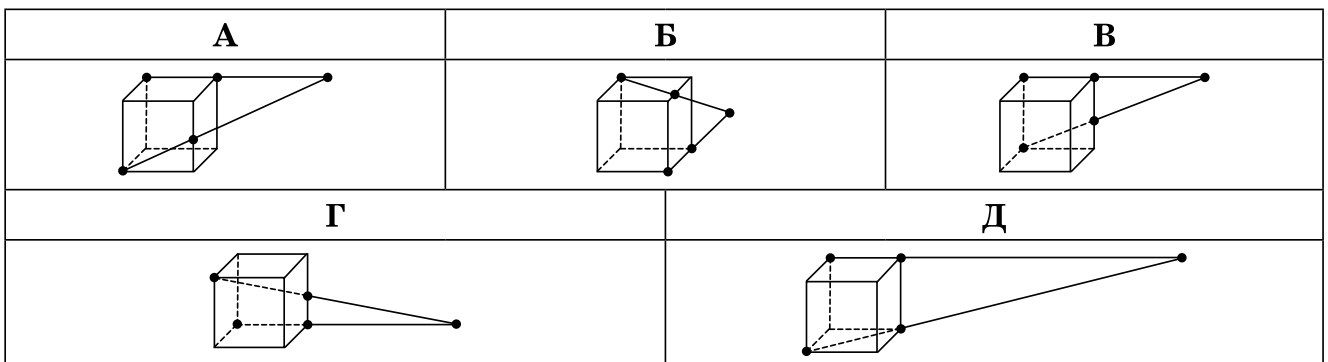
38. Пряма l проходить через вершину A трикутника ABC і лежить у площині цього трикутника. Яким є взаємне розміщення прямих l і BC в просторі?

А	Б	В	Г	Д
Мимобіжні або перетинаються	Паралельні або перетинаються	Мимобіжні	Паралельні	Перетинаються

39. На якому з наведених рисунків правильно зображено куб і дві прями, що перетинаються?



40. На якому з наведених рисунків правильно зображено куб і дві прями, що перетинаються?



41. На рис. 2 зображено куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ і три точки, що є серединами сторін AB , AD і CC_1 . Скільки ребер куба перетинає площина, яка проходить через ці точки?

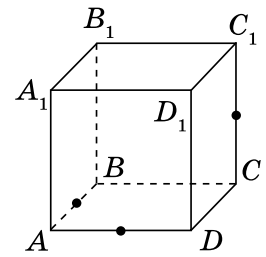


Рис. 2

А	Б	В	Г	Д
Три	Чотири	П'ять	Шість	Сім

42. На рис. 3 зображено куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ і три точки, що є серединами сторін AD , DC і $B_1 C_1$. Скільки ребер куба перетинає площина, яка проходить через ці точки?

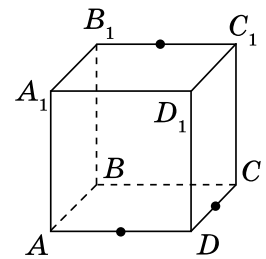


Рис. 3

А	Б	В	Г	Д
Три	Чотири	П'ять	Шість	Сім

43. Які з наведених градусних мір кутів α , β , γ **МОЖУТЬ** бути градусними мірами плоских кутів при вершині тригранного кута?

А	Б	В	Г	Д
$\alpha = 10^\circ$, $\beta = 20^\circ$, $\gamma = 30^\circ$	$\alpha = 30^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 120^\circ$	$\alpha = 40^\circ$, $\beta = 150^\circ$, $\gamma = 90^\circ$	$\alpha = 130^\circ$, $\beta = 150^\circ$, $\gamma = 120^\circ$	$\alpha = 100^\circ$, $\beta = 80^\circ$, $\gamma = 150^\circ$

44. Два плоскі кути при вершині тригранного кута дорівнюють 45° і 60° . Яких значень **МОЖЕ** набувати градусна міра третього плоского кута цього тригранного кута?

А	Б	В	Г	Д
$(0^\circ; 105^\circ)$	$(0^\circ; 75^\circ)$	$(15^\circ; 255^\circ)$	$(15^\circ; 105^\circ)$	$(0^\circ; 255^\circ)$

45. На рис. 4 зображено куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Знайдіть градусну міру кута між прямими AC і DC_1 .

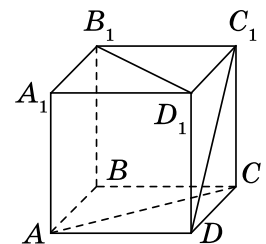


Рис. 4

А	Б	В	Г	Д
30°	45°	60°	75°	90°

46. За умовою попередньої задачі знайдіть градусну міру кута між прямими AC і B_1D_1 .

А	Б	В	Г	Д
30°	45°	60°	75°	90°

47. Ромб $ABCD$ перегнули по його більшій діагоналі BD так, що площини (ABD) і (CBD) виявилися перпендикулярними. Знайдіть відстань між точками A і C , якщо сторона ромба дорівнює 8 см, а тупий кут ромба дорівнює 120° .

А	Б	В	Г	Д
$8\sqrt{2}$ см	$4\sqrt{2}$ см	16 см	4 см	8 см

48. Правильний трикутник ABC перегнули по його бісектрисі BL так, що площини (ABL) і (BLC) виявилися перпендикулярними, а відстань між точками A і C стала дорівнювати 12 см. Знайдіть довжину сторони трикутника ABC .

А	Б	В	Г	Д
12 см	$12\sqrt{2}$ см	24 см	$6\sqrt{2}$ см	6 см

49. З деякої точки до площини σ проведено дві однакові похилі, градусна міра кута між якими дорівнює 60° . Градусна міра кута між проекціями цих похилих дорівнює 90° . Знайдіть кут нахилу похилих до площини σ .

А	Б	В	Г	Д
30°	45°	60°	$\arccos\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$

50. З деякої точки до площини π проведено дві однакові похилі, градусна міра кута між якими дорівнює 90° . Градусна міра кута між проекціями цих похилих дорівнює 120° . Знайдіть кут нахилу похилих до площини π .

А	Б	В	Г	Д
30°	45°	60°	$\arccos\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$

У завданнях 51–54 сформульовано проблему (питання), яку потрібно розв'язати (отримати однозначну відповідь на питання), використовуючи для цього додаткові дані — твердження (1) і (2). Визначте, чи достатньо цих даних для розв'язання проблеми і оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь*.

51. Дано площину π і дві прямі a та b , причому пряма b лежить у площині π . Установіть взаємне розміщення прямої a та площини π .

(1) Прямі a та b не мають спільних точок.

(2) Пряма b є ортогональною проекцією прямої a на площину π .

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

52. Дано площини α і β та пряму m , яка лежить у площині α . Установіть взаємне розміщення площин α та β .

(1) Пряма m не має з площиною β спільних точок.

(2) Відстань від будь-якої точки прямої m до площини β є сталою величиною і не залежить від вибору точки M на прямій m .

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

53. Із точки M , що не належить площині π , до цієї площини проведено перпендикуляр MA і похилу MB . Відомо, що $MA = 9$. Знайдіть кут між площиною π і прямою MB .

(1) Довжина похилої MB дорівнює 15.

(2) Довжина проекції похилої MB на площину π дорівнює 12.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

* Саму проблему розв'язувати не обов'язково.

54. Із точки S , що не належить площині σ , до цієї площини проведено перпендикуляр SC і похилі SA та SB . Відомо, що $SA = a$, $SB = b$. Знайдіть довжину перпендикуляра SC .

(1) Довжина відрізка AB дорівнює c .

(2) Кут між похилою SA та площиною σ дорівнює α .

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

У завданнях 55–56 порівняйте величини X і Y та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

55. Через середину K сторони DC прямокутника $ABCD$ до площини цього прямокутника проведено перпендикуляр KM .

Величина X : довжина відрізка MA .

Величина Y : довжина відрізка MB .

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

56. Через середину K сторони DC прямокутника $ABCD$ до площини цього прямокутника проведено перпендикуляр KM .

Величина X : довжина відрізка MA .

Величина Y : довжина відрізка MD .

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

Завдання на встановлення відповідності

У завданнях 57–60 до кожного рядка, позначеного цифрою, доберіть один відповідник, позначений літерою.

57. На рис. 5 зображено пряму трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$ і точки L та P , що є серединами ребер A_1B_1 і B_1C_1 відповідно. Установіть відповідність між парами прямих (1–4) та випадками взаємного розміщення цих прямих у просторі (А–Д).

- 1 LP і AC
- 2 CB_1 і LP
- 3 AP і LP
- 4 CL і A_1B_1

- А Прямі перетинаються в точці L
- Б Прямі є паралельними
- В Прямі перетинаються, але не в точці L і не в точці P
- Г Прямі є мимобіжними
- Д Прямі перетинаються в точці P

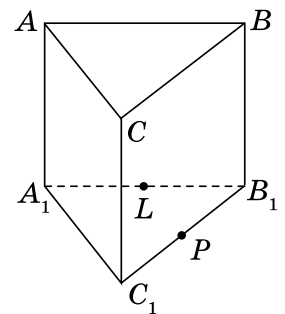


Рис. 5

58. На рис. 6 зображено чотирикутну піраміду $SABCD$ і точки L та P , що є серединами ребер CD і SC відповідно. Установіть відповідність між парами прямих (1–4) та випадками взаємного розміщення цих прямих у просторі (А–Д).

- 1 BL і AC
- 2 LP і SD
- 3 SC і AP
- 4 BD і LP

- А Прямі перетинаються в точці L
- Б Прямі є паралельними
- В Прямі перетинаються, але не в точці L і не в точці P
- Г Прямі є мимобіжними
- Д Прямі перетинаються в точці P

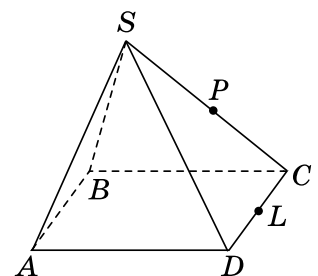


Рис. 6

59. Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Установіть відповідність між твердженнями (1–4) і прямими (А–Д), для яких виконуються ці твердження.

- | | |
|--|-----------|
| 1 Паралельна прямій AB_1 | А $A_1 D$ |
| 2 Утворює з прямою AB_1 кут 90° | Б DC_1 |
| 3 Утворює з прямою AB_1 кут 60° | В DD_1 |
| 4 Утворює з прямою AB_1 кут 45° | Г $B_1 D$ |
| | Д $D_1 C$ |

60. Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$; точка O_1 — точка перетину діагоналей грані $A_1 B_1 C_1 D_1$. Установіть відповідність між твердженнями (1–4) і прямими (А–Д), для яких виконуються ці твердження.

- | | |
|--|-------------|
| 1 Паралельна площині (ABC) | А $B_1 D_1$ |
| 2 Перпендикулярна до площини (ABC) | Б $A_1 C$ |
| 3 Утворює з площиною (ABC) кут 45° | В $O_1 D$ |
| 4 Утворює з площиною (ABC) кут $\varphi = \arctg \sqrt{2}$ | Г CC_1 |
| | Д AB_1 |

Завдання на встановлення послідовності

У завданнях 61–62 виберіть тільки необхідні для розв'язання поставленої задачі дії і розмістіть їх у правильній послідовності. У відповідь запишіть отриману послідовність літер.

61. Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точка M належить ребру BB_1 , а точка K належить ребру CC_1 , причому $BM > CK$ (рис. 7). Як побудувати точку перетину прямої MK з площиною (ABC) ?

- А Провести пряму MK .
- Б Провести пряму AC і позначити її літерою m .
- В Провести пряму BC і позначити її літерою m .
- Г Провести пряму AD і позначити її літерою m .
- Д Провести пряму $B_1 C_1$ і позначити її літерою m .
- Е Точка перетину прямої MK з прямою m є шуканою точкою.

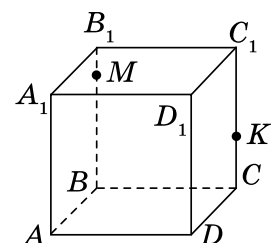


Рис. 7

62. Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точка M належить ребру BB_1 , точка K належить ребру CC_1 , а точка P належить ребру AA_1 , причому $BM > CK > AP$ (рис. 8). Як побудувати лінію перетину площини (MKP) з площиною (ABC) ?
- А Провести прямі MK і MP .
- Б Провести пряму BC і позначити її літерою a ; провести пряму AB і позначити її літерою b .
- В Провести пряму AC і позначити її літерою a ; провести пряму BD і позначити її літерою b .
- Г Провести пряму $B_1 C_1$ і позначити її літерою a ; провести пряму $A_1 B_1$ і позначити її літерою b .
- Д Провести пряму CD і позначити її літерою a ; провести пряму AD і позначити її літерою b .
- Е Позначити точку перетину прямих a і MK літерою X , а точку перетину прямих b і MP — літерою Y .
- Є Позначити точку перетину прямих a і MP літерою X , а точку перетину прямих b і MK — літерою Y .
- Ж Пряму XY вважати лінією перетину площин (MKP) і (ABC) .

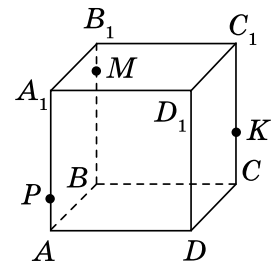


Рис. 8

Завдання з короткою відповіддю

Розв'яжіть завдання 63–92 і запишіть відповідь **ОДНИМ ЧИСЛОМ**.

63. Дано площину π і відрізок AC , який не перетинає цю площину (рис. 9). Точка B є серединою відрізка AC . Через точки A , B і C проведено паралельні прямі AA_1 , BB_1 , CC_1 , які перетинають площину π в точках A_1 , B_1 і C_1 відповідно. Знайдіть довжину відрізка AA_1 , якщо $BB_1 = 5$, $CC_1 = 6,5$.

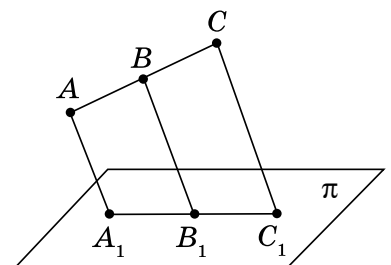


Рис. 9

64. Дано площину π і відрізок AC , який не перетинає цю площину (рис. 9). Точка B є серединою відрізка AC . Через точки A , B і C проведено паралельні прямі AA_1 , BB_1 , CC_1 , які перетинають площину π в точках A_1 , B_1 і C_1 відповідно. Знайдіть довжину відрізка BB_1 , якщо $AA_1 = 4$, $CC_1 = 7$.

65. Куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ з ребром 4 перетнуто площиною, яка проходить через вершину B_1 паралельно площині $(A_1 C_1 D)$. Знайдіть площу одержаного перерізу.
66. Дано прямокутний паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у якого $AB = \sqrt{70}$, $BC = \sqrt{99}$, $AA_1 = \sqrt{126}$. Через вершину D_1 паралелепіпеда проведено переріз, паралельний площині $(A_1 B D)$. Знайдіть площу одержаного перерізу.
67. Площина π перетинає сторони AB і BC трикутника ABC в точках A_1 і C_1 відповідно. Сторона AC паралельна площині π . Знайдіть довжину сторони BC , якщо $AA_1 : A_1 B = 3 : 2$, а $BC_1 = 15$.
68. Площина σ перетинає сторони AB і BC трикутника ABC в точках A_1 і C_1 відповідно. Сторона AC паралельна площині σ . Знайдіть відношення $\frac{AA_1}{A_1 B}$, якщо $BC = 27$, а $BC_1 = 6$.
69. З точки A до площини π проведено дві похилі $AB = 30$ і $AC = 40$. Знайдіть відстань від точки A до площини π , якщо довжини проєкцій цих похилих відносяться як $9 : 16$.
70. З точки M до площини σ проведено похилі MA і MB та перпендикуляр MC . Знайдіть довжину відрізка MB , якщо $MC = 24$, $MA : MB = 13 : 15$, $AC : BC = 5 : 9$.
71. Точка K рівновіддалена від усіх вершин трикутника зі сторонами 5 см, 12 см і 13 см і знаходиться на відстані $4\sqrt{3}$ см від площини цього трикутника. Знайдіть відстань (у см) від точки K до кожної з вершин даного трикутника.
72. Точка L віддалена від кожної з вершин прямокутника на відстань $5\sqrt{3}$ см і знаходиться на відстані 5 см від площини цього прямокутника. Знайдіть площу даного прямокутника (у см^2), якщо одна з його сторін удвічі менша за іншу.
73. З вершини C прямокутного трикутника ABC проведено перпендикуляр $CK = 2\sqrt{7}$ до площини цього трикутника. Знайдіть відстань від точки K до сторони AB , якщо $AC = BC = 4$.
74. З вершини A прямокутника $ABCD$ проведено перпендикуляр $AM = 5$ до площини цього прямокутника. Знайдіть відстань від точки M до діагоналі BD , якщо $AB = 15$, $BC = 20$.

75. Через вершину B трикутника ABC проведено пряму l , перпендикулярну до площини цього трикутника. Відстань між прямими l і AC дорівнює 6, а довжина сторони AC дорівнює 9. Знайдіть площу трикутника ABC .
76. Через вершину C паралелограма $ABCD$ проведено пряму d , перпендикулярну до площини цього паралелограма. Знайдіть відстань між прямими d і AB , якщо довжина сторони AB дорівнює 10, а площа паралелограма $ABCD$ дорівнює 25.
77. Точка M знаходиться на відстані 13 см від кожної зі сторін правильного трикутника ABC , сторона якого дорівнює $24\sqrt{3}$ см. На якій відстані (y см) від площини трикутника ABC знаходиться точка M ?
78. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 2 см і 8 см. У цю трапецію вписано коло з центром у точці O . З точки O до площини трапеції проведено перпендикуляр OK . Точка K знаходиться на відстані 10 см від бічної сторони трапеції. Знайдіть довжину відрізка OK (y см).
79. Основи трапеції дорівнюють 18 і 12. Через більшу основу проведено площину на відстані 5 від меншої основи. Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей трапеції до цієї площини.
80. Дано правильний шестикутник $ABCDEF$. Площина π не перетинає жодної зі сторін цього шестикутника. Шестикутник $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ є ортогональною проекцією шестикутника $ABCDEF$ на площину π . Знайдіть AA_1 , якщо $CC_1 = 10$ см, $DD_1 = 2,5$ см, $FF_1 = 2$ см.
81. У кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ знайдіть градусну міру кута між прямими AB_1 і D_1C .
82. У кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ знайдіть градусну міру кута між прямими AC і BC_1 .
83. Відрізок завдовжки 10 м перетинає площину, причому відстані від його кінців до цієї площини дорівнюють 2 м і 3 м. Знайдіть градусну міру кута між даним відрізком і даною площиною.
84. Відрізок AB завдовжки 2 не перетинає площину π , причому відстані від точок A і B до цієї площини дорівнюють $7\sqrt{3}$ і $8\sqrt{3}$ відповідно. Знайдіть градусну міру кута між відрізком AB і площиною π .
85. У кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ знайдіть котангенс кута між прямою B_1D і площиною (CC_1D_1) .

86. У кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка M є точкою перетину діагоналей грані $ABB_1 A_1$, а точка S — точкою перетину діагоналей грані $A_1 B_1 C_1 D_1$. Знайдіть котангенс кута між прямою MS і площиною грані $ABCD$.
87. Ортогональною проекцією трикутника ABC на деяку площину є прямокутний трикутник $A_1 B_1 C_1$, гіпотенуза якого дорівнює 13, а один із катетів дорівнює 12. Знайдіть площу трикутника ABC , якщо градусна міра кута між площинами (ABC) і $(A_1 B_1 C_1)$ дорівнює 45° .
88. Площа чотирикутника $ABCD$ дорівнює 150 см^2 . Його ортогональною проекцією на деяку площину є прямокутник $A_1 B_1 C_1 D_1$, у якому $A_1 B_1 = 6 \text{ см}$, а $A_1 C_1 = 10 \text{ см}$. Знайдіть косинус кута між площинами $(ABCD)$ і $(A_1 B_1 C_1 D_1)$.
89. Квадрат і прямокутник, площі яких дорівнюють 25 см^2 і 50 см^2 відповідно, мають спільну сторону, а градусна міра кута між їх площинами дорівнює 60° . Знайдіть відстань (у см) між паралельними сторонами квадрата і прямокутника.
90. Квадрат і прямокутник, площі яких дорівнюють 16 см^2 і 20 см^2 відповідно, мають спільну сторону. Знайдіть косинус кута між їх площинами, якщо відстань між паралельними сторонами квадрата і прямокутника дорівнює 6 см.
91. У кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ знайдіть косинус кута між площинами (ABC) і $(A_1 BD)$.
92. У кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки K, M, P є серединами ребер AD, DC, BB_1 відповідно. Знайдіть косинус кута між площинами (ABC) і (KMP) .

Завдання з повним розв'язанням

Завдання 93–100 розв'яжіть із повним обґрунтуванням, посилаючись на відповідні означення, твердження, формули. У разі потреби проілюструйте розв'язання таблицями, діаграмами, графіками тощо.

93. Довжина ребра правильного тетраедра $ABCD$ дорівнює 1 см. Знайдіть відстань між прямими AC і BD .
94. Довжина ребра куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ дорівнює 4. Знайдіть відстань між прямими BD_1 і AC .

95. Площини прямокутників $ABCD$ і $BLKC$ перпендикулярні (рис. 10). Знайдіть відстань між прямими BC і LD , якщо $AB = 20$ см, а $KC = 15$ см.

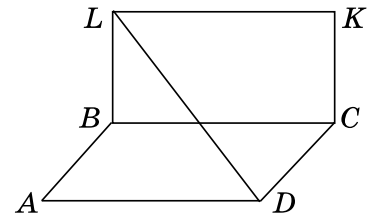


Рис. 10

96. У кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ знайдіть кут між прямими $B_1 D_1$ і $A_1 C$.
97. Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точка K є серединою сторони BC . Знайдіть кут між прямими $A_1 C$ і $B_1 K$.
98. У тригранному куті два двогранні кути дорівнюють по 45° , а плоский кут між ребрами цих кутів дорівнює 90° . Знайдіть третій двогранний кут.
99. Жодна з вершин довільного трикутника не належить площині σ . Доведіть, що відстань від точки перетину медіан цього трикутника до площини σ дорівнює середньому арифметичному відстаней від вершин трикутника до цієї площини.
100. Із вершини C трикутника ABC до його площини проведено перпендикуляр CM . Пряма, що проходить через точку M і середину сторони AB , є перпендикулярною до прямої AB . Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений.

8.2. Многогранники

Найпростіші завдання з повним розв'язанням

Завдання 1–20 розв'яжіть УСНО.

1. Скільки вершин, ребер і граней у трикутній піраміді? чотирикутній піраміді? шестикутній піраміді?
2. Скільки вершин, ребер і граней у трикутній призми? чотирикутній призми? шестикутній призми?
3. Скільки діагоналей має чотирикутна призма? шестикутна призма?
4. Скільки двогранних кутів має прямокутний паралелепіпед?
5. Скільки тригранних кутів має трикутна призма?
6. Скільки чотиригранних кутів має чотирикутна піраміда?

7. Чи існує піраміда, у якої немає жодного тригранного кута?
8. Якою геометричною фігурою є бічна грань правильної шестикутної піраміди?
9. Якою геометричною фігурою є бічна грань прямої шестикутної призми?
10. Чи можна розрізати пряму трикутну призму площиною так, щоб утворилися дві прямі трикутні призми? Якщо так, то як це зробити?
11. Чи можна розрізати пряму трикутну призму площиною так, щоб утворилися дві піраміди? Якщо так, то як це зробити?
12. Ребро куба дорівнює 2 см. Знайдіть діагональ грані куба; площу грані куба; діагональ куба; площу поверхні куба.
13. Знайдіть довжину ребра куба, якщо об'єм цього куба дорівнює 27 см^3 .
14. Знайдіть об'єм призми, якщо площа її основи дорівнює 8 см^2 , а її висота дорівнює 3 см.
15. Знайдіть об'єм піраміди, якщо площа її основи дорівнює 6 см^2 , а її висота дорівнює 2 см.
16. Виміри прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 1 см, 2 см і 3 см. Знайдіть площі всіх граней та об'єм цього паралелепіпеда.
17. У правильній шестикутній піраміді апофема дорівнює 5 см, а сторона основи дорівнює 2 см. Знайдіть площу бічної поверхні цієї піраміди.
18. Чи можна розбити куб на три піраміди, об'єми яких рівні між собою? Якщо так, то як це зробити?
19. Якими геометричними фігурами можуть бути перерізи куба?
20. Якими геометричними фігурами можуть бути перерізи трикутної піраміди?

Завдання з вибором однієї правильної відповіді

Проаналізуйте умови та вимоги завдань 21–50 та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

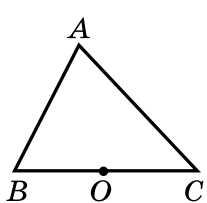
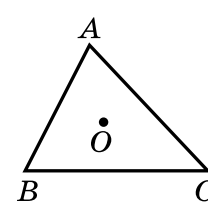
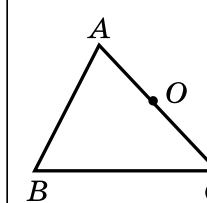
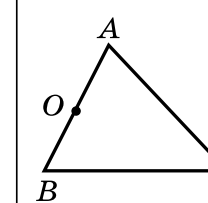
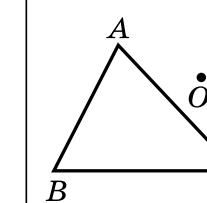
21. У правильному многограннику 12 ребер і 8 вершин. Скільки в ньому граней?

А	Б	В	Г	Д
4	6	8	10	12

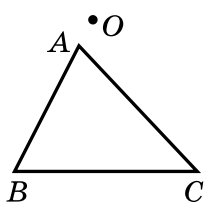
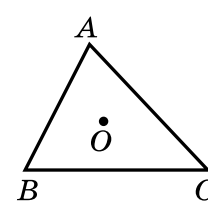
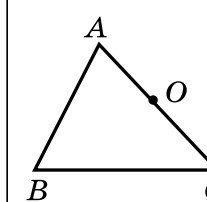
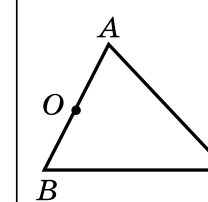
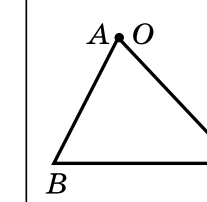
22. У правильному многограннику 6 вершин і 8 граней. Скільки в ньому ребер?

А	Б	В	Г	Д
12	10	16	8	14

23. У трикутній піраміді $SABC$ (точка S — вершина піраміди) тільки одна бічна грань SAC перпендикулярна до площини основи ABC . Точка O — основа висоти SO даної піраміди. Укажіть можливе положення точки O в площині (ABC) .

А	Б	В	Г	Д
				

24. У трикутній піраміді $SABC$ (точка S — вершина піраміди) бічні грані SAC і SAB перпендикулярні до площини основи ABC . Точка O — основа висоти SO даної піраміди. Укажіть можливе положення точки O в площині (ABC) .

А	Б	В	Г	Д
				

25. Яку найменшу кількість граней може мати призма?

А	Б	В	Г	Д
3	4	5	6	9

26. Яку найменшу кількість граней може мати піраміда?

А	Б	В	Г	Д
3	4	5	6	9

27. Укажіть правильне твердження.

А	Діагоналі будь-якої чотирикутної призми перетинаються і в точці перетину діляться навпіл
Б	Бічні ребра будь-якого паралелепіпеда перпендикулярні до площин його основ
В	Відрізок, що сполучає центри основ будь-якої чотирикутної призми, є її висотою
Г	Бічні ребра будь-якої чотирикутної призми перпендикулярні до площин її основ
Д	Діагоналі будь-якого паралелепіпеда перетинаються і в точці перетину діляться навпіл

28. Укажіть НЕПРАВИЛЬНЕ твердження.

А	Протилежні грані будь-якого паралелепіпеда мають однакові площі
Б	Усі діагоналі будь-якого прямокутного паралелепіпеда мають однакову довжину
В	Діагоналі бічних граней будь-якої прямої трикутної призми рівні між собою
Г	Довжини бічних ребер будь-якої прямої трикутної призми дорівнюють її висоті
Д	Площі основ будь-якої шестикутної призми рівні між собою

29. Ребро куба зменшили у 2 рази. У скільки разів зменшився об'єм цього куба?

А	Б	В	Г	Д
У 2 рази	У 4 рази	У 6 разів	У 8 разів	У 16 разів

30. Ребро куба зменшили у 2 рази. У скільки разів зменшилася площа повної поверхні цього куба?

А	Б	В	Г	Д
У 2 рази	У 4 рази	У 6 разів	У 8 разів	У 16 разів

31. Ребро першого куба дорівнює діагоналі другого куба. Як відносяться об'єми цих кубів?

А	Б	В	Г	Д
3:1	$2\sqrt{2} : 1$	2:1	$3\sqrt{3} : 1$	4:1

32. Ребро першого куба дорівнює діагоналі грані другого куба. Як відносяться площі повних поверхонь цих кубів?

А	Б	В	Г	Д
3:1	$2\sqrt{2}:1$	2:1	$3\sqrt{3}:1$	4:1

33. Прямокутний паралелепіпед склеєно з чотирьох однакових кубиків. Знайдіть площу повної поверхні паралелепіпеда, якщо ребро кожного кубика дорівнює 1 см.

А	Б	В	Г	Д
16 см ²	18 см ²	20 см ²	24 см ²	Задача має неоднозначну відповідь

34. Прямокутний паралелепіпед склеєно з трьох однакових кубиків. Знайдіть площу повної поверхні паралелепіпеда, якщо ребро кожного кубика дорівнює 2 см.

А	Б	В	Г	Д
72 см ²	28 см ²	64 см ²	56 см ²	Задача має неоднозначну відповідь

35. Довжини трьох ребер прямокутного паралелепіпеда, які виходять з однієї вершини, дорівнюють 3 см, 5 см і 7 см. Цей паралелепіпед складено з n кубиків, ребро кожного з яких дорівнює 1 см. Знайдіть n .

А	Б	В	Г	Д
$n = 15$	$n = 21$	$n = 35$	$n = 105$	$n = 125$

36. Із n однакових маленьких кубиків склали великий куб. Укажіть число, яке може бути значенням n .

А	Б	В	Г	Д
16	27	30	45	54

37. Приміщення класу, в якому навчатимуться n учнів, має форму прямокутного паралелепіпеда. Висота класу дорівнює a м, площа підлоги дорівнює S м². Укажіть формулу для обчислення S , якщо відомо, що цей клас задовольняє гігієнічні вимоги, за якими на кожного із n учнів має припадати b м³ повітря.

А	Б	В	Г	Д
$S = \frac{bn}{a}$	$S = \frac{b}{na}$	$S = \frac{ab}{n}$	$S = \frac{n}{ab}$	$S = \frac{an}{b}$

38. Цех, у якому працюватимуть k робітників, має форму прямокутного паралелепіеда. Висота цеху дорівнює h м, а площа підлоги дорівнює S м². Відомо, що цех задовольняє санітарні норми, за якими на кожного з робітників цеху має припадати a м³ повітря. Укажіть формулу для обчислення h .

А	Б	В	Г	Д
$h = \frac{aS}{k}$	$h = \frac{ak}{S}$	$h = \frac{k}{aS}$	$h = \frac{S}{ak}$	$h = \frac{kS}{a}$

39. Основою прямокутного паралелепіеда є прямокутник зі сторонами 4 см і 3 см, а бічне ребро цього паралелепіеда дорівнює 2 дм. Знайдіть тангенс кута нахилу діагоналі паралелепіеда до площини його основи.

А	Б	В	Г	Д
0,25	0,4	2	2,5	4

40. Основою прямокутного паралелепіеда є прямокутник зі сторонами 6 м і 8 м, а бічне ребро цього паралелепіеда дорівнює 5 м. Знайдіть тангенс кута між діагоналлю паралелепіеда і його бічним ребром.

А	Б	В	Г	Д
2	0,5	5	0,2	4

41. Об'єм піраміди, площа основи якої дорівнює 1 см², більший за 10 см³. Укажіть можливе значення висоти h цієї піраміди.

А	Б	В	Г	Д
$h = 1$ см	$h = 10$ см	$h = 13$ см	$h = 27$ см	$h = 32$ см

42. Об'єм піраміди, основою якої є прямокутник зі сторонами a і b , не перевищує 10, а висота цієї піраміди дорівнює 3. Укажіть можливі значення параметрів a і b .

А	Б	В	Г	Д
$a = 3, b = 4$	$a = 2, b = 6$	$a = 3, b = 3$	$a = 1, b = 11$	$a = 4, b = 4$

43. Площина, паралельна основі правильної трикутної піраміди, ділить її на два тіла (піраміду і зрізану піраміду), об'єми яких відносяться як 8:19. У якому відношенні, рахуючи від вершини піраміди, ця площина ділить висоту піраміди?

А	Б	В	Г	Д
1:1	2:1	3:1	3:2	5:2

44. Площина, паралельна основі правильної чотирикутної піраміди, ділить її на два тіла (піраміду і зрізану піраміду), площі бічних поверхонь яких відносяться як 1:8. У якому відношенні, рахуючи від вершини піраміди, ця площина ділить висоту піраміди?

А	Б	В	Г	Д
1:1	1:2	1:3	2:3	2:5

45. Площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює S , а всі бічні грані цієї піраміди нахилені до площини основи під кутом α . Укажіть формулу, за якою можна обчислити площу S_1 повної поверхні цієї піраміди.

А	Б	В	Г	Д
$S_1 = S \cdot \cos \alpha$	$S_1 = S \left(1 + \frac{1}{\cos \alpha} \right)$	$S_1 = S \left(\cos \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} \right)$	$S_1 = S(1 + \cos \alpha)$	$S_1 = \frac{S}{\cos \alpha}$

46. Площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює S , а площа її основи дорівнює G . Укажіть формулу, за якою можна обчислити двогранний кут φ між будь-якою бічною гранню та площиною основи цієї піраміди.

А	Б	В	Г	Д
$\varphi = \arccos \frac{G}{S}$	$\varphi = \arccos \left(\frac{S}{G} - 1 \right)$	$\varphi = \arccos \frac{3G}{S}$	$\varphi = \arccos \left(\frac{G}{S} - 1 \right)$	$\varphi = \arccos \frac{S}{G}$

47. На рис. 11 зображено правильну трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$. Відомо, що $AB = AA_1 = 1$. Знайдіть площу перерізу, проведеного через вершини A , C_1 і B .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{7}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{7}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

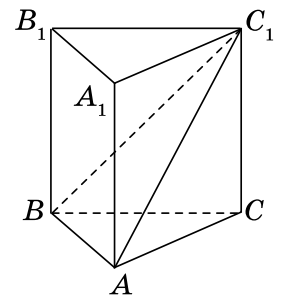


Рис. 11

48. За умовою попередньої задачі знайдіть косинус кута φ між площиною перерізу і площиною основи призми.

А	Б	В	Г	Д
$\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos \varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}$	$\cos \varphi = \frac{1}{2}$	$\cos \varphi = \sqrt{\frac{2}{7}}$	$\cos \varphi = \sqrt{\frac{3}{7}}$

49. Дано правильну чотирикутну піраміду $SABCD$ (рис. 12), у якої довжини всіх ребер дорівнюють 1. Через діагональ BD основи піраміди і точку K , що є серединою бічного ребра SC , проведено переріз. Знайдіть площу цього перерізу.

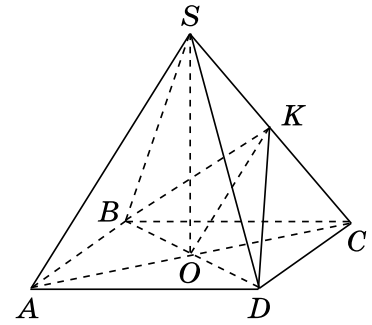


Рис. 12

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

50. За умовою попередньої задачі знайдіть косинус кута α між площиною перерізу і площиною основи піраміди.

А	Б	В	Г	Д
$\cos \alpha = \frac{1}{2}$	$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$	$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$

У завданнях 51–54 сформульовано проблему (питання), яку потрібно розв'язати (отримати однозначну відповідь на питання), використовуючи для цього додаткові дані — твердження (1) і (2). Визначте, чи достатньо цих даних для розв'язання проблеми, і оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь*.

51. Знайдіть об'єм правильної трикутної призми.
 (1) Довжина одного з ребер цієї призми дорівнює 4 см.
 (2) Одна з граней цієї призми є квадратом.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

52. Знайдіть площу бічної поверхні правильної чотирикутної призми.
 (1) Периметр основи цієї призми дорівнює 6 см.
 (2) Площа бічної грані цієї призми дорівнює 6 см^2 .

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

* Саму проблему розв'язувати не обов'язково.

53. Знайдіть об'єм правильної трикутної піраміди, сторона основи якої дорівнює $8\sqrt{3}$ см.

(1) Бічне ребро цієї піраміди дорівнює 10 см.

(2) Висота цієї піраміди дорівнює 6 см.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

54. Знайдіть площу повної поверхні правильної чотирикутної піраміди, сторона основи якої дорівнює a .

(1) Бічне ребро цієї піраміди дорівнює b .

(2) Бічні ребра цієї піраміди нахилені до площини її основи під кутом φ .

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

У завданнях 55–56 порівняйте величини X і Y та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

55. Серединами ребер SA і AC правильної трикутної піраміди $SABC$ (рис. 13) є точки K і L відповідно, відстань між якими дорівнює 5.

Величина X : довжина ребра AB .

Величина Y : 10.

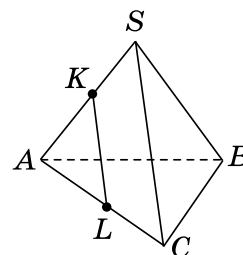


Рис. 13

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

56. Серединами ребер SA і AC правильного тетраедра $SABC$ (рис. 13) є точки K і L відповідно, відстань між якими дорівнює 5.

Величина X : довжина ребра AB .

Величина Y : 10.

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

Завдання на встановлення відповідності

У завданнях 57–60 до кожного рядка або рисунка, позначеного цифрою, доберіть один відповідник, позначений літерою.

57. Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, довжина ребра якого дорівнює 1 (рис. 14), а точки K, L, M, N є серединами ребер AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 відповідно. Установіть відповідність між многогранниками (1–4) і числами (А–Д), які дорівнюють об'ємам цих многогранників.

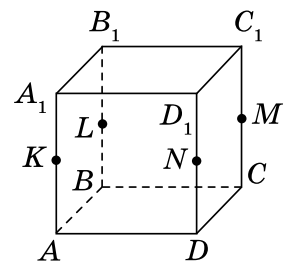


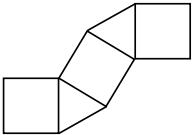
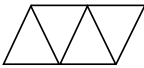
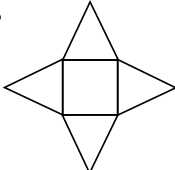
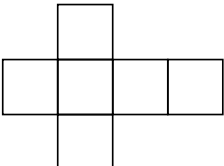
Рис. 14

- | | |
|-------------------------------|------------------|
| 1 Піраміда $AA_1 B_1 C_1 D_1$ | А $\frac{1}{2}$ |
| 2 Піраміда $ALMN$ | Б $\frac{1}{3}$ |
| 3 Призма $BCDLMN$ | В $\frac{1}{4}$ |
| 4 Піраміда $LABCD$ | Г $\frac{1}{6}$ |
| | Д $\frac{1}{12}$ |

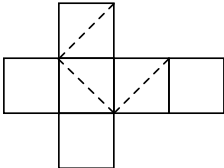
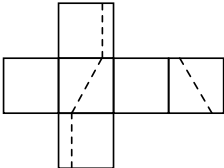
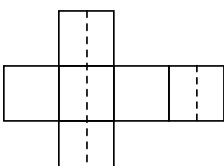
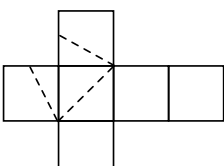
58. Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, довжина ребра якого дорівнює 1. Установіть відповідність між многогранниками (1–4) і числовими виразами (А–Д), які дорівнюють площам повних поверхонь цих многогранників

- | | |
|------------------------------|----------------------------|
| 1 Піраміда $A_1 ABCD$ | А $3 + \sqrt{3}$ |
| 2 Призма $ABCA_1 B_1 C_1$ | Б $3 + \sqrt{2}$ |
| 3 Піраміда $A_1 ABD$ | В 6 |
| 4 Куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ | Г $\frac{3 + \sqrt{3}}{2}$ |
| | Д $2 + \sqrt{2}$ |

59. Установіть відповідність між рисунками (1–4), на яких зображені розгортки многогранників, і цими многогранниками (А–Д).

- | | | |
|---|---|------------------------|
| 1  | 2  | А Трикутна піраміда |
| 3  | 4  | Б Трикутна призма |
| | | В Чотирикутна піраміда |
| | | Г Чотирикутна призма |
| | | Д Шестикутна піраміда |

60. Установіть відповідність між розгортками кубів (1–4), на яких пунктирними лініями позначено лінії перетину цих кубів деякими площинами перерізу, і геометричними фігурами (А–Д), які є перерізами цих кубів цими площинами.

- | | | |
|---|---|--|
| 1  | 2  | А Правильний трикутник |
| 3  | 4  | Б Трикутник, який не є правильним |
| | | В Квадрат |
| | | Г Прямокутник, який не є квадратом |
| | | Д Чотирикутник, що не є паралелограмом |

Завдання на встановлення послідовності

У завданнях 61–62 виберіть тільки необхідні для розв'язання поставленої задачі дії і розмістіть їх у правильній послідовності. У відповідь запишіть отриману послідовність літер.

61. На рис. 15 зображено правильну чотирикутну піраміду $SABCD$. Як правильно зобразити кут між площиною бічної грані SCD і площиною основи піраміди?

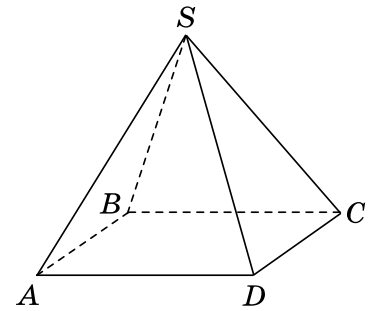


Рис. 15

- А Провести діагоналі основи AC і BD та позначити точку їх перетину літерою O .
 Б Позначити точку, яка є серединою ребра CD , літерою M .
 В Побудувати відрізки BM і SM .
 Г Побудувати відрізки OM і SM .
 Д Зробити висновок: шуканий кут — кут ODS .
 Е Зробити висновок: шуканий кут — кут OCS .
 Є Зробити висновок: шуканий кут — кут OMS .
 Ж Зробити висновок: шуканий кут — кут BMS .

62. На рис. 16 зображено куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Як правильно зобразити кут між площиною його грані $ABCD$ і площиною $(B_1 AC)$?

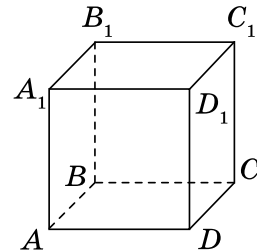


Рис. 16

- А Провести діагоналі основи AC і BD та позначити точку їх перетину літерою O .
 Б Побудувати відрізки AB_1 і CB_1 .
 В Побудувати відрізок OB_1 .
 Г Зробити висновок: шуканий кут — кут OAB_1 .
 Д Зробити висновок: шуканий кут — кут OCB_1 .
 Е Зробити висновок: шуканий кут — кут B_1OB .
 Є Зробити висновок: шуканий кут — кут OBV_1 .
 Ж Зробити висновок: шуканий кут — кут AB_1C .

Завдання з короткою відповіддю

Розв'яжіть завдання 63–92 і запишіть відповідь **ОДНИМ ЧИСЛОМ**.

63. Площа повної поверхні куба дорівнює 150. Знайдіть площу діагонального перерізу цього куба.

64. Об'єм куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ дорівнює 27. Знайдіть площу перерізу, який проходить через точки A_1 , C_1 і D .
65. Обчисліть площу бічної поверхні прямої призми (у см^2), основою якої є паралелограм зі сторонами 9 см і 15 см, а висота призми дорівнює 8 см.
66. Знайдіть довжину сторони основи правильної п'ятикутної призми, якщо її висота дорівнює 10 см, а площа її бічної поверхні дорівнює 350 см^2 .
67. В основі прямої призми лежить паралелограм зі сторонами $6\sqrt{2}$ і $2\sqrt{2}$ та гострим кутом 45° . Площа бічної поверхні призми в 4 рази більша за площу її основи. Знайдіть висоту цієї призми.
68. В основі прямої призми лежить прямокутна трапеція з тупим кутом 120° і меншою основою 4. Діагональ трапеції є бісектрисою її гострого кута. Більша діагональ призми утворює з площиною основи кут 45° . Знайдіть об'єм цієї призми.
69. У правильній шестикутній призмі найбільша діагональ нахилена до площини основи під кутом 60° і дорівнює $8\sqrt{3}$. Знайдіть площу повної поверхні цієї призми.
70. У правильній шестикутній призмі $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ зі стороною основи $2\sqrt{3}$ і висотою 8 проведено переріз, який проходить через ребра AB і $D_1 E_1$. Знайдіть площу цього перерізу.
71. Бічне ребро похилої трикутної призми дорівнює 3, а її дві бічні грані взаємно перпендикулярні і мають площі 12 та 15. Знайдіть об'єм цієї призми.
72. Основою призми є рівнобедрений трикутник зі сторонами 2, 3 і 3. Бічне ребро призми дорівнює 4 і утворює з площиною її основи кут 45° . Знайдіть довжину ребра куба, рівновеликого цій призмі.
73. На рис. 17 зображено розгортку поверхні многогранника, яка складається з двох квадратів і чотирьох однакових прямокутників. Довжини суміжних сторін прямокутників дорівнюють 4 і 9. Знайдіть площу повної поверхні цього многогранника.
74. Знайдіть об'єм многогранника за умовою попередньої задачі.

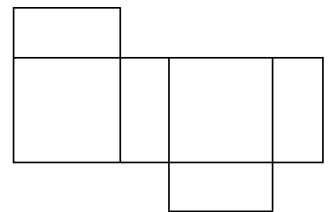


Рис. 17

75. Обчисліть об'єм піраміди, основою якої є ромб із діагоналями 5 і 12, а висота цієї піраміди дорівнює 14.
76. Знайдіть висоту піраміди, основою якої є прямокутний трикутник із катетами 3 і 8, а об'єм цієї піраміди дорівнює 72.
77. Об'єм правильного тетраедра дорівнює $18\sqrt{2}$. Знайдіть площу повної поверхні цього тетраедра.
78. Площа діагонального перерізу правильної чотирикутної піраміди, всі ребра якої однакові, дорівнює 9. Знайдіть об'єм цієї піраміди.
79. У піраміді $SABC$ грані SAB і SAC перпендикулярні до основи ABC , $AB = 13$, $BC = 14$, $AC = 15$, $SA = 9$. Знайдіть площу грані SBC .
80. У піраміді $MPQS$ (точка M — вершина піраміди) ребро MQ є висотою, $PQ = 15$, $QS = 13$, $PS = 4$. Знайдіть об'єм піраміди, якщо відстань від точки M до ребра PS дорівнює 37.
81. Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точки S , K , L , M і P є точками перетину діагоналей граней $ABCD$, $AA_1 B_1 B$, $BB_1 C_1 C$, $CC_1 D_1 D$, $DD_1 A_1 A$ відповідно. Знайдіть відношення об'єму піраміди $SKLMP$ до об'єму куба.
82. Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точки E , F , G і H є серединами ребер AB , BC , CD і DA відповідно. Знайдіть відношення об'єму піраміди $C_1 EFGH$ до об'єму куба.
83. У правильній чотирикутній піраміді площа діагонального перерізу дорівнює площі основи. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо сторона її основи дорівнює 2.
84. Площа бічної поверхні правильної трикутної піраміди дорівнює 240 см^2 , а її апофема дорівнює 10 см. Знайдіть сторону основи цієї піраміди (y см).
85. У правильній зрізаній чотирикутній піраміді діагоналі більшої та меншої основ дорівнюють 3 см і 1 см відповідно, а двогранні кути при меншій основі дорівнюють 120° . Знайдіть площу бічної поверхні цієї зрізаної піраміди ($y \text{ см}^2$).
86. У правильній зрізаній трикутній піраміді площі більшої та меншої основ дорівнюють $75\sqrt{3}$ і $12\sqrt{3}$ відповідно, а висота повної піраміди, з якої утворено зрізану, дорівнює $6\frac{2}{3}$. Знайдіть об'єм цієї зрізаної піраміди.

87. На рис. 18 зображено плоский квадрат $ABCD$. Точки K і M є серединами сторін AB і AD відповідно. Зігнувши цей квадрат по пунктирних лініях KC , CM і MK , утворили піраміду з вершиною в точці C . Знайдіть площу бічної поверхні утвореної піраміди, якщо сторона квадрата дорівнює 6.

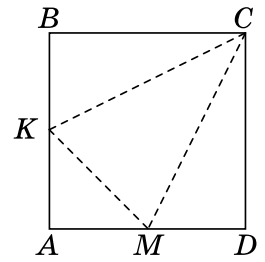


Рис. 18

88. Знайдіть об'єм піраміди за умовою попередньої задачі.
89. Деталь має форму прямокутного паралелепіпеда, у якому зроблено наскрізний отвір у формі меншого прямокутного паралелепіпеда (рис. 19). Знайдіть об'єм цієї деталі (у см^3), якщо всі розміри на рисунку подано у см.

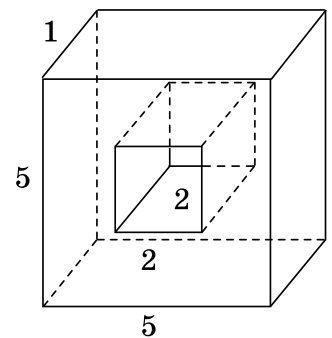


Рис. 19

90. Знайдіть площу повної поверхні деталі (у см^2) за умовою попередньої задачі.
91. Центри граней правильного тетраедра сполучили, отримавши новий тетраедр. У скільки разів площа повної поверхні нового тетраедра менша за площу повної поверхні початкового правильного тетраедра?
92. Сувенір має форму прозорого кришталевого октаедра, у який вміщено суцільний срібний куб так, що вершини куба є центрами граней октаедра. Знайдіть відношення об'єму кришталевої частини цього сувеніра до об'єму його срібної частини.

Завдання з повним розв'язанням

Завдання 93–100 розв'яжіть із повним обґрунтуванням, посилаючись на відповідні означення, твердження, формули. У разі потреби проілюструйте розв'язання таблицями, діаграмами, графіками тощо.

93. Сума ребер, що виходять з однієї вершини правильної трикутної призми, дорівнює 4. Знайдіть градусну міру кута між діагоналлю бічної грані призми та площиною її основи, при якій площа бічної поверхні цієї призми буде найбільшою.
94. Довжина діагоналі правильної чотирикутної призми дорівнює $\sqrt{3}$. При якій довжині висоти призми об'єм цієї призми буде найбільшим?

95. У правильній трикутній піраміді відношення площі бічної поверхні до площі основи дорівнює $\sqrt{3}$. Знайдіть градусну міру плоского кута при вершині цієї піраміди.
96. Через висоту правильної чотирикутної піраміди та її бічне ребро проведено площину. Площа утвореного перерізу в 5 разів менша за площу бічної поверхні піраміди. Побудуйте цей переріз. Знайдіть двогранний кут φ при основі піраміди.
97. Основа правильної чотирикутної призми — квадрат зі стороною a . Через сторону нижньої основи і середину одного з бічних ребер цієї призми, які не мають з цією стороною спільних точок, проведено переріз, що утворює з площиною нижньої основи кут α . Знайдіть:
- площу цього перерізу;
 - об'єм цієї призми.
98. Основа прямої призми — ромб із більшою діагоналлю d і гострим кутом α . Через меншу діагональ нижньої основи і вершину гострого кута верхньої основи призми проведено переріз, який утворює з площиною нижньої основи кут β . Знайдіть:
- площу цього перерізу;
 - об'єм цієї призми.
99. Основа піраміди — ромб зі стороною a і гострим кутом α . Усі двогранні кути при основі цієї піраміди дорівнюють γ . Знайдіть об'єм піраміди.
100. Основа піраміди — рівнобедрений трикутник з бічною стороною a і кутом при основі α . Бічна грань цієї піраміди, що містить основу рівнобедреного трикутника, перпендикулярна до площини цього трикутника, а дві інші бічні грані нахилені до тієї самої площини під кутом γ . Знайдіть об'єм піраміди.

8.3. Тіла обертання. Комбінації тіл

Найпростіші завдання з повним розв'язанням

Завдання 1–20 розв'яжіть УСНО.

- Яке геометричне тіло можна отримати внаслідок обертання плоского квадрата навколо його сторони? його діагоналі?
- Яке геометричне тіло можна отримати внаслідок обертання рівнобедреного прямокутного трикутника навколо його катета? його гіпотенузи?

3. Яким чином внаслідок обертання плоскої фігури навколо деякої прямої можна отримати сферу? кулю? півсферу? півкулю?
4. Визначте, чи є правильними такі твердження:
 - а) твірна циліндра завжди більша, ніж його висота;
 - б) твірна конуса завжди більша, ніж його висота;
 - в) висота конуса завжди більша за радіус його основи.
5. У скільки разів потрібно збільшити висоту циліндра, не змінюючи радіуса його основи, щоб об'єм цього циліндра збільшився у 2 рази? у 3 рази? у 4 рази?
6. У скільки разів потрібно збільшити радіус основи циліндра, не змінюючи його висоту, щоб об'єм цього циліндра збільшився у 2 рази? у 3 рази? у 4 рази?
7. У скільки разів збільшиться об'єм кулі, якщо її радіус збільшити у 2 рази? у 3 рази? у 4 рази?
8. Площа поверхні однієї кулі більша за площу поверхні іншої кулі в 9 разів. Знайдіть відношення:
 - а) радіусів цих куль;
 - б) об'ємів цих куль.
9. Циліндр і конус мають відповідно рівні між собою радіуси основи та висоти. Яке тіло має більший об'єм і в скільки разів?
10. Висоту циліндра збільшили у 2 рази, а радіус його основи збільшили в 3 рази. У скільки разів збільшилася площа бічної поверхні циліндра?
11. Висоту конуса і радіус його основи збільшили в 2 рази. У скільки разів збільшилася площа бічної поверхні конуса?
12. Геометричне тіло складається з усіх точок простору, які віддалені від даної точки O на відстань, не більшу за 5 см. Що являє собою це тіло?
13. Геометричне тіло складається з усіх точок простору, які віддалені від даної точки O на відстань, не меншу за 1 см і не більшу за 5 см. Що являє собою це тіло?
14. Площина σ і сфера з центром у точці O мають спільну точку M . Визначте, чи мають ця сфера і ця площина інші спільні точки, якщо градусна міра кута між площиною σ і прямою OM дорівнює 30° ; 90° .

15. На якій відстані від центра сфери радіуса 10 повинна знаходитися площина, щоб ця сфера і ця площина:
- не мали спільних точок;
 - мали одну спільну точку;
 - перетиналися по колу;
 - перетиналися по колу найбільшого можливого радіуса?
16. Дано дві кулі, причому радіус першої кулі $R_1 = 10$, а радіус другої кулі $R_2 = 6$. Установіть взаємне розташування цих двох куль, якщо відстань між їх центрами дорівнює 2 см; 20 см; 4 см; 16 см; 12 см.
17. Яку форму має тінь циліндра на площині його нижньої основи, якщо точкове джерело світла міститься на осі симетрії цього циліндра вище площини його верхньої основи?
18. Якою геометричною фігурою є переріз:
- циліндра площиною, яка паралельна його основи;
 - конуса площиною, яка паралельна його основи;
 - циліндра площиною, яка перпендикулярна до його основи;
 - конуса площиною, яка проходить через його вершину?
19. Шматок дроту завдовжки 50 см можна вважати циліндром. Як практично визначити об'єм цього шматка дроту?
20. Купа піску має форму конуса. Як практично визначити діаметр основи цієї купи піску?

Завдання з вибором однієї правильної відповіді

Проаналізуйте умови та вимоги завдань 21–50 та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

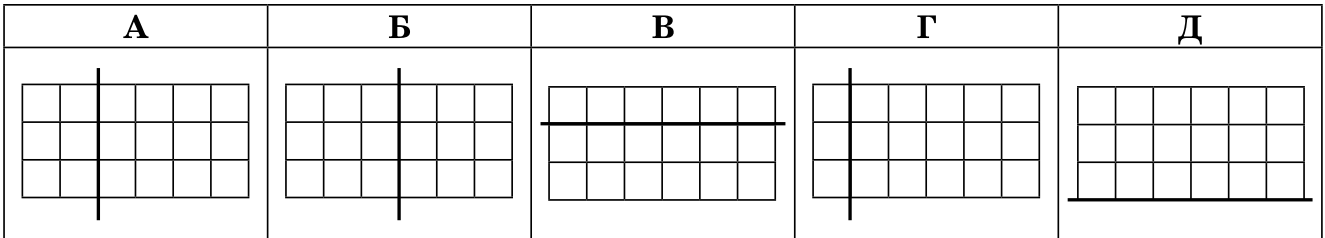
21. Які геометричні фігури НЕ МОЖНА отримати як перерізи циліндра?

А	Б	В	Г	Д
Трикутник	Чотирикутник	Круг	Еліпс	Усі наведені фігури можна отримати

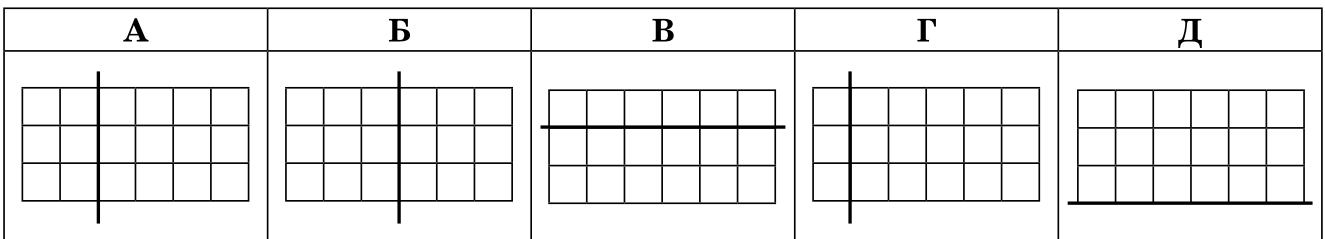
22. Які геометричні фігури НЕ МОЖНА отримати як перерізи конуса?

А	Б	В	Г	Д
Трикутник	Чотирикутник	Круг	Еліпс	Усі наведені фігури можна отримати

23. Прямокутники, зображені на рисунках, обертають навколо виділених осей. Укажіть рисунок, який відповідає тілу обертання з **НАЙМЕНШОЮ** площею бічної поверхні.



24. Прямокутники, зображені на рисунках, обертають навколо виділених осей. Укажіть рисунок, який відповідає тілу обертання з **НАЙБІЛЬШИМ** об'ємом.



25. Прямокутний трикутник, гіпотенуза якого дорівнює 6 см, а один із гострих кутів дорівнює 30° , обертається навколо більшого катета. Знайдіть радіус основи конуса, утвореного внаслідок цього обертання.

А	Б	В	Г	Д
$3\sqrt{2}$ см	3 см	$3\sqrt{3}$ см	6 см	12 см

26. Прямокутний трикутник, гіпотенуза якого дорівнює 6 см, а один із гострих кутів дорівнює 30° , обертається навколо більшого катета. Знайдіть висоту конуса, утвореного внаслідок цього обертання.

А	Б	В	Г	Д
$3\sqrt{2}$ см	3 см	$3\sqrt{3}$ см	6 см	12 см

27. Круг, площа якого дорівнює a , обертається навколо свого діаметра. Знайдіть площу сфери, яка обмежує кулю, утворену внаслідок цього обертання.

А	Б	В	Г	Д
a	$2\pi a$	$2a$	$4\pi a$	$4a$

28. Прямокутник, площа якого дорівнює b , обертається навколо однієї зі своїх сторін. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, утвореного внаслідок цього обертання.

А	Б	В	Г	Д
$2\pi b$	$2b$	πb	$4b$	$4\pi b$

29. Осьовим перерізом циліндра є прямокутник зі сторонами 6 і 10. Яке з наведених чисел **МОЖЕ** виражати довжину радіуса основи цього циліндра?

А	Б	В	Г	Д
10	8	7	6	5

30. Осьовим перерізом циліндра є прямокутник зі сторонами 6 і 10. Яке з наведених чисел **МОЖЕ** виражати довжину висоти цього циліндра?

А	Б	В	Г	Д
3	5	6	8	9

31. Уявіть, що у вас є 5 видів фужерів: А, Б, В, Г, Д, кожний із яких має форму циліндра з радіусом основи R та висотою h . Укажіть вид фужерів, які потрібно поставити на святковий стіл, якщо ви прагнете, наповнивши їх ущерть, налити в них **ЯКНАЙМЕНШЕ** рідини.

А	Б	В	Г	Д
$R=3, h=2$	$R=2, h=4$	$R=4, h=1$	$R=2, h=3$	$R=1, h=8$

32. Уявіть, що у вас є 5 видів фужерів: А, Б, В, Г, Д, кожний із яких має форму конуса з радіусом основи R та висотою h . Укажіть вид фужерів, які потрібно поставити на святковий стіл, якщо ви прагнете, наповнивши їх ущерть, налити в них **ЯКНАЙБІЛЬШЕ** рідини.

А	Б	В	Г	Д
$R=3, h=2$	$R=2, h=4$	$R=4, h=1$	$R=2, h=3$	$R=1, h=8$

33. Виразіть об'єм циліндра V через радіус його основи R , якщо висота цього циліндра вдвічі більша за радіус його основи.

А	Б	В	Г	Д
$V = \frac{2}{3}\pi R^2$	$V = 2\pi R^2$	$V = \pi R^3$	$V = 2\pi R^3$	$V = \frac{2}{3}\pi R^3$

34. Виразить об'єм конуса V через його висоту H , якщо радіус основи цього конуса вдвічі більший за його висоту.

А	Б	В	Г	Д
$V = \frac{4}{3}\pi H^3$	$V = \frac{2}{3}\pi H^3$	$V = \frac{8}{3}\pi H^3$	$V = 2\pi H^3$	$V = 4\pi H^3$

35. З наповненої до країв конічної посудини (висота конуса дорівнює радіусу його основи) рідину перелили в циліндричну посудину вдвічі більшої висоти, але вдвічі меншого радіуса основи, ніж у конуса. Яка частина об'єму циліндричної посудини буде заповнена?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$

36. З наповненої до країв циліндричної посудини (висота циліндра дорівнює радіусу його основи) рідину перелили в конічну посудину вдвічі більшої висоти і вдвічі більшого радіуса основи, ніж у циліндра. Яка частина об'єму конічної посудини буде заповнена?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$

37. Діаметр першого кавуна вдвічі більший від діаметра другого. Визначте, у скільки разів перший кавун важчий за другий, якщо відомо, що обидва кавуни мають форму кулі та однакову густину?

А	Б	В	Г	Д
У 2 рази	У 3 рази	У 4 рази	У 8 разів	У 16 разів

38. Об'єми двох куль відносяться як 8:27. Як відносяться площі їх поверхонь?

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{8} : \sqrt{27}$	64:729	4:9	2:3	$\sqrt[3]{4} : \sqrt[3]{9}$

39. Точки A і B належать сфері радіуса 3 з центром у точці O . Знайдіть довжину відрізка AB , якщо трикутник OAB є прямокутним.

А	Б	В	Г	Д
3	$3\sqrt{3}$	9	$3\sqrt{2}$	6

40. Точки A і B належать сфері діаметра 6 із центром у точці O . Знайдіть довжину відрізка AB , якщо трикутник OAB є правильним.

А	Б	В	Г	Д
3	$3\sqrt{3}$	9	$3\sqrt{2}$	6

41. Свинцеву кулю радіуса 4 см переплавили в маленькі кульки однакового розміру, радіус кожної з яких дорівнює 1 см. Скільки маленьких кульок отримали? Примітка: втратами свинцю при переплавці знехтувати.

А	Б	В	Г	Д
4	8	16	64	128

42. Три свинцеві кульки, радіуси яких дорівнюють 3 см, 4 см і 5 см, сплавляють разом і отримали нову велику кулю. Знайдіть радіус великої кулі. Примітка: втратами свинцю при переплавці знехтувати.

А	Б	В	Г	Д
5 см	6 см	8 см	10 см	12 см

43. Дві сфери, діаметри яких дорівнюють 4 см і 16 см, мають зовнішній дотик. Знайдіть відстань між центрами цих сфер.

А	Б	В	Г	Д
6 см	10 см	12 см	16 см	20 см

44. Дві сфери, діаметри яких дорівнюють 8 см і 12 см, мають внутрішній дотик. Знайдіть відстань між центрами цих сфер.

А	Б	В	Г	Д
2 см	4 см	6 см	8 см	20 см

45. Укажіть геометричне тіло, в яке завжди можна вписати кулю.

А	Б	В	Г	Д
Тетраедр	Циліндр	Призма	Паралелепіпед	Зрізаний конус

46. Навколо якого з наведених геометричних тіл НЕ МОЖНА описати кулю?

А	Б	В	Г	Д
Навколо правильного тетраедра	Навколо прямокутного паралелепіпеда	Навколо конуса	Навколо циліндра	Навколо всіх геометричних тіл А–Г можна описати кулю

47. У циліндр вписано правильну трикутну призму, а в призму — інший циліндр. Знайдіть відношення об'єму меншого циліндра до об'єму більшого циліндра.

А	Б	В	Г	Д
1:8	1:4	1:2	3:4	3:8

48. У правильну чотирикутну піраміду вписано конус, а в конус — іншу правильну чотирикутну піраміду. Знайдіть відношення об'єму меншої піраміди до об'єму більшої піраміди.

А	Б	В	Г	Д
1:8	1:4	1:2	3:4	3:8

49. У куб вписано кулю. Знайдіть відношення об'єму кулі до об'єму куба.

А	Б	В	Г	Д
$\pi:6$	1:4	$\pi:8$	1:8	$\pi:4$

50. Навколо куба описано сферу. Знайдіть відношення площі поверхні куба до площі сфери.

А	Б	В	Г	Д
1:2	$4:\pi$	$3:\pi$	$2:\pi$	3:4

У завданнях 51–54 сформульовано проблему (питання), яку потрібно розв'язати (отримати однозначну відповідь на питання), використовуючи для цього додаткові дані — твердження (1) і (2). Визначте, чи достатньо цих даних для розв'язання проблеми, і оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь*.

51. Знайдіть градусні міри кутів трикутника, який є осевим перерізом конуса.

(1) Градусна міра одного з кутів трикутника дорівнює 90° .

(2) Градусна міра одного з кутів трикутника дорівнює 45° .

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

* Саму проблему розв'язувати не обов'язково.

52. Знайдіть сторони трикутника, який є осьовим перерізом конуса.

(1) Радіус основи конуса дорівнює 5 см.

(2) Одна зі сторін трикутника дорівнює 10 см.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

53. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

(1) Периметр осьового перерізу цього циліндра дорівнює 20.

(2) Площа осьового перерізу цього циліндра дорівнює 24.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

54. Знайдіть об'єм циліндра.

(1) У цей циліндр можна вписати кулю, радіус якої дорівнює 4 см.

(2) Навколо цього циліндра можна описати кулю, радіус якої дорівнює $4\sqrt{2}$ см.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

У завданнях 55–56 порівняйте величини X і Y та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

55. Паралельно осі циліндра на відстані 1 см і 2 см від неї проведено два перерізи, площі яких дорівнюють a і b відповідно.

Величина X : значення параметра a .

Величина Y : значення параметра b .

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

56. Два перерізи циліндра, перпендикулярні до його осі, мають площі a і b , а площини цих перерізів віддалені від площини нижньої основи циліндра на 1 см і на 2 см відповідно.

Величина X : значення параметра a .

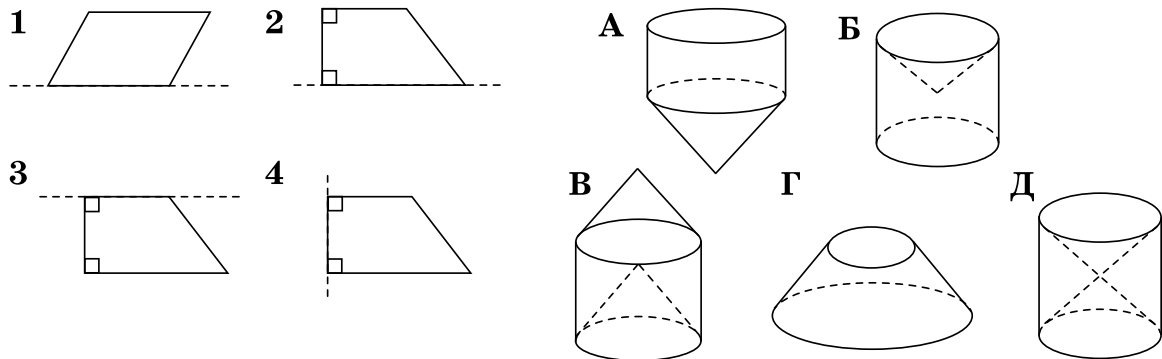
Величина Y : значення параметра b .

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

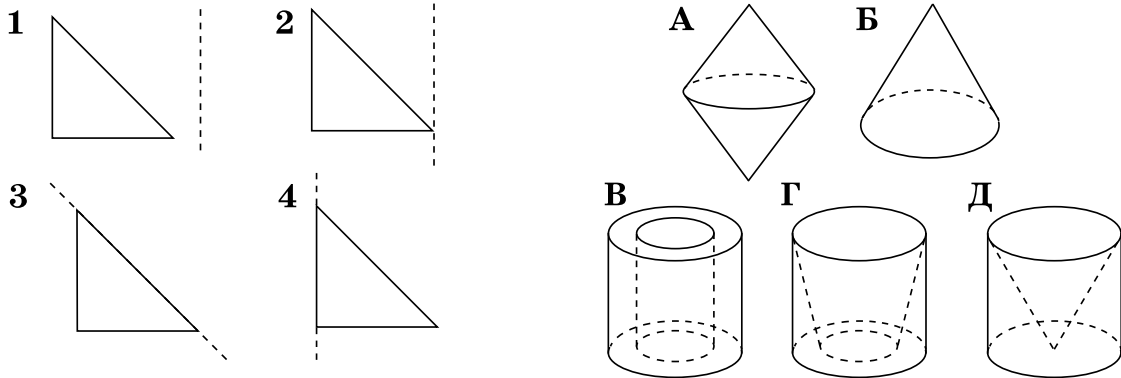
Завдання на встановлення відповідності

У завданнях 57–60 до кожного рисунка, позначеного цифрою, доберіть один відповідник, позначений літерою.

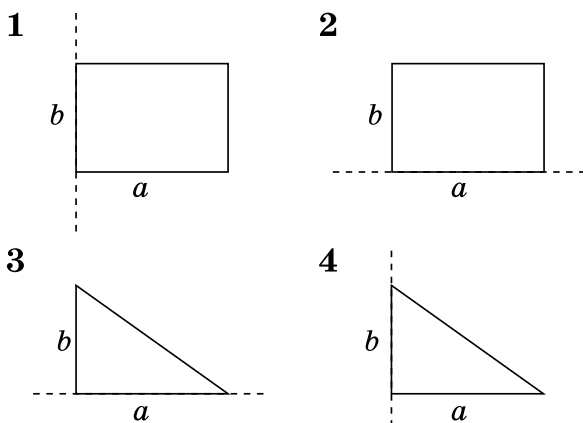
57. Установіть відповідність між плоскими фігурами (1–4) і тілами (А–Д), які утворені внаслідок обертання цих плоских фігур навколо прямих, що зображені пунктиром.



58. Установіть відповідність між плоскими фігурами (1–4) і тілами (А–Д), які утворені внаслідок обертання цих плоских фігур навколо прямих, що зображені пунктиром.



59. Установіть відповідність між плоскими фігурами (1–4) і формулами (А–Д), які виражають об'єми тіл, утворених внаслідок обертання цих плоских фігур навколо прямих, що зображені пунктиром.



А $V = \frac{1}{3}\pi a^2 b$

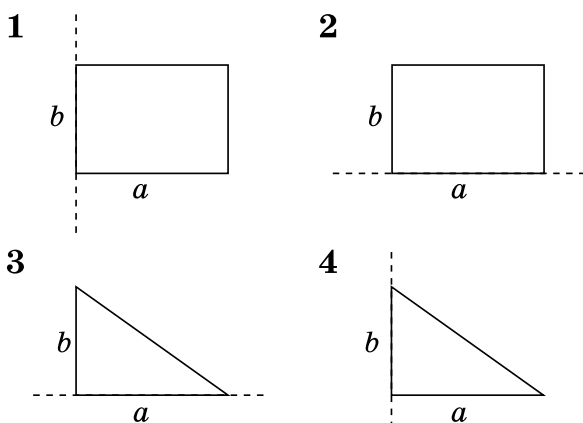
Б $V = \frac{1}{3}\pi a b^2$

В $V = \frac{4}{3}\pi a^2 b$

Г $V = \pi a b^2$

Д $V = \pi a^2 b$

60. Установіть відповідність між плоскими фігурами (1–4) і формулами (А–Д), які виражають площі повних поверхонь тіл, утворених внаслідок обертання цих плоских фігур навколо прямих, що зображені пунктиром.



А $S = \frac{2}{3}\pi a(a+b)$

Б $S = 2\pi b(a+b)$

В $S = 2\pi a(a+b)$

Г $S = \pi a\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)$

Д $S = \pi b\left(b + \sqrt{a^2 + b^2}\right)$

Завдання на встановлення послідовності

У завданнях 61–62 виберіть тільки необхідні для розв'язання поставленої задачі дії і розмістіть їх у правильній послідовності. У відповідь запишіть отриману послідовність літер.

61. На рис. 20 зображено прямокутний трикутник ABC , у якому $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, точки K і M є серединами сторін AB і BC відповідно. Як знайти об'єм V геометричного тіла, утвореного внаслідок обертання трикутника ABC навколо прямої KM ?

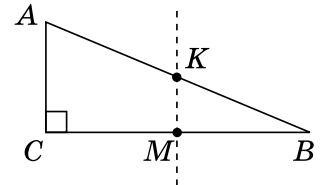


Рис. 20

- А Обчислити об'єм V за формулою $V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{a}{2} \right)^2 \frac{b}{2}$.
- Б Обчислити об'єм V_1 за формулою $V_1 = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{a}{2} \right)^2 \frac{b}{2}$.
- В Обчислити об'єм V_1 за формулою $V_1 = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{b}{2} \right)^2 \frac{a}{2}$.
- Г Обчислити об'єм V_2 за формулою $V_2 = \pi \left(\frac{a}{2} \right)^2 b$.
- Д Обчислити об'єм V_2 за формулою $V_2 = \pi \left(\frac{b}{2} \right)^2 a$.
- Е Обчислити об'єм V за формулою $V = V_2 + V_1$.
- Є Обчислити об'єм V за формулою $V = V_2 - V_1$.

62. На рис. 21 зображено прямокутну трапецію $KLMP$, у якій $KL = a$, $LM = b$, $MP = c$, $PK = d$. Як знайти площу повної поверхні S геометричного тіла, утвореного внаслідок обертання трапеції $KLMP$ навколо прямої KP ?

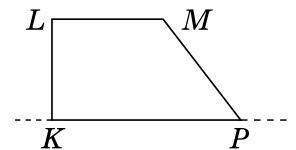


Рис. 21

- А Обчислити площу S за формулою $S = 2\pi a^2 + 2\pi ad$.
- Б Обчислити площу S_1 за формулою $S_1 = 2\pi ad$.
- В Обчислити площу S_1 за формулою $S_1 = 2\pi ab$.
- Г Обчислити площу S_2 за формулою $S_2 = \pi ac$.
- Д Обчислити площу S_2 за формулою $S_2 = \pi c(d - b)$.
- Е Обчислити площу S за формулою $S = a^2 + S_1 + S_2$. π
- Є Обчислити площу S за формулою $S = a^2 + S_1 - S_2$. π

Завдання з короткою відповіддю

Розв'яжіть завдання 63–92 і запишіть відповідь **ОДНИМ ЧИСЛОМ**.

63. Знайдіть площу (у см^2) осьового перерізу тіла, утвореного внаслідок обертання прямокутного трикутника, катет якого дорівнює 6 см, а гіпотенуза — 10 см, навколо іншого катета.
64. Знайдіть площу (у см^2) осьового перерізу тіла, утвореного внаслідок обертання прямокутної трапеції, основи якої дорівнюють 4 см і 10 см, а більша бічна сторона — 10 см, навколо меншої бічної сторони.
65. Трикутник зі сторонами 30, 40 і 50 обертається навколо більшої сторони. Обчисліть площу утвореної поверхні обертання.
66. За умовою попередньої задачі знайдіть об'єм утвореного тіла обертання.
67. Рівнобічну трапецію, основи якої дорівнюють 8 і 18, обертають навколо більшої основи. Знайдіть площу поверхні тіла обертання, якщо відомо, що в цю трапецію можна вписати коло.
68. За умовою попередньої задачі знайдіть об'єм тіла обертання.
69. У частково заповнену водою циліндричну мензурку, внутрішній діаметр якої дорівнює 8 см, повністю занурили металеву деталь. При цьому рівень води в мензурці піднявся на 5 см. Знайдіть об'єм (у см^3) деталі, яку занурили в мензурку.
70. У частково заповнену водою циліндричну посудину, внутрішній діаметр якої дорівнює 8 см, повністю занурили металеву кульку радіуса 3 см. На скільки сантиметрів піднявся рівень води в посудині, якщо під час занурення вода з неї не вилілася?
71. Розгортка бічної поверхні конуса є сектором круга радіуса 13, а радіус основи цього конуса дорівнює 5. Знайдіть об'єм конуса.
72. Розгортка бічної поверхні циліндра є квадратом, сторона якого дорівнює 6. Знайдіть об'єм цього циліндра.
73. Бічну поверхню паперового конуса розгорнуто в сектор круга радіуса 6. Знайдіть градусну міру центрального кута цього сектора, якщо радіус основи конуса дорівнює 5.
74. З паперу вирізано круговий сектор радіуса 18 з центральним кутом 240° . З цього сектора без перекриттів згорнуто конус. Знайдіть радіус основи цього конуса.

75. Знайдіть висоту конуса (u см), якщо радіус його основи дорівнює 15 см, а центр основи віддалений від твірної на 12 см.
76. Знайдіть довжину твірної конуса (u см), якщо радіус його основи дорівнює 5 см, а центр основи віддалений від твірної на 3 см.
77. Площа основи циліндра відноситься до площі його осьового перерізу як $\pi:15$. Знайдіть тангенс кута між діагоналлю осьового перерізу цього циліндра і площиною його основи.
78. Косинус кута між діагоналлю осьового перерізу циліндра і площиною його основи дорівнює $\frac{4}{\sqrt{17}}$. Знайдіть висоту цього циліндра, якщо радіус його основи дорівнює 10.
79. Паралельно осі циліндра проведено переріз, який відтинає від кола основи циліндра дугу 120° . Площа перерізу дорівнює $4\sqrt{3}$, діагональ цього перерізу утворює з твірною циліндра кут, градусна міра якого дорівнює 30° . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.
80. Через твірну циліндра проведено два взаємно перпендикулярні перерізи, площі яких дорівнюють 45 дм^2 і 200 дм^2 . Знайдіть площу осьового перерізу цього циліндра.
81. Переріз конуса проходить через його вершину S і твірні SA та SB . Точка O — центр основи конуса. Відомо, що трикутник AOB прямокутний, а трикутник ASB правильний. Знайдіть градусну міру кута нахилу твірних цього конуса до площини його основи.
82. Переріз конуса, який проходить через вершину цього конуса та дві його твірні, є правильним трикутником. Площина перерізу нахилена до площини основи конуса під кутом 60° . Знайдіть синус кута нахилу твірних цього конуса до площини його основи.
83. Переріз кулі площиною, яка віддалена від її центра на 5 см, має площу $36\pi \text{ см}^2$. Знайдіть площу поверхні цієї кулі ($u \text{ см}^2$).
84. Сторони квадрата завдовжки 6 см дотикаються до сфери, радіус якої дорівнює 5. Знайдіть відстань (u см) від центра цієї сфери до площини цього квадрата.
85. Дано дві концентричні кулі, радіуси яких $r=5$ і $R=13$. До меншої кулі проведено дотичну площину. Знайдіть площу перерізу більшої кулі цією площиною.

86. Дві кулі, радіуси яких $r=12$ і $R=15$, дотикаються зовні. До меншої кулі проведено дотичну площину, яка паралельна прямій, що сполучає центри куль. Знайдіть площу перерізу більшої кулі цією площиною.
87. Набір із трьох тенісних м'ячів запаковано в циліндричний чохол найменшого об'єму. Яку частину цього чохла займають м'ячі?
88. Сувенір має форму прозорої кварцової кулі з вписаним у неї металевим конусом. Яку частину кулі займає конус, якщо його осьовий переріз — правильний трикутник?
89. У правильну чотирикутну призму з висотою $h=1$ і стороною основи $a=4$ вписано циліндр. У цей циліндр вписано правильну чотирикутну призму, в яку знову вписано циліндр, і т. д. Знайдіть суму об'ємів усіх призм, які при цьому утворилися.
90. У конус із висотою $h=2$ і радіусом основи $R=3\sqrt{2}$ вписано правильну чотирикутну піраміду. У цю піраміду вписано новий конус, у який знову вписано правильну чотирикутну піраміду, і т. д. Знайдіть суму об'ємів усіх пірамід, які при цьому утворилися.
91. У кулю радіуса $R=2\sqrt{3}$ вписано правильну чотирикутну призму. При якій довжині висоти призми її об'єм буде НАЙБІЛЬШИМ?
92. У кулю радіуса $R=12$ вписано конус. При якій довжині висоти конуса його об'єм буде НАЙБІЛЬШИМ?

Завдання з повним розв'язанням

Завдання 93–100 розв'яжіть із повним обґрунтуванням, посилаючись на відповідні означення, твердження, формули. У разі потреби проілюструйте розв'язання таблицями, діаграмами, графіками тощо.

93. У нижній основі циліндра проведено хорду, яку видно з центра нижньої основи під кутом 90° , а з центра верхньої основи — під кутом 60° . Знайдіть площу бічної поверхні цього циліндра, якщо радіус його основи дорівнює R .
94. Хорду, проведену в нижній основі циліндра, видно з центра цієї основи під кутом α . Відрізок, що сполучає центр верхньої основи із серединою вказаної хорди, нахилений до площини нижньої основи під кутом β . Знайдіть об'єм циліндра, якщо його твірна дорівнює l .

95. Через дві твірні конуса, кут між якими дорівнює α , проведено переріз. Знайдіть площу цього перерізу, якщо радіус основи конуса r , а твірна конуса утворює з його основою кут β .
96. Площі основ зрізаного конуса дорівнюють 1 і 4. Через середину висоти зрізаного конуса проведено площину, паралельну основам. Знайдіть:
а) площу утвореного перерізу;
б) відношення об'ємів зрізаних конусів, на які поділив цей переріз початковий зрізаний конус.
97. Висота правильної трикутної піраміди дорівнює H , а бічні грані цієї піраміди нахилені до площини її основи під кутом γ . Знайдіть об'єм кулі, вписаної в цю піраміду.
98. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює a й утворює з висотою цієї піраміди кут φ . Знайдіть площу сфери, описаної навколо цієї піраміди.
99. Сфера, радіус якої дорівнює 16, проходить через вершини A і S правильної чотирикутної піраміди $SABCD$ (точка S — вершина піраміди, квадрат $ABCD$ — її основа) і ділить ребро SC у відношенні 1:7, рахуючи від вершини S . Знайдіть висоту піраміди, якщо її бічне ребро дорівнює 32.
100. Висота і бічне ребро правильної чотирикутної піраміди $SABCD$ з основою $ABCD$ дорівнюють 27 і 36 відповідно. Сфера радіуса 18 проходить через вершини A і S піраміди, а також через точку M , яка належить її бічному ребру SC . Знайдіть довжину відрізка MC .

Розділ 9. КООРДИНАТИ І ВЕКТОРИ**9.1. Системи координат на площині та в просторі****Найпростіші завдання з повним розв'язанням**

Завдання 1–20 розв'яжіть УСНО.

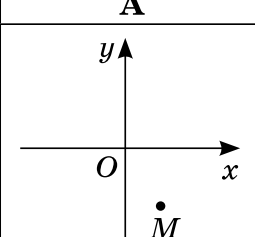
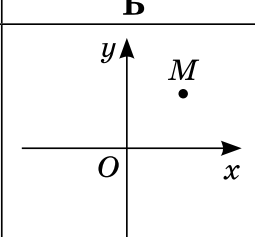
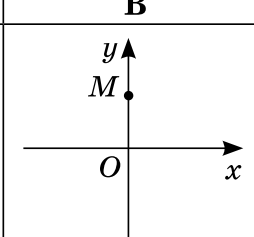
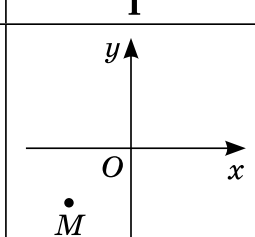
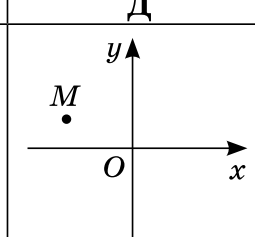
1. На якій із координатних осей або в якій координатній чверті лежать такі точки: $A(-3;0)$, $B(0;0)$, $C(0;5)$, $D(1;-2)$, $K(-3;-5)$, $L(-2;2)$, $M(4;6)$?
2. На якій із координатних осей або в якій із координатних площин лежать такі точки: $A(2;-1;0)$, $B(-1;0;0)$, $C(0;5;1)$, $D(0;5;0)$, $K(-3;0;-4)$, $L(0;0;4)$?
3. Знайдіть відстань від точки $M(3;-4)$ до осі абсцис; до осі ординат; до початку координат.
4. Знайдіть відстань від точки $S(2;-3;6)$ до площини xOy ; до площини xOz ; до площини yOz ; до початку координат.
5. Визначте, чи лежать на одній прямій такі три точки:
 - а) $A(1;0)$, $B(1;1)$, $C(1;2)$;
 - б) $O(0;0)$, $K(1;0)$, $M(0;1)$.
6. Які з наведених точок належать прямій $x = -2$: $A(3;-2)$, $B(2;2)$, $C(-2;1)$?
7. Які з наведених точок належать прямій $y = 2$: $P(1;1)$, $R(1;2)$, $S(2;1)$?
8. Які з наведених точок належать прямій $x + y = 1$: $A(0;1)$, $B(1;1)$, $C(-99;100)$?
9. Знайдіть координати середини відрізка AB , якщо:
 - а) $A(1;2)$, $B(3;-5)$;
 - б) $A(0;2;-1)$, $B(-3;0;6)$.
10. Знайдіть довжину відрізка KL , якщо:
 - а) $K(0;5)$, $L(0;1)$;
 - б) $K(-2;0)$, $L(3;0)$;
 - в) $K(1;3)$, $L(1;8)$.

11. Знайдіть довжину відрізка PS , якщо:
- $P(0; 2; 0)$, $S(0; -3; 0)$;
 - $P(1; 2; 3)$, $S(-4; 2; 3)$.
12. Знайдіть координати точки перетину прямої $x - 2y = 6$ з віссю абсцис; з віссю ординат.
13. Укажіть, які з наведених прямих є паралельними прямій $y = 3x$ чи перпендикулярними до цієї прямої:
- $y = x + 3$;
 - $y = 3x - 1$;
 - $y = \frac{1}{3}x$;
 - $y = -3x$;
 - $y = -\frac{1}{3}x$;
 - $y = 3 - \frac{1}{3}x$.
14. Коло задано рівнянням $x^2 + y^2 = 4$. Укажіть, які з точок: $A(0; -2)$, $B(2; 2)$, $C(1; -1)$, $D(\sqrt{3}; 1)$ — лежать на колі; в крузі, обмеженому цим колом; зовні круга, обмеженого цим колом.
15. Сфера задана рівнянням $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Укажіть, які з точок: $A(0; -3; 0)$, $B(1; 1; 2)$, $C(1; 3; 0)$, $D(-2; 2; -1)$, $K(-1; 1; -1)$ — лежать на сфері; в кулі, яку обмежує ця сфера; зовні кулі, яку обмежує ця сфера.
16. Знайдіть координати центра і радіус кола, заданого рівнянням $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 10$.
17. Знайдіть координати центра і радіус сфери, заданої рівнянням $(x + 3)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 5$.
18. Дано точку $A(2; -5)$. Знайдіть координати образу цієї точки при симетрії відносно осі абсцис; осі ординат; початку координат.
19. Дано точку $S(3; -4; -1)$. Знайдіть координати проекції цієї точки на всі координатні площини.
20. Дано точку $B(3; -1; 2)$. Знайдіть координати образу цієї точки при симетрії відносно всіх координатних площин; усіх координатних осей; початку координат.

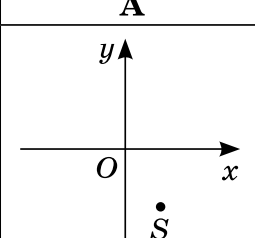
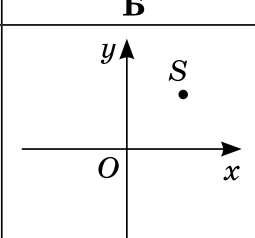
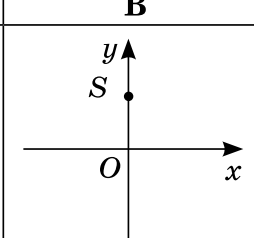
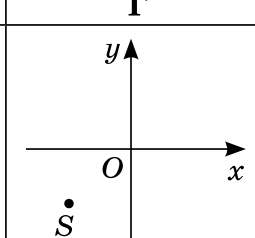
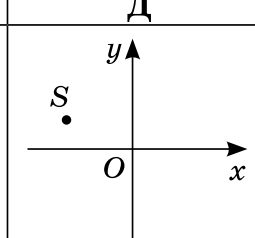
Завдання з вибором однієї правильної відповіді

Проаналізуйте умови та вимоги завдань 21–50 та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

21. Дано точку $M(a; b)$, причому $a < 0$, $b > 0$. На якому з наведених рисунків зображено цю точку?

А	Б	В	Г	Д
				

22. Дано точку $S(-c; d)$, причому $c < 0$, $d > 0$. На якому з наведених рисунків зображено цю точку?

А	Б	В	Г	Д
				

23. У якій координатній чверті лежить точка C , яка є серединою відрізка AB , якщо $A(2; -4)$, $B(-6; -2)$?

А	Б	В	Г	Д
Визначити неможливо, оскільки точка лежить на одній із координатних осей	У першій	У другій	У третій	У четвертій

24. У якій координатній чверті лежить точка M , яка є серединою відрізка KL , якщо $K(-3; 7)$, $L(3; -8)$?

А	Б	В	Г	Д
Визначити неможливо, оскільки точка лежить на одній із координатних осей	У першій	У другій	У третій	У четвертій

25. Точка M є серединою відрізка PS . Знайдіть координати точки P , якщо $M(-1; 3; 2)$, $S(2; -3; 0)$.

А	Б	В	Г	Д
$P(0; 3; 4)$	$P(-4; 9; 4)$	$P(-3; 6; 2)$	$P(4; -9; -4)$	$P(0; -3; -4)$

26. Знайдіть координати точки, симетричної точці $A(1; 2; 3)$ відносно точки $B(3; 2; 1)$.

А	Б	В	Г	Д
$(1; 1; 1)$	$(1; 2; 1)$	$(2; 0; -2)$	$(5; 2; -1)$	$(-2; 0; 2)$

27. Задано точки $A(-5; -1)$, $B(-1; -1)$ і $C(a; 3)$. Знайдіть площу трикутника ABC .

А	Б	В	Г	Д
Відповідь залежить від значення параметра a	16	6	8	10

28. Задано точки $A(-1; 1)$, $B(-1; 3)$ і $C(5; b)$. Знайдіть площу трикутника ABC .

А	Б	В	Г	Д
Відповідь залежить від значення параметра b	15	7,5	6	12

29. Відстань між точками $K(x_1; y_1)$ і $L(x_2; y_2)$ дорівнює 10. Укажіть множину всіх можливих значень виразу $|x_1 - x_2|$.

А	Б	В	Г	Д
$[0; +\infty)$	$[0; 10]$	$[0; 5]$	$[5; 10]$	$[10; +\infty)$

30. Відстань між точками $K(x_1; y_1)$ і $L(x_2; y_2)$ дорівнює 10. Укажіть множину всіх можливих значень виразу $y_1 + y_2$.

А	Б	В	Г	Д
$[0; 10]$	$[-20; 20]$	$[0; +\infty)$	$[-10; 10]$	$(-\infty; +\infty)$

31. Укажіть точку, через яку НЕ МОЖЕ пройти пряма $y = kx$ при $k > 0$.

А	Б	В	Г	Д
$A(2; 3)$	$B(-2; -3)$	$C(1; 5)$	$D(-2; 3)$	$E(-5; -1)$

32. Укажіть точку, через яку МОЖЕ пройти пряма $y = kx$ при $k < 0$.

А	Б	В	Г	Д
$K(5; -1)$	$L(0; 3)$	$M(-1; -5)$	$P(1; 5)$	$S(3; 0)$

33. Закінчіть речення так, щоб утворилося правильне твердження: «Якщо пряма $Ax + By + C = 0$ паралельна осі ординат, то...».

А	Б	В	Г	Д
$A = 0$	$A = B$	$B = 0$	$A = C$	$C = 0$

34. Закінчіть речення так, щоб утворилося правильне твердження: «Якщо пряма $Ax + By + C = 0$ проходить через початок координат, то...».

А	Б	В	Г	Д
$A = 0$	$A = B$	$B = 0$	$A = C$	$C = 0$

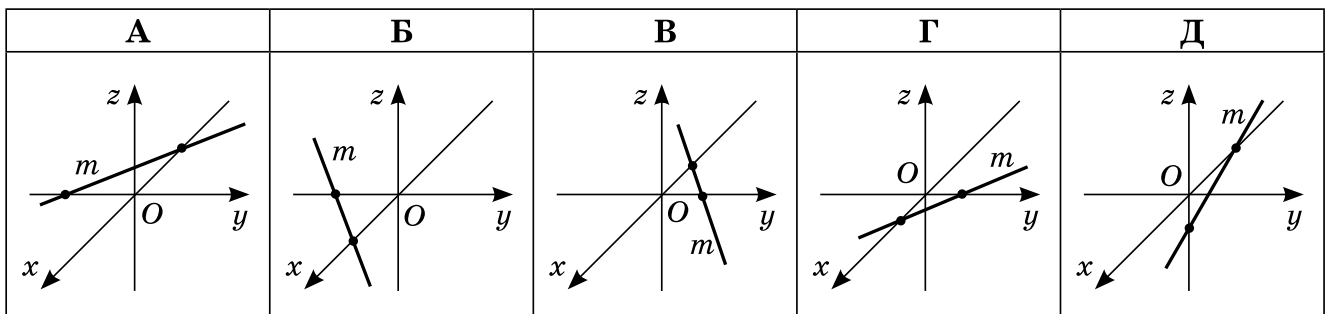
35. Закінчіть речення так, щоб утворилося правильне твердження: «Якщо коло $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ дотикається до осі абсцис, то...».

А	Б	В	Г	Д
$R^2 = a^2 - b^2 $	$R^2 = b^2$	$R^2 = a^2 + b^2$	$R^2 = a^2$	$R^2 = (a - b)^2$

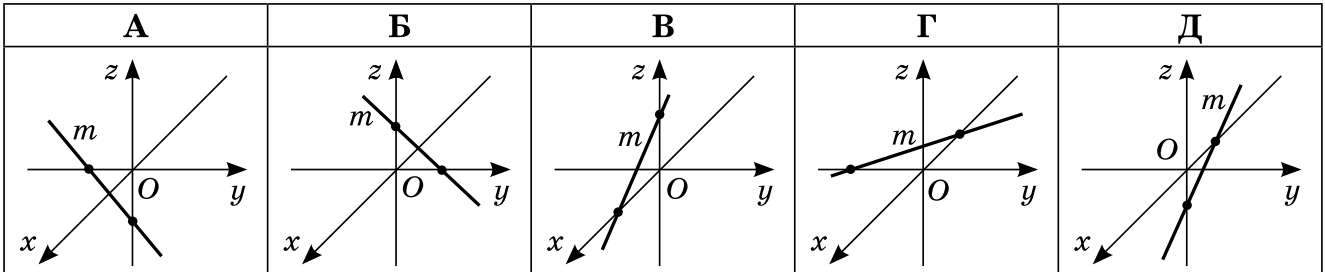
36. Закінчіть речення так, щоб утворилося правильне твердження: «Якщо коло $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ проходить через початок координат, то...».

А	Б	В	Г	Д
$R^2 = a^2 - b^2 $	$R^2 = b^2$	$R^2 = a^2 + b^2$	$R^2 = a^2$	$R^2 = (a - b)^2$

37. Укажіть рисунок, на якому зображено пряму m , що належить площині $y = 0$.



38. Укажіть рисунок, на якому зображено пряму m , що належить площині $z = 0$.



39. Пряма AB паралельна площині xOy . Якими серед запропонованих **МОЖУТЬ** бути координати точки B , якщо $A(5; 6; 7)$?

А	Б	В	Г	Д
$B(6; 5; 7)$	$B(7; 5; 6)$	$B(7; 6; 5)$	$B(5; 7; 6)$	$B(6; 7; 5)$

40. Пряма AB перпендикулярна до площини xOy . Якими серед запропонованих **МОЖУТЬ** бути координати точки B , якщо $A(5; 6; 7)$?

А	Б	В	Г	Д
$B(0; 6; 7)$	$B(0; 0; 7)$	$B(5; 6; 0)$	$B(5; 0; 0)$	$B(5; 0; 7)$

41. Центр сфери, діаметр якої дорівнює $\sqrt{40}$, знаходиться у точці $O(0; 0; 0)$. Укажіть точку, яка лежить на цій сфері.

А	Б	В	Г	Д
$A(20; -10; 0)$	$B(0; 0; 10)$	$C(-1; 0; 3)$	$D(6; 2; 0)$	$E(\sqrt{10}; \sqrt{10}; 0)$

42. Центр сфери, діаметр якої дорівнює $\sqrt{52}$, знаходиться у точці $O(0; 0; 0)$. Укажіть точку, яка лежить на цій сфері.

А	Б	В	Г	Д
$A(0; -2; 3)$	$B(60; 0; -8)$	$C(7; \sqrt{3}; 0)$	$D(13; 0; 0)$	$E(\sqrt{13}; \sqrt{13}; 0)$

43. Точку $A(-4; 2)$ спочатку симетрично відобразили відносно початку координат, а потім одержану точку спроектували на вісь абсцис. Знайдіть координати проекції.

А	Б	В	Г	Д
$(2; 0)$	$(0; -4)$	$(4; 0)$	$(0; 2)$	$(-2; 0)$

44. Точку $A(-2; 3)$ спочатку симетрично відобразили відносно осі абсцис, а потім одержану точку спроектували на вісь ординат. Знайдіть координати проєкції.

А	Б	В	Г	Д
$(0; 2)$	$(3; 0)$	$(0; -2)$	$(-2; 0)$	$(0; -3)$

45. Точку $M(-2; 1; -3)$ спочатку спроектували на площину yOz і отримали точку M_1 . Потім точку M_1 симетрично відобразили відносно початку координат і отримали точку M_2 . Знайдіть координати точки M_2 .

А	Б	В	Г	Д
$(0; -1; 3)$	$(0; -3; 1)$	$(2; -1; 3)$	$(0; -1; -3)$	$(0; 1; 3)$

46. Точку $S(4; -2; 1)$ спочатку симетрично відобразили відносно площини xOy і отримали точку S_1 . Потім точку S_1 спроектували на площину xOz і отримали точку S_2 . Знайдіть координати точки S_2 .

А	Б	В	Г	Д
$(-4; 0; 1)$	$(4; 0; -1)$	$(-4; 2; -1)$	$(4; 0; 1)$	$(-4; 0; -1)$

47. При паралельному перенесенні початок координат перейшов у точку $O_1(2; -2)$. У яку з наведених точок при цьому паралельному перенесенні перейшла точка $A(-3; -7)$?

А	Б	В	Г	Д
$A_1(-5; -5)$	$A_2(-6; 14)$	$A_3(-1; -9)$	$A_4(-1,5; 3,5)$	$A_5(-5; -9)$

48. У яку точку при паралельному перенесенні переходить точка $B(-4; -4; -4)$, якщо при цьому паралельному перенесенні точка $A(-4; -6; 2)$ переходить у точку $A_1(2; 3; -1)$?

А	Б	В	Г	Д
$B_1(-6; -7; -3)$	$B_2(-2; -1; -5)$	$B_3(2; 2; 2)$	$B_4(2; 5; -7)$	$B_5(4; 4; 4)$

49. При гомотетії відносно початку координат точка $M(2; 3)$ перейшла у точку $M_1(4; 6)$. У яку з наведених точок при цій гомотетії перейде точка $K(-4; 4)$?

А	Б	В	Г	Д
$K_1(-2; 2)$	$K_2(-16; 16)$	$K_3(-4; 4)$	$K_4(8; -8)$	$K_5(-8; 8)$

50. У яку точку при гомотетії відносно початку координат переходить точка $B(0; -4; 0)$, якщо при цій гомотетії точка $A(0; 0; -6)$ переходить у точку $A_1(0; 0; 3)$?

А	Б	В	Г	Д
$B_1(0; 2; 0)$	$B_2(0; -2; 0)$	$B_3(0; 8; 0)$	$B_4(0; -8; 0)$	$B_5(0; -4; 3)$

У завданнях 51–54 сформульовано проблему (питання), яку потрібно розв'язати (отримати однозначну відповідь на питання), використовуючи для цього додаткові дані — твердження (1) і (2). Визначте, чи достатньо цих даних для розв'язання проблеми, і оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь*.

51. У якій координатній чверті знаходиться точка M ?

- (1) Точка M належить прямій $x = 2$.
 (2) Точка M належить колу $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 1$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

52. У якій координатній чверті знаходиться точка P ?

- (1) Точка P належить прямій $x = -2$.
 (2) Точка P належить колу $(x + 2)^2 + (y + 4)^2 = 9$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

53. У яких координатних чвертях знаходяться точки A і B ?

- (1) Точка C , що є серединою відрізка AB , має координати $(-2; -3)$.
 (2) Довжина відрізка AB дорівнює 10.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

* Саму проблему розв'язувати не обов'язково.

54. У яких координатних чвертях знаходяться точки K і M ?

- (1) Точка P , що є серединою відрізка KM , має координати $(4; -3)$.
 (2) Довжина відрізка KM дорівнює 5.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

У завданнях 55–56 порівняйте величини X і Y та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

55. Точка $K(x_0; y_0)$ лежить на осі абсцис.

Величина X : x_0 .

Величина Y : y_0 .

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

56. Точка $L(x_0; y_0)$ лежить у четвертій координатній чверті.

Величина X : x_0 .

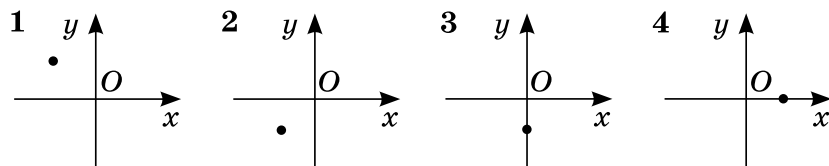
Величина Y : y_0 .

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

Завдання на встановлення відповідності

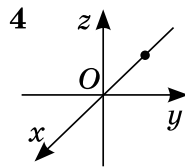
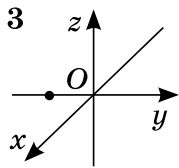
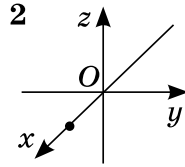
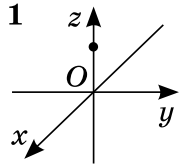
У завданнях 57–60 до кожного рисунка, позначеного цифрою, доберіть один відповідник, позначений літерою.

57. Установіть відповідність між рисунками (1–4) і координатами точок (А–Д), які можуть бути зображені на цих рисунках.



- А $(2; 2)$
 Б $(-2; 2)$
 В $(2; 0)$
 Г $(0; -2)$
 Д $(-2; -2)$

58. Установіть відповідність між рисунками (1–4) і координатами точок (А–Д), які можуть бути зображені на цих рисунках.



А $(0; -1; 0)$

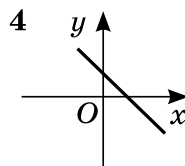
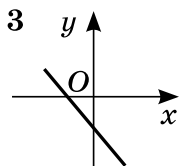
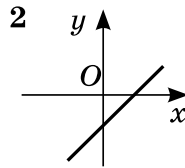
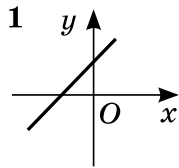
Б $(-1; 0; 0)$

В $(1; 0; 0)$

Г $(0; 1; 0)$

Д $(0; 0; 1)$

59. Установіть відповідність між рисунками (1–4) і рівняннями (А–Д), які можуть задавати прямі, зображені на цих рисунках.



А $x + y + 1 = 0$

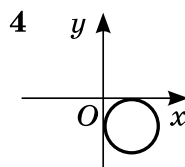
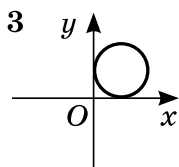
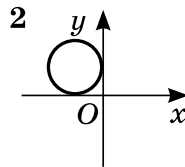
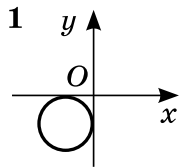
Б $x + y - 1 = 0$

В $x + y = 0$

Г $x - y + 1 = 0$

Д $x - y - 1 = 0$

60. Установіть відповідність між рисунками (1–4) і рівняннями (А–Д), які можуть задавати кола, зображені на цих рисунках.



А $x^2 + y^2 = 9$

Б $(x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 9$

В $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 9$

Г $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$

Д $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$

Завдання на встановлення послідовності

У завданнях 61–62 виберіть тільки необхідні для розв'язання поставленої задачі дії і розмістіть їх у правильній послідовності. У відповідь запишіть отриману послідовність літер.

61. Дано координати трьох вершин паралелограма $ABCD$: $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$. Як можна знайти невідомі координати четвертої вершини $D(x; y)$?
- А Знайти координати точки $O(x_0; y_0)$, що є серединою відрізка AC , за формулами: $x_0 = x_3 - x_1$; $y_0 = y_3 - y_1$.
- Б Знайти координати точки $O(x_0; y_0)$, що є серединою відрізка AC , за формулами: $x_0 = \frac{x_3 - x_1}{2}$; $y_0 = \frac{y_3 - y_1}{2}$.
- В Знайти координати точки $O(x_0; y_0)$, що є серединою відрізка AC , за формулами: $x_0 = \frac{x_3 + x_1}{2}$; $y_0 = \frac{y_3 + y_1}{2}$.
- Г Знайти координати точки $D(x; y)$ за формулами: $x = x_0 - x_2$; $y = y_0 - y_2$.
- Д Знайти координати точки $D(x; y)$ за формулами: $x = 2x_0 - x_2$; $y = 2y_0 - y_2$.
- Е Знайти координати точки $D(x; y)$ за формулами: $x = 2x_0 + x_2$; $y = 2y_0 + y_2$.
- Є Знайти координати точки $D(x; y)$ за формулами: $x = x_0 + x_2$; $y = y_0 + y_2$.
62. Дано координати вершин трикутника ABC : $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$. Як можна знайти довжину медіани CM цього трикутника?
- А Знайти координати точки $M(x_0; y_0; z_0)$ за формулами: $x_0 = x_2 - x_1$; $y_0 = y_2 - y_1$; $z_0 = z_2 - z_1$.
- Б Знайти координати точки $M(x_0; y_0; z_0)$ за формулами: $x_0 = x_2 + x_1$; $y_0 = y_2 + y_1$; $z_0 = z_2 + z_1$.
- В Знайти координати точки $M(x_0; y_0; z_0)$ за формулами: $x_0 = \frac{x_2 - x_1}{2}$; $y_0 = \frac{y_2 - y_1}{2}$; $z_0 = \frac{z_2 - z_1}{2}$.
- Г Знайти координати точки $M(x_0; y_0; z_0)$ за формулами: $x_0 = \frac{x_2 + x_1}{2}$; $y_0 = \frac{y_2 + y_1}{2}$; $z_0 = \frac{z_2 + z_1}{2}$.
- Д Знайти довжину медіани CM за формулою:
- $$CM = \sqrt{(x_3 - x_0)^2 + (y_3 - y_0)^2 + (z_3 - z_0)^2}.$$

Е Знайти довжину медіани CM за формулою:

$$CM = \sqrt{(x_3 + x_0)^2 + (y_3 + y_0)^2 + (z_3 + z_0)^2}.$$

Є Знайти довжину медіани CM за формулою:

$$CM = \sqrt{(x_3 - x_0)^2 + (y_3 - y_0)^2 + (z_3 - z_0)^2}.$$

Ж Знайти довжину медіани CM за формулою:

$$CM = \sqrt{(x_3 + x_0)^2 + (y_3 + y_0)^2 + (z_3 + z_0)^2}.$$

Завдання з короткою відповіддю

Розв'яжіть завдання 63–92 і запишіть відповідь **ОДНИМ ЧИСЛОМ**.

- 63.** Середина відрізка з кінцями в точках $A(-11; 9)$ і $B(x; -23)$ належить осі ординат. Знайдіть x .
- 64.** Середина відрізка з кінцями в точках $C(13; y)$ і $D(19; -25)$ належить осі абсцис. Знайдіть y .
- 65.** Відрізок AB точками K і L поділений на три рівні відрізки, тобто $AK = KL = LB$. Знайдіть **ДОБУТОК** координат точки B , якщо $A(3; -5)$, $L(-7; 1)$.
- 66.** Відрізок PS точками A , B і C поділено на 4 рівні відрізки, тобто $PA = AB = BC = CS$. Знайдіть **СУМУ** координат точки S , якщо $P(3; 2; 1)$, $A(2; 0; -1)$.
- 67.** Точка C належить відрізку AB , причому $\frac{AC}{CB} = 3$. Знайдіть **СУМУ** координат точки C , якщо $A(3; -1)$, $B(-2; 4)$.
- 68.** Точка P належить відрізку KM , причому $\frac{KP}{PM} = \frac{1}{7}$. Знайдіть **ДОБУТОК** координат точки P , якщо $K(4; 0; -10)$, $M(12; -8; -6)$.
- 69.** Знайдіть площу прямокутника, зображеного на рис. 1.

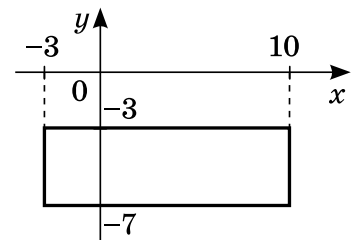


Рис. 1

70. Знайдіть площу прямокутної трапеції, зображеної на рис. 2.

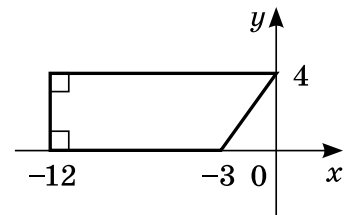


Рис. 2

71. Точки $A(-1; 0; 2)$ і $B(0; 1; 1)$ є вершинами правильного трикутника. Обчисліть периметр цього трикутника.
72. Точки $A(2; -5; -1)$ і $C(1; -1; 0)$ є вершинами квадрата $ABCD$. Обчисліть площу цього квадрата.
73. Точка, рівновіддалена від початку координат і точки $A(2; 3)$, належить осі абсцис. Знайдіть абсцису цієї точки.
74. Точка, рівновіддалена від площини xOy і точки $B(-1; 2; -3)$, належить осі аплікат. Знайдіть аплікату цієї точки.
75. Дано точки $A(1; 2)$, $B(2; -4)$, $C(-5; -4)$. Знайдіть довжину медіани BM трикутника ABC .
76. Дано точки $P(1; 0; 2)$, $S(0; -2; 1)$, $T(-3; -1; 0)$. Знайдіть квадрат довжини медіани TM трикутника PST .
77. Знайдіть значення параметра b , при якому точки $A(0; 0)$, $B(-1; b)$ і $C(5; 1)$ лежать на одній прямій.
78. Знайдіть значення параметра c , при якому точки $A(1; 2)$, $B(-1; 3)$ і $C(c; 4)$ лежать на одній прямій.
79. Квадрати відстаней від точки M до осі абсцис, осі ординат та осі аплікат дорівнюють 25, 73 і 80 відповідно. Знайдіть квадрат відстані від точки M до початку координат.
80. Квадрати відстаней від точки S до осі абсцис, осі ординат та початку координат дорівнюють 29, 20 і 45 відповідно. Знайдіть квадрат відстані від точки S до осі аплікат.
81. Точка X належить осі ординат, причому сума квадратів відстаней від цієї точки до точок $A(-2; -4)$ і $B(3; -8)$ є НАЙМЕНШОЮ. Знайдіть координати точки X . У відповідь запишіть ординату цієї точки.

82. Точка M належить осі абсцис, причому сума квадратів відстаней від цієї точки до точок $C(12; -6)$ і $D(-2; 8)$ є НАЙМЕНШОЮ. Знайдіть координати точки M . У відповідь запишіть абсцису цієї точки.

83. На рис. 3 зображено пряму $Ax + By + C = 0$, причому $A > 0$, числа A і B є цілими та взаємно простими. Знайдіть коефіцієнти A , B і C . У відповідь запишіть їх СУМУ.

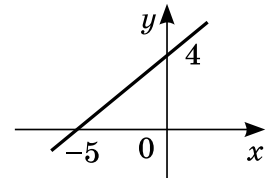


Рис. 3

84. На рис. 4 зображено пряму $Ax + By + C = 0$, причому $A < 0$, числа A і B є цілими та взаємно простими. Знайдіть коефіцієнти A , B і C . У відповідь запишіть їх СУМУ.

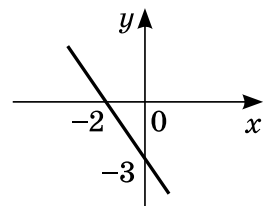


Рис. 4

85. Знайдіть усі значення параметра a , при яких коло $(x - a)^2 + (y - 7)^2 = 25$ дотикається до осі ординат. Якщо таке значення параметра одне, то запишіть ЙОГО у відповідь; якщо таких значень параметра кілька, то запишіть у відповідь їх ДОБУТОК.

86. Знайдіть усі значення параметра b , при яких коло $(x - 3)^2 + (y - b)^2 = 16$ дотикається до прямої $y = 10$. Якщо таке значення параметра одне, то запишіть ЙОГО у відповідь; якщо таких значень параметра кілька, то запишіть у відповідь їх ДОБУТОК.

87. Знайдіть точку перетину площини $6x - 4y + 5z = 120$ з віссю аплікат. У відповідь запишіть СУМУ координат цієї точки.

88. Знайдіть точку перетину площини $6x - 4y + 5z = 120$ з віссю ординат. У відповідь запишіть СУМУ координат цієї точки.

89. Знайдіть довжину відрізка OA , якщо O — початок координат, точка A належить сфері $(x - 12)^2 + (y + 5)^2 + z^2 = 9$, центр сфери належить відрізку OA .

90. Знайдіть відстань від точки B , яка належить сфері $x^2 + (y - 9)^2 + (z - 12)^2 = 16$, до початку координат O , якщо центр цієї сфери належить прямій OB , але не належить відрізку OB .

91. Знайдіть радіус кулі, яка дотикається до площин $y = -3$ і $y = 14$.

92. Знайдіть діаметр кулі, яка дотикається до площин $z = 15$ і $z = 33$.

Завдання з повним розв'язанням

Завдання 93–100 розв'яжіть із повним обґрунтуванням, посилаючись на відповідні означення, твердження, формули. У разі потреби проілюструйте розв'язання таблицями, діаграмами, графіками тощо.

93. У трикутнику з вершинами в точках $A(4;1)$, $B(7;5)$ і $C(-4;7)$ знайдіть:
- довжину медіани, проведеної з вершини B ;
 - довжину бісектриси, проведеної з вершини A ;
 - координати точки перетину медіан;
 - косинус внутрішнього кута при вершині C .
94. У трикутнику з вершинами в точках $A(1;0;1)$, $B(-1;3;0)$ і $C(3;4;-5)$ знайдіть:
- довжину медіани, проведеної з вершини B ;
 - координати точки перетину медіан;
 - косинус внутрішнього кута при вершині A .
95. Точка належить осі ординат. Знайдіть координати цієї точки, якщо сума відстаней від неї до точок $A(1;2)$ і $B(2;1)$ є **НАЙМЕНШОЮ**.
96. Точка належить осі абсцис. Знайдіть координати цієї точки, якщо модуль різниці відстаней від неї до точок $K(-2;2)$ і $L(2;5)$ є **НАЙБІЛЬШИМ**.
97. У системі координат на площині дано точки $A(2;1)$, $B(8;1)$ і коло, задане рівнянням $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 33 = 0$.
- Знайдіть координати центра кола та його радіус і зобразіть це коло в системі координат.
 - Знайдіть найбільше і найменше значення площі трикутника ABC , якщо точка C належить даному колу.
98. У системі координат у просторі дано точки $A(1;-1;1)$, $B(1;5;1)$, $C(7;0;1)$ і сферу, задану рівнянням $x^2 + y^2 + z^2 - 16z + 55 = 0$. Знайдіть:
- координати центра сфери та її радіус;
 - площу трикутника ABC ;
 - найбільше і найменше значення об'єму тетраедра $SABC$, якщо точка S належить даній сфері.
99. Знайдіть рівняння дотичних, проведених до кола $x^2 + y^2 = 36$ із точки $P(10;0)$.
100. Трикутник AOB утворено перетином прямої $x + 3y = 6$ з осями координат. Знайдіть рівняння кола:
- вписаного в трикутник AOB ;
 - описаного навколо трикутника AOB .

9.2. Вектори та їх застосування

Найпростіші завдання з повним розв'язанням

Завдання 1–20 розв'яжіть УСНО.

1. Трикутник ABC рівносторонній. Чи правильно, що $\overline{AB} = \overline{AC}$? $|\overline{AB}| = |\overline{CA}|$?
2. $ABCD$ — паралелограм (рис. 5). Серед векторів \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{CA} , \overline{DB} , \overline{DA} , \overline{BA} , \overline{DC} , \overline{AC} , \overline{CB} знайдіть:
 - а) пари рівних векторів;
 - б) пари протилежних векторів.

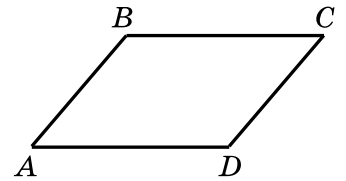


Рис. 5

3. Визначте вид опуклого чотирикутника $ABCD$, якщо $|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = |\overline{CD}| = |\overline{DA}|$. Чи можна стверджувати, що $\overline{AB} = \overline{DC}$?
4. $ABCD$ — паралелограм (рис. 5). Знайдіть вектори, які є результатами таких дій:

а) $\overline{AB} + \overline{BC}$;	г) $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}$;
б) $\overline{BA} + \overline{BC}$;	д) $\overline{CB} + \overline{BD} + \overline{DC}$.
в) $\overline{AB} + \overline{BD}$;	
5. $ABCD$ — паралелограм (рис. 5). Знайдіть вектори, які є результатами таких дій:

а) $\overline{AB} - \overline{AD}$;	б) $\overline{CA} - \overline{CD}$;	в) $\overline{AD} - \overline{BC}$.
--------------------------------------	--------------------------------------	--------------------------------------
6. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямокутний паралелепіпед (рис. 6). Серед векторів \overline{AB} , \overline{AD} , \overline{BC} , \overline{CD} , $\overline{D_1 A_1}$, $\overline{C_1 A_1}$, $\overline{D_1 B_1}$, $\overline{AA_1}$, $\overline{A_1 D}$, $\overline{B_1 B}$, \overline{BD} , \overline{AC} , $\overline{CC_1}$, $\overline{A_1 C}$, $\overline{CA_1}$, $\overline{AB_1}$, $\overline{C_1 D}$, $\overline{B_1 C}$ знайдіть:
 - а) пари рівних векторів;
 - б) пари протилежних векторів.
7. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямокутний паралелепіпед (рис. 6). Знайдіть вектори, які є результатами таких дій:

а) $\overline{BB_1} + \overline{BD}$;	в) $\overline{DB_1} + \overline{B_1 C} + \overline{CA}$;
б) $\overline{CB} + \overline{BB_1}$;	г) $\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AA_1}$.

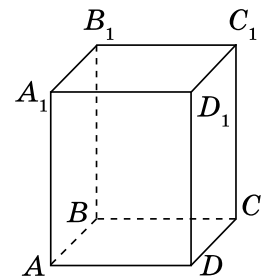


Рис. 6

8. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямокутний паралелепіпед (рис. 6). Знайдіть вектори, які є результатами таких дій:
- а) $\overrightarrow{BB_1} - \overrightarrow{BD}$; б) $\overrightarrow{BB_1} - \overrightarrow{CC_1}$; в) $\overrightarrow{C_1 B_1} + \overrightarrow{C_1 D_1} - \overrightarrow{C_1 A}$.
9. Довжина вектора \vec{a} дорівнює 8. Знайдіть довжину вектора:
- а) $2\vec{a}$; б) $\frac{1}{4}\vec{a}$; в) $-3\vec{a}$.
10. Градусна міра кута між векторами \vec{a} і \vec{b} дорівнює 10° . Знайдіть градусну міру кута між векторами:
- а) $3\vec{a}$ і \vec{b} ; б) \vec{a} і $5\vec{b}$; в) $-\vec{a}$ і \vec{b} .
11. У просторі задано три вектори \vec{a} , \vec{b} і \vec{c} , причому $\vec{a} \perp \vec{b}$ і $\vec{b} \perp \vec{c}$. Чи можна стверджувати, що обов'язково $\vec{a} \perp \vec{c}$? $\vec{a} \parallel \vec{c}$?
12. Знайдіть координати вектора \overrightarrow{AB} , якщо:
- а) $A(0; 0)$, $B(2; -3)$;
б) $A(1; 2)$, $B(8; 5)$;
в) $A(1; -2; 1)$, $B(0; 3; -4)$.
13. Знайдіть координати вектора $\vec{a} + \vec{b}$, якщо:
- а) $\vec{a}(-3; 5)$, $\vec{b}(3; -5)$;
б) $\vec{a}(-1; 4)$, $\vec{b}(2; 1)$;
в) $\vec{a}(2; 4; 1)$, $\vec{b}(-2; 0; -3)$.
14. Знайдіть координати вектора $\vec{a} - \vec{b}$, якщо:
- а) $\vec{a}(2; 7)$, $\vec{b}(3; 4)$;
б) $\vec{a}(-4; 0)$, $\vec{b}(2; -1)$;
в) $\vec{a}(0; -1; 2)$, $\vec{b}(-1; 3; 1)$.
15. Знайдіть координати вектора $3\vec{a}$, якщо:
- а) $\vec{a}(-1; 1)$; б) $\vec{a}\left(2; \frac{1}{3}\right)$; в) $\vec{a}(2; -1; 6)$.
16. Визначте, чи є колінеарними такі вектори:
- а) $\vec{a}(1; 3)$ і $\vec{b}(2; 6)$;
б) $\vec{c}(-1; 1)$ і $\vec{d}(2; 2)$;
в) $\vec{x}(0; 3)$ і $\vec{y}(0; -7)$.

17. Визначте, чи є колінеарними такі вектори:

а) $\vec{a}(1; 0; -1)$ і $\vec{b}(-3; 0; 3)$;

б) $\vec{c}(0; 1; 2)$ і $\vec{d}(0; 2; 1)$;

в) $\vec{x}(-4; 0; 0)$ і $\vec{y}(3; 0; 0)$.

18. Визначте, чи є перпендикулярними такі вектори:

а) $\vec{a}(4; 0)$ і $\vec{b}(-4; 0)$;

б) $\vec{c}(2; -3)$ і $\vec{d}(-3; 2)$;

в) $\vec{m}(0; 5)$ і $\vec{p}(-2; 0)$.

19. Визначте, чи є перпендикулярними такі вектори:

а) $\vec{a}(2; 0; -1)$ і $\vec{b}(1; 0; 2)$;

б) $\vec{c}(1; 0; 1)$ і $\vec{d}(0; 1; 0)$;

в) $\vec{m}(0; 0; -2)$ і $\vec{p}(0; 0; 3)$.

20. Знайдіть довжину вектора: $\vec{a}(3; 0)$; $\vec{b}(0; -4; 0)$; $\vec{c}(6; 8)$; $\vec{d}(-3; 2; -6)$.

Завдання з вибором однієї правильної відповіді

Проаналізуйте умови та вимоги завдань 21–50 та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

21. Відомо, що $\vec{a} = \vec{b}$. Укажіть рисунок, на якому **МОЖУТЬ** бути зображені ці вектори.

А	Б	В	Г	Д

22. Відомо, що $\vec{a} = -\vec{b}$. Укажіть рисунок, на якому **МОЖУТЬ** бути зображені ці вектори.

А	Б	В	Г	Д

23. На рис. 7 зображено рівнобедрений трикутник ABC ($AB=BC$). Закінчіть речення так, щоб утворилося правильне твердження: «Якщо $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = 10$, то...».

А	Б	В	Г	Д
$AB=10$	$AB=5$	$AC=10$	$BD=5$	$BD=10$

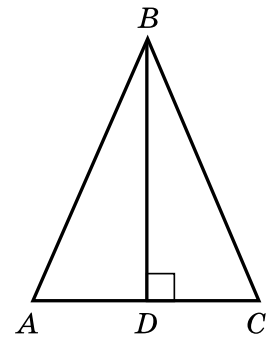


Рис. 7

24. Користуючись даними рис. 7 закінчіть речення так, щоб утворилося правильне твердження: «Якщо $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = 10$, то...».

А	Б	В	Г	Д
$AB=10$	$AB=5$	$AC=10$	$AC=5$	$BD=10$

25. Точка O є точкою перетину діагоналей паралелограма $ABCD$, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{c}$. Виразіть вектор \vec{c} через вектори \vec{a} і \vec{b} .

А	Б	В	Г	Д
$\vec{c} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$	$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$	$\vec{c} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$	$\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$	$\vec{c} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$

26. Точка O є точкою перетину діагоналей паралелограма $ABCD$, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CO} = \vec{c}$. Виразіть вектор \vec{c} через вектори \vec{a} і \vec{b} .

А	Б	В	Г	Д
$\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$	$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$	$\vec{c} = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$	$\vec{c} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$	$\vec{c} = -\vec{a} - \vec{b}$

27. На рис. 8 зображено три вектори \vec{a} , \vec{b} і \vec{c} . Укажіть правильну рівність.

А	Б	В	Г	Д
$\vec{b} = \vec{a} - \vec{c}$	$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$	$\vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$	$\vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$	$\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$

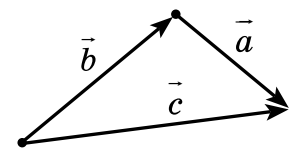


Рис. 8

28. На рис. 9 зображено три вектори \vec{a} , \vec{b} і \vec{c} . Укажіть правильну рівність.

А	Б	В	Г	Д
$\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$	$\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$	$\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$	$-\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$	$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$

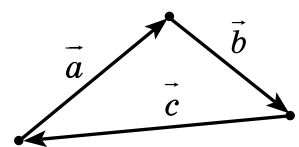


Рис. 9

29. Укажіть рисунок, на якому $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$.

А	Б	В	Г	Д

30. Укажіть рисунок, на якому $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

А	Б	В	Г	Д

31. Дано паралелограм $ABCD$. Який із наведених векторів має **НАЙБІЛЬШУ** довжину?

А	Б	В	Г	Д
$\vec{a} = \vec{AB} + \vec{AD}$	$\vec{b} = \vec{AB} + \vec{AC}$	$\vec{c} = \vec{AB} - \vec{AD}$	$\vec{d} = \vec{AB} - \vec{AC}$	$\vec{e} = \vec{AB} + \vec{BC}$

32. Дано паралелограм $ABCD$. Який із наведених векторів має **НАЙМЕНШУ** довжину?

А	Б	В	Г	Д
$\vec{m} = \vec{AC} + \vec{CD}$	$\vec{p} = \vec{AC} - \vec{BD}$	$\vec{s} = \vec{BC} - \vec{BA}$	$\vec{r} = \vec{BC} + \vec{BD}$	$\vec{k} = \vec{BC} + \vec{DA}$

33. На рис. 10 зображено два вектори \vec{OA} і \vec{OB} та точку C . Укажіть проміжок, якому **МОЖЕ** належати значення параметра λ , якщо $\vec{CO} = \lambda(\vec{OA} + \vec{OB})$.

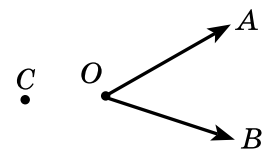


Рис. 10

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$	$(0; 1)$	$(1; 2)$	$(-2; -1)$	$(-1; 0)$

34. На рис. 11 зображено два вектори \vec{OA} і \vec{OB} та точку C . Укажіть проміжок, якому **МОЖЕ** належати значення параметра λ , якщо $\vec{CO} = \lambda(\vec{OA} + \vec{OB})$.

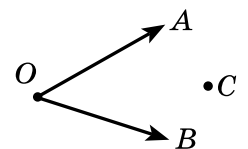


Рис. 11

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$	$(1; 2)$	$(0; 1)$	$(-1; 0)$	$(-2; -1)$

35. Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 12), $\overline{BA} = \vec{x}$, $\overline{BC} = \vec{y}$, $\overline{BB_1} = \vec{z}$. Укажіть вектор, який дорівнює вектору $\vec{m} = -\vec{x} - \vec{y} + \vec{z}$.

А	Б	В	Г	Д
$\overline{D_1 B}$	$\overline{B_1 D}$	$\overline{A_1 C}$	$\overline{DB_1}$	$\overline{CA_1}$

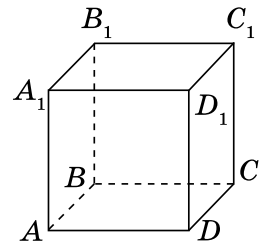


Рис. 12

36. Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 12). Який із наведених векторів дорівнює сумі $\overline{BA} + \overline{AC} + \overline{D_1 A_1} + \overline{D_1 C_1}$?

А	Б	В	Г	Д
\overline{AB}	\overline{AC}	$\overline{A_1 C_1}$	\overline{BD}	$\overline{B_1 D}$

37. У паралелепіпеді $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка O — точка перетину діагоналей $B_1 D$ і BD_1 . Виразіть вектор \overline{OA} через вектори $\overline{AB} = \vec{a}$, $\overline{AD} = \vec{b}$ і $\overline{AA_1} = \vec{c}$.

А	Б	В
$\overline{OA} = \frac{1}{2} \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$	$\overline{OA} = \frac{1}{2} \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$	$\overline{OA} = -\frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$
Г		Д
$\overline{OA} = \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$		$\overline{OA} = -\vec{a} + \frac{1}{2} (\vec{b} + \vec{c})$

38. У правильному тетраедрі $SABC$ точка O — центр грані ABC . Виразіть вектор \overline{SO} через вектори $\overline{SA} = \vec{a}$, $\overline{SB} = \vec{b}$ і $\overline{SC} = \vec{c}$.

А	Б	В
$\overline{SO} = \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$	$\overline{SO} = \frac{1}{3} \vec{a} + \frac{2}{3} \vec{b} + \vec{c}$	$\overline{SO} = \frac{1}{3} \vec{a} + \vec{b} + \frac{2}{3} \vec{c}$
Г		Д
$\overline{SO} = \frac{1}{3} (\vec{a} + \vec{b}) + \frac{2}{3} \vec{c}$		$\overline{SO} = \frac{1}{3} (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

39. Відомо, що $\overline{AB} = \vec{m}$, причому $A(2; 1)$, $\vec{m}(3; -1)$. Знайдіть координати точки B .

А	Б	В	Г	Д
$B(5; 0)$	$B(-1; 2)$	$B(6; -1)$	$B(1; -2)$	$B(-5; 0)$

40. Дано паралелограм $AKLM$, причому $\overline{AK}(1; 2)$, $\overline{AM}(4; 1)$, а $L(7; -4)$. Знайдіть координати точки A .

А	Б	В	Г	Д
$A(-2; -7)$	$A(-12; 1)$	$A(2; -7)$	$A(12; -1)$	$A(-2; 7)$

41. При якому значенні параметра m вектори $\vec{a}(5; m-1; 3)$ і $\vec{b}(m; 3; 3)$ рівні між собою?

А	Б	В	Г	Д
Такого значення m не існує	$m = 5$	$m = 4$	$m = 3$	$m = 2$

42. За умовою попередньої задачі укажіть значення параметра m , при якому вектори \vec{a} і \vec{b} є перпендикулярними.

А	Б	В	Г	Д
Такого значення m не існує	$m = -\frac{3}{4}$	$m = \frac{9}{8}$	$m = \frac{3}{4}$	$m = -\frac{9}{8}$

43. Дано квадрат $ABCD$. Укажіть правильну подвійну нерівність, якщо $a = \overline{AB} \cdot \overline{DA}$, $b = \overline{AC} \cdot \overline{CD}$, $c = \overline{BD} \cdot \overline{BA}$.

А	Б	В	Г	Д
$a < b < c$	$a < c < b$	$b < a < c$	$b < c < a$	$c < a < b$

44. Дано прямокутник $ABCD$. Укажіть правильну подвійну нерівність, якщо $a = \overline{BD} \cdot \overline{AB}$, $b = \overline{AB} \cdot \overline{BC}$, $c = \overline{AC} \cdot \overline{AB}$.

А	Б	В	Г	Д
$a < b < c$	$a < c < b$	$b < a < c$	$b < c < a$	$c < a < b$

45. Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, ребро якого дорівнює 1 (рис. 13). Відомо, що $\overline{AA_1} \cdot \vec{x} = 1$. Який із наведених векторів МОЖЕ дорівнювати вектору \vec{x} ?

А	Б	В	Г	Д
\overline{BD}	\overline{BC}	$\overline{B_1 B}$	$\overline{CC_1}$	$\overline{C_1 D_1}$

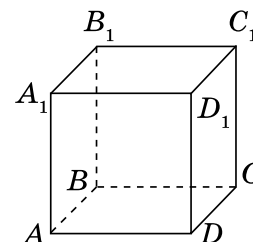


Рис. 13

46. Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, ребро якого дорівнює 1 (рис. 14). Відомо, що $\overline{AD} \cdot \vec{x} = -1$. Який із наведених векторів МОЖЕ дорівнювати вектору \vec{x} ?

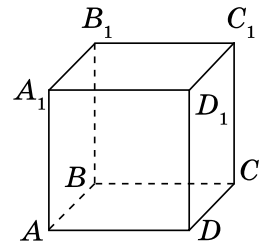


Рис. 14

А	Б	В	Г	Д
$\overline{B_1 D_1}$	$\overline{C_1 B_1}$	\overline{BC}	$\overline{BB_1}$	$\overline{C_1 C}$

47. Дано вектори \vec{a} і \vec{b} , причому $|\vec{a}| = 4$ і $|\vec{b}| = 2$. При якому з наведених значень параметра λ вектори $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$ та $\vec{y} = \vec{a} - \lambda\vec{b}$ утворюють тупий кут?

А	Б	В	Г	Д
-1	0	1	2	3

48. Дано вектори \vec{a} і \vec{b} , причому $|\vec{a}| = 1$ і $|\vec{b}| = 4$. При якому з наведених значень параметра λ вектори $\vec{x} = \lambda\vec{a} + \vec{b}$ та $\vec{y} = \lambda\vec{a} - \vec{b}$ утворюють гострий кут?

А	Б	В	Г	Д
5	4	3	2	1

49. У квадраті $ABCD$ точки K і L є серединами сторін BC і CD відповідно. Використовуючи скалярний добуток векторів, знайдіть кут LAK .

А	Б	В	Г	Д
30°	45°	$\arccos \frac{4}{5}$	$\arccos \frac{1}{3}$	$\arccos \frac{3}{4}$

50. Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Використовуючи скалярний добуток векторів, знайдіть кут між діагоналлю куба AC_1 і діагоналлю грані AB_1 .

А	Б	В	Г	Д
30°	45°	$\arccos \sqrt{\frac{1}{3}}$	$\arccos \sqrt{\frac{2}{3}}$	$\arccos \sqrt{\frac{2}{5}}$

У завданнях 51–54 сформульовано проблему (питання), яку потрібно розв'язати (отримати однозначну відповідь на питання), використовуючи для цього додаткові дані — твердження (1) і (2). Визначте, чи достатньо цих даних для розв'язання проблеми, і оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь*.

51. $PABCD$ — правильна чотирикутна піраміда з основою $ABCD$. Знайдіть довжину вектора $\overline{AP} + \overline{PC}$.

(1) Бічне ребро цієї піраміди дорівнює 3 см.

(2) Площа основи цієї піраміди дорівнює 1 см^2 .

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

52. $PABCD$ — правильна чотирикутна піраміда з основою $ABCD$. Знайдіть довжину вектора $\overline{PA} + \overline{PC}$.

(1) Бічне ребро цієї піраміди дорівнює 3 см.

(2) Периметр основи цієї піраміди дорівнює 4 см.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

53. Дано паралелограм $ABCD$, причому $A(5; 1)$. Знайдіть координати точки B .

(1) $\overline{CD}(-1; -1)$.

(2) $\overline{BD}(3; 2)$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

* Саму проблему розв'язувати не обов'язково.

54. Дано прямокутник $KLMP$, причому $K(-1; 2)$, а точка P лежить на осі ординат. Знайдіть координати точки P .

(1) $\overline{LM}(1; 4)$.

(2) $\overline{MP}(-8; 2)$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

У завданнях 55–56 порівняйте величини X і Y та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

55. Дано вектори $\overline{AB}(x_1; y_1)$ і $\overline{BA}(x_2; y_2)$, причому $x_1 < y_1$.
Величина X : x_2 . Величина Y : y_2 .

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

56. Дано вектори $\overline{AB}(x_1; y_1)$ і $\overline{BA}(x_2; y_2)$, причому вектор \overline{AB} паралельний осі ординат.
Величина X : x_1 . Величина Y : x_2 .

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

Завдання на встановлення відповідності

У завданнях 57–60 до кожного рядка або рисунка, позначеного цифрою, доберіть один відповідник, позначений літерою.

57. Установіть відповідність між векторами (1–4) і паралельними їм векторами (А–Д), якщо $K(2; 4)$, $L(1; 0)$, $M(0; -1)$, $S(1; -3)$.

1 \overline{KL}

А $\overline{(-2; 4)}$

2 \overline{KM}

Б $\overline{(4; 4)}$

3 \overline{LM}

В $\overline{(3; -3)}$

4 \overline{MS}

Г $\overline{(2; 5)}$

Д $\overline{(-2; -8)}$

58. Установіть відповідність між векторами (1–4) і перпендикулярними до них векторами (А–Д), якщо $A(2;1)$, $B(-1;1)$, $C(3;-2)$, $D(-2;-3)$.

1 \overline{AB}

А $\overline{(10; -10)}$

2 \overline{BC}

Б $\overline{(0; 4)}$

3 \overline{CD}

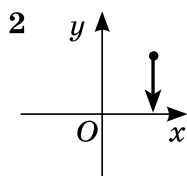
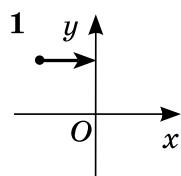
В $\overline{(6; 8)}$

4 \overline{DA}

Г $\overline{(-6; 0)}$

Д $\overline{(-2; 10)}$

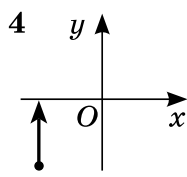
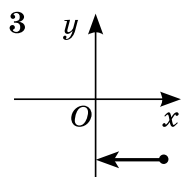
59. Установіть відповідність між векторами, зображеними на рисунках (1–4), та їх можливими координатами (А–Д).



А $(-1; 0)$

Б $(1; 0)$

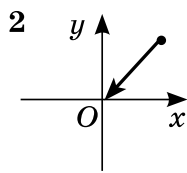
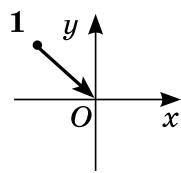
В $(-1; 1)$



Г $(0; 1)$

Д $(0; -1)$

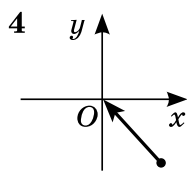
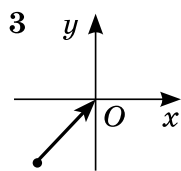
60. Установіть відповідність між векторами, зображеними на рисунках (1–4), та їх можливими координатами (А–Д).



А $(1; -1)$

Б $(-1; 1)$

В $(1; 1)$



Г $(0; 1)$

Д $(-1; -1)$

Завдання на встановлення послідовності

У завданнях 61–62 виберіть тільки необхідні для розв'язання поставленої задачі дії і розмістіть їх у правильній послідовності. У відповідь запишіть отриману послідовність літер.

61. Дано координати трьох точок: $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$. Як можна перевірити, чи є кут BAC тупим?
- А Знайти координати вектора $\vec{c}(c_1; c_2) = \overline{AB}$ за формулами: $c_1 = x_2 - x_1$; $c_2 = y_2 - y_1$.
- Б Знайти координати вектора $\vec{c}(c_1; c_2) = \overline{AB}$ за формулами: $c_1 = x_1 - x_2$; $c_2 = y_1 - y_2$.
- В Знайти координати вектора $\vec{b}(b_1; b_2) = \overline{AC}$ за формулами: $b_1 = x_3 - x_1$; $b_2 = y_3 - y_1$.
- Г Знайти координати вектора $\vec{b}(b_1; b_2) = \overline{AC}$ за формулами: $b_1 = x_1 - x_3$; $b_2 = y_1 - y_3$.
- Д Знайти скалярний добуток векторів \vec{b} і \vec{c} за формулою: $\vec{b} \cdot \vec{c} = b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2$.
- Е Знайти скалярний добуток векторів \vec{b} і \vec{c} за формулою: $\vec{b} \cdot \vec{c} = b_1 \cdot c_1 + b_2 \cdot c_2$.
- Є Якщо $\vec{b} \cdot \vec{c} > 0$, то зробити висновок, що кут BAC є тупим.
- Ж Якщо $\vec{b} \cdot \vec{c} < 0$, то зробити висновок, що кут BAC є тупим.
- З Якщо $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$, то зробити висновок, що кут BAC є тупим.
62. Дано координати чотирьох точок: $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$, $D(x_4; y_4)$. Як можна перевірити, чи є чотирикутник $ABCD$ паралелограмом?
- А Знайти координати вектора $\vec{m}(m_1; m_2) = \overline{AB}$ за формулами: $m_1 = x_1 - x_2$; $m_2 = y_1 - y_2$.
- Б Знайти координати вектора $\vec{m}(m_1; m_2) = \overline{AB}$ за формулами: $m_1 = x_2 - x_1$; $m_2 = y_2 - y_1$.
- В Знайти координати вектора $\vec{p}(p_1; p_2) = \overline{CD}$ за формулами: $p_1 = x_3 - x_4$; $p_2 = y_3 - y_4$.
- Г Знайти координати вектора $\vec{p}(p_1; p_2) = \overline{CD}$ за формулами: $p_1 = x_4 - x_3$; $p_2 = y_4 - y_3$.
- Д Якщо $m_1 = p_1$ і $m_2 = p_2$, то зробити висновок, що $ABCD$ — паралелограм.
- Е Якщо $m_1 = m_2$ і $p_1 = p_2$, то зробити висновок, що $ABCD$ — паралелограм.
- Є Якщо $m_1 = -p_1$ і $m_2 = -p_2$, то зробити висновок, що $ABCD$ — паралелограм.
- Ж Якщо $m_1 = -m_2$ і $p_1 = -p_2$, то зробити висновок, що $ABCD$ — паралелограм.

Завдання з короткою відповіддю

Розв'яжіть завдання 63–92 і запишіть відповідь **ОДНИМ ЧИСЛОМ**.

63. Дано квадрат $ABCD$ зі стороною 1. Обчисліть $|\overline{AC} + \overline{BD}|$.
64. За умовою попередньої задачі обчисліть $|2\overline{AB} - \overline{AD}|$.
65. Знайдіть довжину вектора \overline{AB} , якщо $A(12; 15; -8)$, $B(-12; 5; -8)$.
66. Знайдіть довжину вектора \overline{KP} , якщо $K(6; -10; 2)$, $P(-6; -10; 18)$.
67. У трикутнику ABC точки D і K належать сторонам BC і AB відповідно, причому $DK \parallel AC$ і $AK : BK = 7 : 1$. Знайдіть число λ , для якого виконується рівність $\overline{AC} = \lambda \overline{DK}$.
68. Точка O — точка перетину діагоналей трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$), $BC = 2$, $AD = 8$. Знайдіть число λ , для якого виконується рівність $\overline{OC} = \lambda \overline{AC}$.
69. Дано точки $M(2; 3)$, $P(-1; 4)$, $S(3; 1)$ і $T(0; c)$. Знайдіть значення параметра c , при якому вектори \overline{MS} і \overline{TP} будуть колінеарними.
70. Дано точки $A(1; 1; 3)$, $B(4; 0; a)$, $C(0; -1; 4)$ і $D(b; 1; -2)$. Знайдіть СУМУ значень параметрів a і b , при яких вектори \overline{AB} і \overline{CD} будуть колінеарними.
71. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}(6; 9)$ і $\vec{b}(-2; 5)$.
72. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{x}(-1; 2; 7)$ і $\vec{y}(5; 8; -3)$.
73. Вектори $\vec{a}(x; 2; -3)$ і $\vec{b}(1; -4; 6)$ лежать на протилежних сторонах квадрата. Знайдіть x .
74. Вектори $\vec{c}(6; x)$ і $\vec{d}(2; -3)$ лежать на суміжних сторонах квадрата. Знайдіть x .
75. Вектори \vec{a} і \vec{b} утворюють кут $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. Обчисліть значення виразу $(3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})$, якщо $|\vec{a}| = 3$, а $|\vec{b}| = 2$.

76. Вектори \vec{i} , \vec{j} і \vec{k} мають довжину 1. Градусні міри кутів між векторами \vec{k} та \vec{j} і \vec{k} та \vec{i} дорівнюють 60° , а вектори \vec{i} та \vec{j} перпендикулярні. Обчисліть скалярний квадрат $(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})^2$.
77. Дано вектори $\vec{a}(4; -2; -4)$ і $\vec{b}(6; -3; 2)$. Обчисліть значення виразу $(2\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b})$.
78. Дано вектори $\vec{c}(2; 1; -3)$ і $\vec{d}(0; -2; 4)$. Обчисліть скалярний квадрат $(\vec{c} - 2\vec{d})^2$.
79. Знайдіть скалярний добуток векторів, зображених на рис. 15.

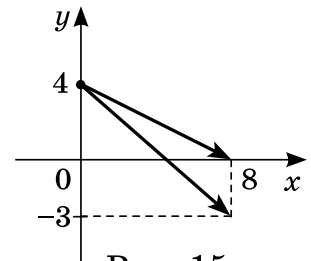


Рис. 15

80. Знайдіть скалярний добуток векторів, зображених на рис. 16.

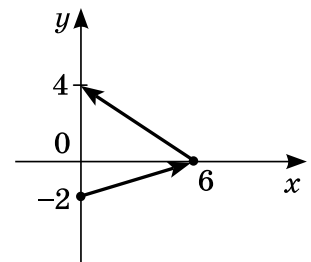


Рис. 16

81. Довжина сторони правильного трикутника ABC дорівнює 6. Знайдіть скалярний добуток $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB}$.
82. Довжина сторони правильного трикутника ABC дорівнює 10. Знайдіть скалярний добуток $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA}$.
83. На рис. 17 зображено прямокутник $ACDF$, менша сторона якого дорівнює 8. Точка B належить стороні AC . Знайдіть скалярний добуток векторів \overrightarrow{FB} і \overrightarrow{DC} .

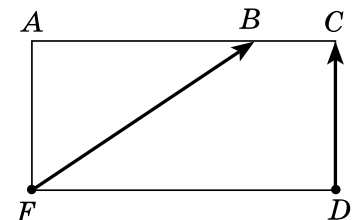


Рис. 17

84. На рис. 18 зображено прямокутник $ACDF$, менша сторона якого дорівнює 6. Точка B належить стороні AC . Знайдіть скалярний добуток векторів \overrightarrow{BF} і \overrightarrow{DC} .

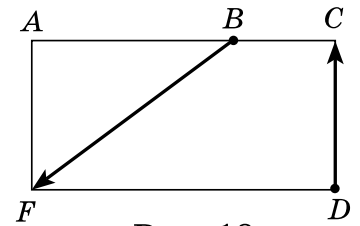


Рис. 18

85. Знайдіть косинус кута між вектором $\vec{a}(5;1;8)$ і додатним напрямком осі абсцис.
86. Знайдіть синус кута між вектором $\vec{a}(5;1;8)$ і додатним напрямком осі аплікат.
87. Вектори \vec{a} і \vec{b} перпендикулярні, причому $|\vec{a}|=10$, $|\vec{b}|=24$. Знайдіть $|\vec{a}-\vec{b}|$.
88. Відомо, що $|\vec{x}|=13$, $|\vec{y}|=19$, $|\vec{x}+\vec{y}|=24$. Знайдіть $|\vec{x}-\vec{y}|$.
89. Знайдіть НАЙМЕНШЕ значення функції $f(x)=10\cos 5x+24\sin 5x$.
90. Знайдіть НАЙБІЛЬШЕ значення функції $f(t)=4\sqrt{1-t^3}+2\sqrt{t^3+19}$.
91. Про додатні числа a , b , c і d відомо, що $a^2+b^2=12$, $c^2+d^2=27$. Якого НАЙБІЛЬШОГО значення може набути вираз $ac+bd$?
92. Про числа a , b , c і d відомо, що $a^2+b^2=45$, $c^2+d^2=5$, причому $a<0$, $b<0$, $c>0$, $d>0$. Якого НАЙМЕНШОГО значення може набути вираз $ac+bd$?

Завдання з повним розв'язанням

Завдання 93–100 розв'яжіть із повним обґрунтуванням, посилаючись на відповідні означення, твердження, формули. У разі потреби проілюструйте розв'язання таблицями, діаграмами, графіками тощо.

93. У паралелограмі $ABCD$ точка O — точка перетину його діагоналей. Виразіть через вектори $\vec{m}=\overrightarrow{AO}$ і $\vec{p}=\overrightarrow{AD}$ вектори \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{BD} ; \overrightarrow{CD} .
94. У трикутнику ABC $AB=4$, $BC=5$, $AC=6$. BM — медіана цього трикутника, BK — його бісектриса. Виразіть через вектори $\vec{x}=\overrightarrow{BA}$ і $\vec{y}=\overrightarrow{BC}$ вектори \overrightarrow{BM} і \overrightarrow{BK} .

95. У паралелепіпеді $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки K і M є серединами ребер $B_1 C_1$ і CD відповідно. Виразіть вектор \overline{KM} через вектори $\overline{AA_1}$, \overline{AB} і \overline{AD} .
96. У паралелепіпеді $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки L і P є серединами ребер $A_1 B_1$ і CC_1 відповідно. Виразіть вектор \overline{LP} через вектори $\overline{AA_1}$, \overline{AB} і \overline{AD} .
97. Дано дві точки $A(1; -2)$ і $B(3; 1)$. Знайдіть і зобразіть геометричне місце точок $M(x; y)$, для яких виконується співвідношення:
- $\overline{AM} \cdot \overline{AB} \square 0$;
 - $\overline{AM} \cdot \overline{BM} = 0$.
98. Дано дві точки $C(-2; 2)$ і $D(4; 6)$. Знайдіть і зобразіть геометричне місце точок $M(x; y)$, для яких виконується співвідношення:
- $\overline{CM} \cdot \overline{CD} \square 0$;
 - $\overline{CM} \cdot \overline{DM} = 8$.
99. За допомогою векторів доведіть, що середня лінія трапеції паралельна основам цієї трапеції й дорівнює середньому арифметичному їхніх довжин.
100. Точка M — точка перетину медіан трикутника ABC . Доведіть, що:
- $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \vec{0}$;
 - для довільної точки O виконується рівність $\overline{OM} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$.

Розділ 10. ЕЛЕМЕНТИ СТОХАСТИКИ

10.1. Комбінаторика. Різні означення ймовірності

Найпростіші завдання з повним розв'язанням

Завдання 1–20 розв'яжіть УСНО.

1. На столі у секретарки лежать 10 ручок і 12 олівців. Для того щоб швидко записати нотатку, вона навмання вибирає або ручку, або олівець. Скількома способами вона може це зробити?
2. Студент на перерві заходить до буфету, де є 5 видів булочок і 4 види соку. Скільки існує варіантів сніданку для цього студента, якщо зазвичай він вибирає одну булочку й один сік?
3. Обчисліть такі кількості перестановок: P_0 ; P_1 ; P_2 ; P_4 .
4. Обчисліть такі кількості розміщень: A_4^0 ; A_4^4 ; A_5^1 .
5. Обчисліть такі кількості комбінацій: C_5^0 ; C_6^1 ; C_8^8 .
6. Скількома способами можна розподілити чотири різні подарунки серед чотирьох іменинників, вручаючи по одному подарунку кожному?
7. Четверо хлопчиків грають у космонавтів, і їм потрібно вибрати командира корабля та штурмана. Скількома способами можна здійснити цей вибір?
8. Четверо дівчаток беруть участь у карнавальному шоу. Для участі в одному з конкурсів потрібно вибрати дві дівчинки. Скількома способами можна здійснити цей вибір?
9. Укажіть, скількома способами можна подати кожне з чисел 2, 3, 5 у вигляді суми:
 - а) двох натуральних чисел;
 - б) трьох натуральних чисел.
10. Укажіть, скільки двоцифрових натуральних чисел можна утворити, використовуючи тільки цифри 1, 3, 5, 7 і 9, якщо:
 - а) цифри в числах можуть повторюватися;
 - б) цифри в числах не можуть повторюватися.

11. Укажіть, скільки двоцифрових натуральних чисел можна утворити, використовуючи тільки цифри 2, 4, 6, 8 і 0, якщо:
- цифри у числах можуть повторюватися;
 - цифри у числах не можуть повторюватися.
12. Наведіть приклад події A , для якої виконуються такі рівності:
- $P(A) = 0$;
 - $P(A) = 1$;
 - $P(A) = \frac{1}{2}$;
 - $P(A) = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.
13. Чи може ймовірність деякої події дорівнювати $-0,1$; 0 ; $\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$?
14. У коробці лежать різнокольорові кульки для настільного тенісу: 15 білих, 6 зелених, 4 жовтих і 5 червоних. Яка ймовірність того, що одна витягнута навмання кулька буде білою? зеленою? жовтою? червоною? кольоровою (не білою)?
15. Яка ймовірність того, що вибране навмання двоцифрове натуральне число буде більшим за 5? меншим за 20? більшим за 200? меншим за 120?
16. Нитку однакової товщини завдовжки 50 см розривають двома руками. Яка ймовірність того, що довжина шматка нитки, який після розриву залишиться у правій руці, буде не більшою за 20 см?
17. На рис. 1 зображено два квадрати. Сторона більшого квадрата дорівнює 10 см, а сторона меншого квадрата дорівнює 2 см. Навмання вибирають точку в більшому квадраті. Яка ймовірність того, що ця точка міститиметься також і в меншому квадраті?

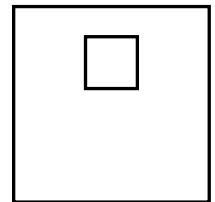


Рис. 1

18. Проводиться серія експериментів, у кожному з яких може відбутися деяка подія A . Чи може відносна частота здійснення події A після цієї серії експериментів дорівнювати 0 ; $\frac{7}{8}$; $\frac{10}{9}$; $\frac{1}{\sqrt{3}}$?
19. Було підраховано, що в середньому з кожних 100 відвідувачів магазину тільки 4 особи йдуть взагалі без покупок. Знайдіть наближене значення ймовірності того, що відвідувач, який щойно зайшов до магазину, щось у ньому придбає.

20. Укажіть, які з наведених тверджень є правильними інтерпретаціями поняття «імовірність події»:
- а) якщо $P(A) = 0,99$, то подія A є майже вірогідною;
 - б) якщо $P(A) = 0,5$, то подія A в кожних двох випробуваннях відбуватиметься тільки один раз;
 - в) якщо $P(A) = 0,35$, то подія A відбувається приблизно в 35 % випробувань, у яких вона може відбутися;
 - г) якщо $P(A) = 0,01$, то подія A відбувається один раз на 100 випробувань, у яких вона може відбутися;
 - д) якщо $P(A) = 0$, то подія A не може відбутися;
 - е) якщо $P(A) = 1$, то подія A відбувається завжди;
 - є) якщо $P(A) = 0,25$, то при великій кількості випробувань відносна частота здійснення події A приблизно дорівнює 0,25.

Завдання з вибором однієї правильної відповіді

Проаналізуйте умови та вимоги завдань 21–50 та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

21. Укажіть формулу, за якою обчислюється кількість трицифрових чисел, які можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, якщо в кожному з цих чисел усі три цифри різні.

А	Б	В	Г	Д
3^7	C_7^3	$3! \cdot 7!$	A_7^3	7^3

22. Укажіть формулу, за якою обчислюється кількість трицифрових чисел, які можна утворити з цифр 1, 3, 5, 7, 9, якщо в кожному з цих чисел цифри можуть повторюватися.

А	Б	В	Г	Д
3^5	C_5^3	$3! \cdot 5!$	A_5^3	5^3

23. На одній із двох паралельних прямих позначено 9 точок, а на іншій — 16. Скільки існує опуклих чотирикутників з вершинами в цих точках?

А	Б	В	Г	Д
C_{25}^4	A_{25}^4	$C_9^2 \cdot A_{16}^2$	$A_9^2 \cdot A_{16}^2$	$C_9^2 \cdot C_{16}^2$

24. У Семена є 10 мобільних телефонів, а в Петра — 8. Скількома способами друзі можуть поміняти 2 мобільні телефони одного на 2 мобільні телефони іншого?

А	Б	В	Г	Д
C_{18}^4	A_{18}^4	$A_{10}^2 \cdot A_8^2$	$C_{10}^2 \cdot C_8^2$	80

25. Знайдіть такий біноміальний коефіцієнт розкладу $\left(\sqrt[4]{x^3} + \frac{1}{x}\right)^{12}$, який містить змінну x у другому степені.

А	Б	В	Г	Д
C_{12}^4	C_{12}^6	C_{12}^7	C_{12}^9	C_{12}^{10}

26. Знайдіть такий доданок біноміального розкладу $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{15}$, який не містить змінної x .

А	Б	В	Г	Д
C_{15}^4	C_{15}^7	C_{15}^9	C_{15}^{11}	C_{15}^{13}

27. Яка ймовірність того, що навмання назване натуральне число є від'ємним?

А	Б	В	Г	Д
-1	-0,5	0	0,5	1

28. Яка ймовірність того, що навмання назване парне число ділиться на 2 націло?

А	Б	В	Г	Д
2	1	0,5	0,2	0

29. Із слова ПАРАМЕТР навмання вибирають одну літеру. Яка ймовірність того, що виберуть літеру Р?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{8!}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8!}$	$\frac{1}{8}$

30. Із слова ЗАДАЧА навмання вибирають одну літеру. Яка ймовірність того, що виберуть літеру А?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{3}$	$\frac{3!}{6!}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6!}$	$\frac{1}{2}$

31. Серед трьох відрізків, довжини яких дорівнюють 2 см, 2 см і 3 см, навмання вибирають два відрізки. Яка ймовірність того, що вибрані відрізки матимуть однакову довжину?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$

32. Серед чотирьох відрізків, довжини яких дорівнюють 1 см, 1 см, 2 см і 2 см, навмання вибирають два відрізки. Яка ймовірність того, що вибрані відрізки матимуть різну довжину?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$

33. На 10 картках виписано натуральні числа від 1 до 10. Навмання вибирають дві з них. Знайдіть імовірність того, що добуток чисел на вибраних картках буде непарним.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{9}$

34. У ящику лежать 10 яблук, три з яких надкушені. Яка ймовірність того, що всі три навмання вибраних яблука виявляться надкушеними?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{110}$	$\frac{1}{90}$	$\frac{3}{100}$	$\frac{3}{10}$

35. У класі сидять m дівчат і n хлопців. Один ХЛОПЕЦЬ піднімає руку і виходить із класу. Після цього вчитель навмання викликає учня до дошки. Яка ймовірність того, що до дошки вийде ДІВЧИНА?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{m}{m+n-1}$	$\frac{m-1}{m+n-1}$	$\frac{n}{m+n}$	$\frac{n-1}{m+n-1}$	$\frac{n}{m+n-1}$

36. У класі сидять m дівчат і n хлопців. Одна ДІВЧИНА піднімає руку і виходить із класу. Після цього вчитель навмання викликає учня до дошки. Яка ймовірність того, що до дошки вийде ДІВЧИНА?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{m}{m+n-1}$	$\frac{m-1}{m+n-1}$	$\frac{n}{m+n}$	$\frac{n-1}{m+n-1}$	$\frac{n}{m+n-1}$

37. Учитель зобразив на дошці відрізок $[-2; 3]$ і попросив ученицю навмання позначити на цьому відрізку якусь точку. Яка ймовірність того, що відстань від цієї точки до початку координат буде більшою за 1?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$

38. Учителька зобразила на дошці відрізок $[-3; 2]$ і попросила учня навмання позначити на цьому відрізку якусь точку. Яка ймовірність того, що відстань від цієї точки до початку координат буде меншою за 1?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$

39. У квадраті, розділеному на три багатокутники A , B , C (рис. 2), навмання вибирають точку. Укажіть правильну подвійну нерівність, якщо $P(A)$, $P(B)$ і $P(C)$ — імовірності того, що ця точка опиниться в багатокутнику A , B і C відповідно.

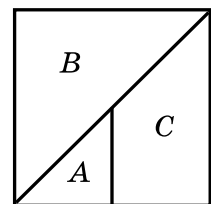


Рис. 2

А	Б	В
$P(C) < P(A) < P(B)$	$P(B) < P(A) < P(C)$	$P(A) < P(C) < P(B)$
Г		Д
$P(A) < P(B) < P(C)$		$P(B) < P(C) < P(A)$

40. У крузі, розділеному на три множини A , B , C (рис. 3), навмання вибирають точку. Укажіть правильну подвійну нерівність, якщо $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ — імовірності того, що ця точка опиниться в множині A , B , C відповідно.

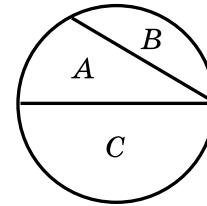


Рис. 3

А	Б
$P(C) < P(A) < P(B)$	$P(B) < P(A) < P(C)$
В	Г
$P(A) < P(C) < P(B)$	$P(A) < P(B) < P(C)$
Д	
$P(B) < P(C) < P(A)$	

41. Руслан, не цілячись, кидає дротик у мішень, зображену на рис. 4, і влучає в неї. Знайдіть імовірність того, що дротик потрапить у ту частину мішені, яка заштрихована на рисунку.

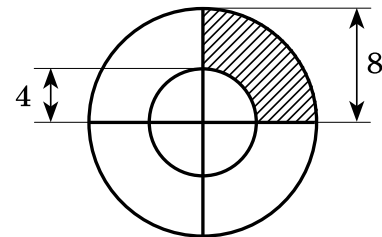


Рис. 4

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{8}$

42. Парашутист, не вибираючи місця для посадки, сідає на футбольне поле, план якого зображено на рис. 5. Яка ймовірність того, що він потрапить в один із двох однакових штрафних майданчиків, зображення яких заштриховані на рисунку?

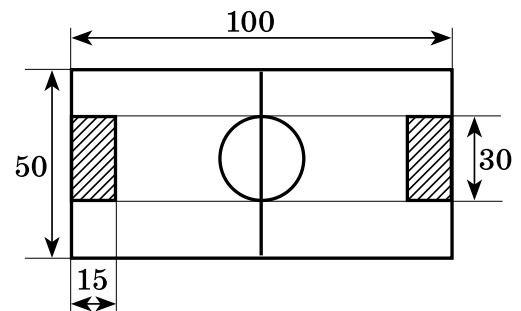


Рис. 5

А	Б	В	Г	Д
$\frac{9}{100}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{9}{50}$

43. У крузі радіуса 5 навмання вибрано точку. Знайдіть імовірність того, що вона виявиться всередині вписаного в цей круг квадрата.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2}{\pi}$	$\frac{4}{3\pi}$	$\frac{3}{\pi}$	$\frac{3}{4\pi}$	$\frac{5}{2\pi}$

44. У правильному трикутнику зі стороною 3 навмання вибрано точку. Знайдіть імовірність того, що вона виявиться всередині вписаного в цей трикутник круга.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$	$\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$	$\frac{2\pi}{3\sqrt{2}}$	$\frac{3\pi}{4\sqrt{3}}$

45. Площину розграфлено сіткою, вічком якої є квадрат зі стороною a . Знайдіть імовірність того, що навмання кинута на площину кругла монета радіуса $r < \frac{1}{2}a$ НЕ ПОТРАПИТЬ НА ЖОДНУ сторону квадрата.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{r^2}{a^2}$	$\left(1 - \frac{2r}{a}\right)^2$	$\left(1 - \frac{r}{a}\right)^2$	$1 - \frac{4r^2}{a^2}$	$\frac{2r}{a}$

46. Площину розграфлено паралельними прямими на відстані $2a$ одна від одної. Знайдіть імовірність того, що навмання кинута на площину кругла монета радіуса $r < a$ НЕ ПОТРАПИТЬ НА ЖОДНУ пряму.

А	Б	В	Г	Д
$\left(1 - \frac{r}{a}\right)^2$	$\frac{r}{a}$	$\left(1 - \frac{r}{2a}\right)^2$	$\frac{r}{2a}$	$1 - \frac{r}{a}$

47. Усього випущено 1000 лотерейних білетів благодійної лотереї. У таблиці подано інформацію про суму виграшу, яка випадає на лотерейний білет, та відповідну кількість таких лотерейних білетів для цієї лотереї.

Виграш, грн	1000	500	200	100
Кількість білетів, шт.	5	10	30	50

Яка ймовірність того, що на придбаний навмання білет цієї лотереї випаде виграш 200 грн?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2}{100}$	$\frac{2}{50}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{100}$

48. За умовою попередньої задачі визначте ймовірність того, що на придбаний навмання білет благодійної лотереї випаде виграш, більший за 500 грн.

А	Б	В	Г	Д
0	0,005	0,05	0,095	0,1

49. Протягом місяця супермаркет «АБВ» проводив опитування покупців стосовно суми грошей, витрачених ними за один візит на придбання кондитерських виробів. Результати опитування подано в таблиці.

Витрати на кондитерські вироби за 1 візит, грн	Менше за 40	40–80	80–120	Більше за 120	Усього
Кількість покупців, особи	5900	2200	1800	100	10000

Знайдіть наближене значення ймовірності того, що відвідувач супермаркету «АБВ» за один візит витратить на кондитерські вироби від 40 до 120 грн.

А	Б	В	Г	Д
0,18	0,22	0,5	0,4	0,6

50. За умовою попередньої задачі знайдіть наближене значення ймовірності того, що відвідувач супермаркету «АБВ» за один візит витратить на кондитерські вироби не більше ніж 80 грн.

А	Б	В	Г	Д
0,5	0,22	0,78	0,81	0,19

У завданнях 51–54 сформульовано проблему (питання), яку потрібно розв'язати (отримати однозначну відповідь на питання), використовуючи для цього додаткові дані — твердження (1) і (2). Визначте, чи достатньо цих даних для розв'язання проблеми, і оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь*.

51. У шухляді лежать три картки. На одній картці написано число 2, на другій — число 5, а на третій — або число 1, або число 3. Визначте, яке саме число написано на третій картці.

(1) Імовірність події «На витягнутій навмання із шухляди картці написано непарне число» дорівнює $\frac{2}{3}$.

(2) Імовірність події «Сума чисел, написаних на витягнутих навмання із шухляди двох картках, не менша за 4» дорівнює 1.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

52. У шухляді лежать три картки. На одній картці написано число 3, на другій — число 4, а на третій — або число 5, або число 6. Визначте, яке саме число написано на третій картці.

(1) Імовірність події «На витягнутій навмання із шухляди картці написано непарне число» дорівнює $\frac{1}{3}$.

(2) Імовірність події «Добуток чисел, написаних на витягнутих навмання із шухляди двох картках, є парним числом» дорівнює 1.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

* Саму проблему розв'язувати не обов'язково.

53. Юля і Дмитро, не цілячись, кидали дротики у квадратні мішені, зображені на рис. 6, причому кожний із них «обстрілював» свою мішень. Визначте, хто з дітей у яку мішень кидав дротики, якщо сторони обох квадратів однакові.

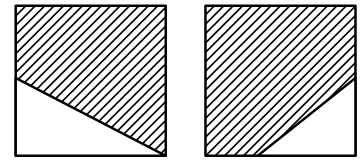


Рис. 6

- (1) Імовірність того, що Юля влучила в ту частину мішені, яка заштрихована на рисунку, більша за ймовірність того, що Дмитро влучив у ту частину мішені, яка заштрихована на рисунку.
- (2) Імовірність того, що Дмитро влучив у ту частину мішені, яка заштрихована на рисунку, більша за 0,5.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

54. Віра і Назар, не цілячись, кидали сніжки в круглі мішені, зображені на рис. 7, причому кожний із них «обстрілював» свою мішень. Визначте, хто з дітей у яку мішень кидав сніжки, якщо діаметри обох кругів однакові.

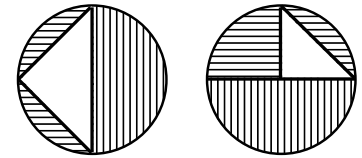


Рис. 7

- (1) Імовірність того, що Віра влучила в ту частину мішені, яка заштрихована вертикально на рисунку, дорівнює 0,5.
- (2) Імовірність того, що Назар влучив у ту частину мішені, яка заштрихована горизонтально на рисунку, більша за 0,25.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

У завданнях 55–56 порівняйте величини X і Y та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

55. Величина X : кількість різних упорядкованих наборів літер, утворених з усіх літер слова МАМА.
Величина Y : кількість різних упорядкованих наборів літер, утворених з усіх літер слова БРАТ.

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

56. Відомо, що $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$.

Величина X : C_n^5 .

Величина Y : A_n^5 .

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

Завдання на встановлення відповідності

У завданнях 57–60 до кожного рядка, позначеного цифрою, доберіть один відповідник, позначений літерою.

57. Зі стандартної колоди (36 карт) витягають навмання дві карти. Установіть відповідність між запитаннями (1–4) і числами (А–Д), які є відповідями на ці запитання.

- | | |
|---|------|
| 1 Скільки існує способів витягнути дві карти бубнової масті? | А 6 |
| 2 Скільки існує способів витягнути два тузи? | Б 16 |
| 3 Скільки існує способів витягнути одного туза й одну даму? | В 36 |
| 4 Скільки існує способів витягнути одну карту бубнової масті, а іншу — пікової масті? | Г 45 |
| | Д 81 |

58. Зі стандартної колоди (36 карт) витягають навмання шість карт. Установіть відповідність між запитаннями (1–4) і формулами (А–Д), які є відповідями на ці запитання.
- | | | | |
|---|--|---|------------------------|
| 1 | Скільки існує способів витягнути три карти бубнової масті й три карти пікової масті? | А | C_{36}^6 |
| 2 | Скільки існує способів витягнути три дами і три тузи? | Б | $C_9^3 \cdot C_9^3$ |
| 3 | Скільки існує способів витягнути ТІЛЬКИ три дами? | В | $C_4^3 \cdot C_4^3$ |
| 4 | Скільки існує способів витягнути ТІЛЬКИ три карти бубнової масті? | Г | $C_9^3 \cdot C_{27}^3$ |
| | | Д | $C_4^3 \cdot C_{32}^3$ |
59. З 20 карток, на яких записані натуральні числа від 1 до 20, вибирають навмання одну картку. Установіть відповідність між подіями (1–4) і ймовірностями цих подій (А–Д).
- | | | | |
|---|---|---|------|
| 1 | Число на картці ділиться націло на 4 | А | 0,2 |
| 2 | Число на картці більше за 5 | Б | 0,25 |
| 3 | Число на картці не ділиться націло на 5 | В | 0,5 |
| 4 | Число на картці не більше за 10 | Г | 0,75 |
| | | Д | 0,8 |
60. Кидають два однакові гральні кубики, на гранях кожного з яких написані числа 1, 2, 3, 4, 5 і 6. Установіть відповідність між подіями (1–4) і ймовірностями цих подій (А–Д).
- | | | | |
|---|---|---|----------------|
| 1 | Сума чисел, які випали, дорівнює 3 | А | $\frac{1}{36}$ |
| 2 | На одному кубіку випало число 3, а на іншому — число, НЕ МЕНШЕ за 3 | Б | $\frac{2}{36}$ |
| 3 | Сума чисел, які випали, дорівнює 4 | В | $\frac{3}{36}$ |
| 4 | На обох кубиках випало число 4 | Г | $\frac{4}{36}$ |
| | | Д | $\frac{5}{36}$ |

Завдання на встановлення послідовності

У завданнях 61–62 виберіть тільки необхідні для розв'язання поставленої задачі дії і розмістіть їх у правильній послідовності. У відповідь запишіть отриману послідовність літер.

- 61.** Серед a предметів, які є в дослідника, b мають властивість X . Серед усіх предметів навмання вибирають c предметів ($c < b$). Як знайти ймовірність p того, що всі вибрані c предметів мають властивість X ?
- А** Знайти загальну кількість елементарних подій n за формулою $n = a$.
- Б** Знайти загальну кількість елементарних подій n за формулою $n = C_a^c$.
- В** Знайти загальну кількість елементарних подій n за формулою $n = a!$
- Г** Знайти кількість сприятливих елементарних подій k за формулою $k = b$.
- Д** Знайти кількість сприятливих елементарних подій k за формулою $k = C_b^c$.
- Е** Знайти кількість сприятливих елементарних подій k за формулою $k = b!$
- Є** Обчислити шукану ймовірність p за формулою $p = \frac{k}{n}$.
- Ж** Обчислити шукану ймовірність p за формулою $p = \frac{n}{k}$.
- 62.** Многогранник Γ повністю міститься в многограннику Ω . У многограннику Ω навмання вибирають точку. Як знайти ймовірність того, що ця точка міститиметься також і у многограннику Γ ?
- А** Позначити через $m(\Omega)$ кількість вершин многогранника Ω .
- Б** Позначити через $m(\Omega)$ площу поверхні многогранника Ω .
- В** Позначити через $m(\Omega)$ об'єм многогранника Ω .
- Г** Позначити через $m(\Gamma)$ кількість вершин многогранника Γ .
- Д** Позначити через $m(\Gamma)$ площу поверхні многогранника Γ .
- Е** Позначити через $m(\Gamma)$ об'єм многогранника Γ .
- Є** Обчислити шукану ймовірність p за формулою $p = \frac{m(\Omega)}{m(\Gamma)}$.
- Ж** Обчислити шукану ймовірність p за формулою $p = \frac{m(\Gamma)}{m(\Omega)}$.

Завдання з короткою відповіддю

Розв'яжіть завдання 63–92 і запишіть відповідь **ОДНИМ ЧИСЛОМ**.

63. У студентській групі з 23 осіб усі студенти вивчають або англійську мову, або іспанську мову, або обидві мови одразу. Відомо, що англійську мову вивчають 18 студентів цієї групи, а іспанську мову — 12 студентів. Скільки студентів цієї групи вивчають обидві мови?
64. Із 44 учасників конференції 7 не знають ні англійської, ні німецької мови; 19 учасників знають англійську мову, із них 4 знають і англійську, і німецьку мови, а решта знають тільки німецьку мову. Скільки учасників конференції знають німецьку мову?
65. Одного разу Наталочці потрібно було з Борщагівки дістатися на Теремки, заїхавши по дорозі до подружки, яка живе на Подолі. Детально проаналізувавши карту-схему Києва, Наталочка виявила, що з Борщагівки на Поділ є чотири прямі автобусні маршрути, а з Подолу на Теремки — два. Скільки існує різних варіантів автобусної подорожі Наталочки з Борщагівки на Теремки через Поділ?
66. Одного разу Дмитрику потрібно було з Подолу дістатися на Троєщину, заїхавши по дорозі до товариша, який живе на Дарниці. Детально проаналізувавши карту-схему Києва, Дмитрик виявив, що з Подолу на Дарницю є три прямі автобусні маршрути, а з Дарниці на Троєщину — чотири. Скільки існує різних варіантів автобусної подорожі Дмитрика з Подолу на Троєщину через Дарницю?
67. На вершину гори ведуть 10 доріг. Скількома способами можна спочатку піднятися на гору, а потім спуститися з гори?
68. За умовою попередньої задачі визначте, скількома способами можна піднятися на гору, а потім спуститися з гори, якщо підйом і спуск відбуваються різними шляхами.
69. На рис. 8 зображено фрагмент плану кількох міських кварталів (вулиці позначено відрізками, квартали — квадратами). Потрібно дістатися від точки A до точки B , рухаючись уздовж вулиць тільки вгору або вправо. Скільки існує різних маршрутів, що задовольняють цю умову?

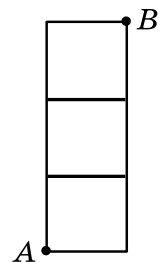


Рис. 8

70. На рис. 9 зображено фрагмент плану кількох міських кварталів (вулиці позначено відрізками, квартали — квадратами). Потрібно дістатися від точки C до точки D , рухаючись уздовж вулиць тільки вниз або вправо. Скільки існує різних маршрутів, що задовольняють цю умову?

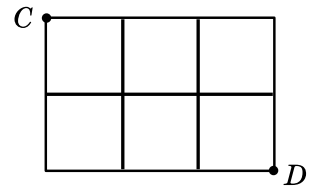


Рис. 9

71. Скільки різних чотирицифрових чисел можна утворити з цифр 0, 2, 4, 6, якщо кожна з них використовувати тільки один раз?
72. Скільки різних чотирицифрових чисел, що діляться на 5, можна утворити з цифр 0, 1, 3, 5, 7, якщо в кожному числі жодна з цифр не повторюється?
73. PIN-код мобільного телефону складається з чотирьох цифр. Василь Забувайло пам'ятає, що PIN-код його телефону закінчується нулем, а інші три цифри PIN-коду непарні й різні. Знайдіть НАЙБІЛЬШУ кількість варіантів наборів цифр, які міг би ввести до свого телефону пан Забувайло, шукаючи правильний PIN-код.
74. Бабуся Килина поклала речі до автоматичної камери схову і забула 4-значний код замка дверцят комірки. Після напружених роздумів бабуся згадала, що під час кодування дверцят вона використала всі цифри свого року народження по одному разу. Знайдіть НАЙБІЛЬШУ кількість спроб, які може здійснити бабуся Килина, щоб набрати правильний код, якщо вона народилася у 1945 році.
75. Скільки існує РІЗНИХ значень виразу $\log_a b$, якщо $a \in \{2; 3; 5\}$, $b \in \{7; 11; 13; 17\}$.
76. Скільки існує РІЗНИХ значень виразу $\log_c d$, якщо $c \in \{2; 3; 5\}$, $d \in \{1; 7; 11; 17\}$.
77. Під час міждержавних переговорів президенти кількох країн зустрічалися сам на сам, причому кожен президент зустрівся з кожним. Усього відбулося 36 зустрічей. Скільки президентів брало участь у переговорах?
78. Учасники шахового турніру зіграли кожен із кожним по дві партії. Усього на цьому турнірі було зіграно 110 партій. Скільки шахістів брали участь у цьому турнірі?

79. Скількома способами з 10 навчальних дисциплін можна скласти розклад одного навчального дня з 4 різних пар?
80. Скількома способами з 9 членів екзаменаційної комісії можна обрати голову, його заступника і секретаря?
81. У шухляді лежать 20 олівців, причому три з них — чорні, вісім — червоні, а решта — жовті. Із цієї шухляди беруть навмання один олівець. Яка ймовірність того, що він буде не чорним і не червоним?
82. У шухляді лежать 10 шматочків крейди, причому два з них — білі, п'ять — червоні, а решта — зелені. Із цієї шухляди беруть навмання один шматочок крейди. Яка ймовірність того, що він буде не зеленим?
83. У коробці лежать 64 цукерки, причому частина з них у жовтих обгортках, а частина — у синіх. Знайдіть кількість цукерок у жовтих обгортках, якщо ймовірність витягти навмання з цієї коробки одну цукерку в синій обгортці дорівнює 0,625.
84. У коробці лежать цукерки, причому частина з них із чорного шоколаду, а частина — з молочного. Знайдіть кількість цукерок із молочного шоколаду, якщо в цій коробці лежать 16 цукерок із чорного шоколаду, а ймовірність витягти навмання з цієї коробки одну цукерку з молочного шоколаду дорівнює 0,6.
85. Для збирання врожаю яблук відібрано два зайчики і три їжачки. З них навмання відбирають бригаду з двох звіряток. Яка ймовірність того, що в цій бригаді буде один зайчик і один їжачок?
86. Для поїдання всієї травички на лузі відібрано три віслючки і чотири лошатка. З них навмання відбирають бригаду з двох звіряток. Яка ймовірність того, що у цій бригаді буде один віслючок і одне лошатко?
87. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$, $AC = \sqrt{3}$ см, $BC = 8$ см) навмання вибирають точку O . Яка ймовірність того, що градусна міра кута OAC не перевищує 30° ?
88. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$, $AC = \sqrt{3}$ см, $BC = 8$ см) навмання вибирають точку O . Яка ймовірність того, що градусна міра кута OAC не перевищує 60° ?

89. У прямокутному трикутнику (рис. 10) навмання вибирають точку. Знайдіть імовірність того, що абсциса цієї точки НЕ МЕНША за 3.

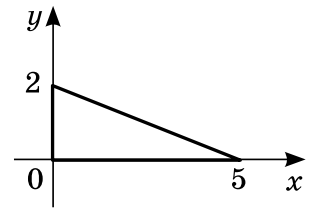


Рис. 10

90. У прямокутному трикутнику (рис. 10) навмання вибирають точку. Знайдіть імовірність того, що ордината цієї точки НЕ БІЛЬША за 1.
91. Після перевірки якості 10 000 футбольних м'ячів з'ясовано, що відносна частота події «Футбольний м'яч має дефект» дорівнює 0,005. Скільки серед перевірених футбольних м'ячів НЕ МАЮТЬ дефектів?
92. За даними статистичних досліджень, проведених серед повнолітніх у місті N , імовірність події «Мені більше 16 років і я користуюся мобільним зв'язком» дорівнює 0,75. Укажіть, скільки приблизно повнолітніх осіб НЕ КОРИСТУЮТЬСЯ мобільним зв'язком у місті N , якщо загальна кількість повнолітніх у цьому місті дорівнює 4400 осіб.

Завдання з повним розв'язанням

Завдання 93–100 розв'яжіть із повним обґрунтуванням, посилаючись на відповідні означення, твердження, формули. У разі потреби проілюструйте розв'язання таблицями, діаграмами, графіками тощо.

93. Знайдіть усі натуральні числа n , які задовольняють нерівність $A_{n+1}^2 + C_n^1 < 48$.
94. Знайдіть усі натуральні числа n , які задовольняють нерівність $A_{n-1}^2 - C_n^{n-1} \leq 34$.
95. Із ящика, в якому лежать n білих та $2n$ чорних куль, взяли навмання дві кулі. Знайдіть імовірність того, що обидві ці кулі виявляться білими. Доведіть, що ця ймовірність менша за $\frac{1}{9}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.
96. Із ящика, в якому лежать n білих та $2n$ чорних куль, взяли навмання дві кулі. Знайдіть імовірність того, що ці кулі будуть різного кольору. Знайдіть усі значення параметра $n \in \mathbb{N}$, при яких ця ймовірність більша за $\frac{1}{2}$.

97. Джузепе Сизий Ніс і його друг Карло домовилися зустрітися протягом 30 хв, щоб разом сходити в таверну. Відомо, що кожний із них чекатиме іншого рівно 10 хв, бо дуже їсти хочеться. Знайдіть імовірність того, що довгоочікувана зустріч друзів відбудеться, якщо кожний із них час свого приходу вибирає випадково.
98. Два геймери Кіндрат і Лаврентій вирішили зустрітися в чаті з 1-ї до 2-ї години ночі й обговорити нову версію однієї гри. Відомо, що Кіндрат може відірватися від нової іграшки і чекати друга в чаті не більше ніж 10 хв, а більш терплячий Лаврентій — не більше ніж 15 хв. Яка ймовірність того, що зустріч друзів-геймерів усе-таки відбудеться?
99. Навмання взято два додатні числа x і y , кожне з яких не перевищує 2. Знайдіть імовірність того, що $xy \leq 1$, а $\frac{y}{x} \leq 2$.
100. У трикутнику з вершинами в точках $(0;0)$, $(1;0)$, $(1;1)$ вибирають навмання точку $M(a;b)$. Знайдіть імовірність того, що рівняння $x^2 + ax + b = 0$ має два дійсні корені.

10.2. Основні теореми теорії ймовірностей. Математична статистика

Найпростіші завдання з повним розв'язанням

Завдання 1–20 розв'яжіть УСНО.

1. Подія A = «Завтра буде сонячна погода», а подія B = «Післязавтра буде сонячна погода». Знайдіть події $A \cdot B$; $A + B$; \bar{A} ; \bar{B} ; $\bar{A} \cdot B$; $A \cdot \bar{B}$; $\bar{A} \cdot \bar{B}$; $\bar{A} + B$; $A + \bar{B}$; $\bar{A} + \bar{B}$.
2. Наведіть приклади подій A і B , якщо вони:
 - а) несумісні й незалежні;
 - б) несумісні й залежні;
 - в) сумісні й незалежні;
 - г) сумісні й залежні.
3. Наведіть приклади трьох подій A , B , C , які задовольняють такі умови:
 - а) події A , B , C попарно несумісні;
 - б) одна з подій A , B , C обов'язково відбувається.
4. Події A і B несумісні. Знайдіть $P(A + B)$, якщо $P(A) = 0,1$, $P(B) = 0,4$.
5. Події A і B незалежні. Знайдіть $P(A \cdot B)$, якщо $P(A) = 0,1$, $P(B) = 0,4$.

16. Дано вибірку з 20 чисел: 1, 7, 3, 4, 2, 5, 1, 3, 1, 5, 1, 6, 7, 8, 2, 4, 5, 1, 6, 4. Знайдіть:
- кількість варіантів цієї вибірки;
 - частоти варіантів 1, 2, 5, 8;
 - найбільшу частоту цієї вибірки;
 - моду цієї вибірки.

17. На гістограмі (рис. 11) зображено результати опитування стосовно розміру взуття учениць 11-х класів однієї зі шкіл міста N (x — розмір взуття, n — кількість учениць). За цією гістограмою знайдіть:
- загальну кількість опитаних дівчат;
 - частоти варіантів 36, 37, 38, 39, 40;
 - найбільшу частоту;
 - моду.

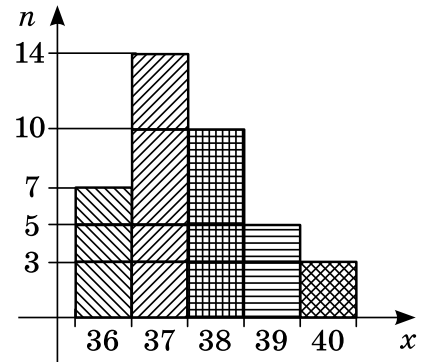


Рис. 11

18. Найменший і найбільший елементи вибірки дорівнюють 4 і 10 відповідно. Укажіть число, яке може бути середнім арифметичним значенням цієї вибірки: 4; 10; 14; 7; 4,1; 2; 9.
19. Найменший і найбільший елементи вибірки дорівнюють 4 і 10 відповідно. Укажіть число, яке може бути медіаною цієї вибірки: 4; 10; 14; 7; 4,1; 2; 9.
20. Найменший і найбільший елементи вибірки дорівнюють 4 і 10 відповідно. Укажіть число, яке може бути модою цієї вибірки: 4; 10; 14; 7; 4,1; 2; 9.

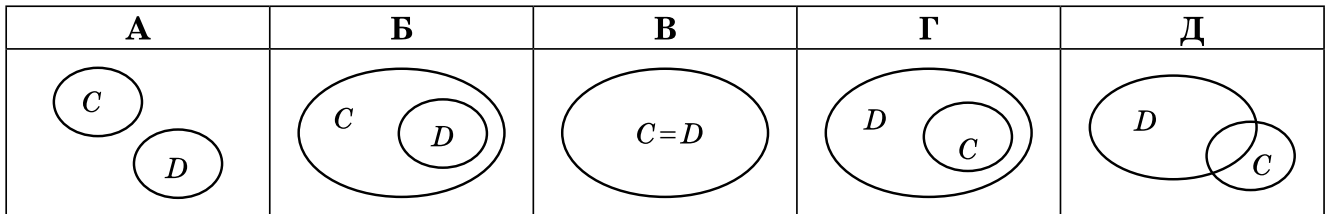
Завдання з вибором однієї правильної відповіді

Проаналізуйте умови та вимоги завдань 21–50 та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

21. Один раз підкидають стандартний однорідний гральний кубик. Нехай подія A = «Випала кількість очок, яка є простим числом», подія B = «Випала парна кількість очок». Укажіть діаграму, на якій правильно зображено події A і B .

А	Б	В	Г	Д

22. Зі стандартної колоди виймають навмання одну карту. Нехай подія C = «Вийняли карту хрестової масті», подія D = «Вийняли бубнового або чирвого короля». Укажіть діаграму, на якій правильно зображено події C і D .



23. Із трьох несумісних подій A , B , C одна обов'язково відбувається, тобто $A + B + C = \Omega$ (див. діаграму на рис. 12). Знайдіть $P(B+C)$, якщо $P(A):P(B):P(C) = 2:5:3$.

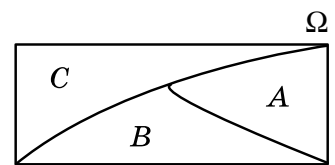


Рис. 12

А	Б	В	Г	Д
0,6	0,8	0,7	0,5	0,9

24. Парашутист під час змагань на точність приземлення завжди влучає ногами в спеціальну «мішень», зображену на рис. 13. Імовірність влучення в частину мішені, позначену літерою A , дорівнює 0,3, а ймовірності влучення в частини мішені, позначені літерами B і C , рівні між собою. Яка ймовірність того, що парашутист влучить у частину A або в частину C ?

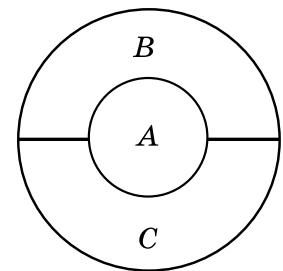


Рис. 13

А	Б	В	Г	Д
0,75	0,7	0,65	0,6	0,35

25. У коробці в повному безладі лежить стандартний комплект шахових фігур: 8 білих і 8 чорних пішаків, 2 білі і 2 чорні коні, 2 білі і 2 чорні слони, 2 білі і 2 чорні тури, білий і чорний ферзі та білий і чорний королі. Світланка навмання виймає з коробки якусь шахову фігуру. Яка ймовірність того, що ця фігура біла або є пішаком?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	1

26. У коробці в повному безладі лежить стандартний комплект шахових фігур: 8 білих і 8 чорних пішаків, 2 білі і 2 чорні коні, 2 білі і 2 чорні слони, 2 білі і 2 чорні тури, білий і чорний ферзі та білий і чорний королі. Тетянка навмання виймає з коробки якусь шахову фігуру. Яка ймовірність того, що ця фігура біла або є конем?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

27. Сувенірну монету виготовлено таким чином, що при її підкиданні герб випадає в середньому один раз на 4 підкидання. Знайдіть ймовірність того, що під час одночасного підкидання сувенірної та звичайної симетричної монет випадуть два герби.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

28. Кидають одночасно стандартну симетричну монету й однорідний гральний кубик. Яка ймовірність того, що на монеті випаде герб, а на кубику — більше двох очок?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$

29. У лотереї розігрувалися грошові призи. Усього залишилося 7 лотерейних білетів, серед яких тільки 2 виграшних. Наталя і Марина придбали по черзі по одному лотерейному білету. Яка ймовірність того, що Наталя виграла грошовий приз, а Марина — ні?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{10}{49}$	$\frac{5}{7}$

30. У лотереї розігрувалися грошові призи. Усього залишилося 7 лотерейних білетів, серед яких тільки 2 виграшних. Ярослав і Максим придбали по черзі по одному лотерейному білету. Яка ймовірність того, що обидва хлопці виграла грошові призи?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{49}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{49}$	$\frac{1}{21}$

31. На проміжку $[0; 2]$ навмання вибирають дві точки. Яка ймовірність того, що обидві ці точки належатимуть проміжку $[1,5; 2]$?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

32. На проміжку $[0; 2]$ навмання вибирають дві точки. Яка ймовірність того, що перша точка належатиме проміжку $[0; 1]$, а друга точка належатиме проміжку $[1; 2]$?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	1

33. Робітник обслуговує два вузли технологічної лінії, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що протягом години обслуговування потребуватиме перший вузол, дорівнює 0,3, що другий вузол — дорівнює 0,4. Знайдіть ймовірність того, що протягом години обслуговування потребуватиме ТІЛЬКИ другий вузол.

А	Б	В	Г	Д
0,18	0,6	0,4	0,5	0,28

34. За умовою попередньої задачі знайдіть ймовірність того, що протягом години обслуговування потребуватиме ТІЛЬКИ один із вузлів (або перший, або другий).

А	Б	В	Г	Д
1	0,12	0,58	0,46	0,7

35. Молода господиня консервує кабачки. Ймовірність того, що банка НЕ ВИБУХНЕ протягом тижня, дорівнює p . Укажіть формулу, за якою обчислюється ймовірність вибуху протягом тижня точно 4 банок із 5 законсервованих.

А	Б	В	Г	Д
0,8	$0,2p^4(1-p)$	$5p^4(1-p)$	$0,2p(1-p)^4$	$5p(1-p)^4$

36. Молодий господар забиває цвяхи в дошку. Ймовірність того, що він при одному ударі НЕ ВЛУЧИТЬ собі по пальцю, дорівнює p . Укажіть формулу, за якою обчислюється ймовірність точно 9 влучень молодого господаря по власному пальцю з 10 спроб забити цвях у дошку.

А	Б	В	Г	Д
$0,1p(1-p)^9$	$0,1p^9(1-p)$	$10p^9(1-p)$	$10p(1-p)^9$	0,9

37. Автоматичний секретар навмання ставить на кореспонденції один із трьох штампів: «ТАК», «НІ» або «ВІДКЛАСТИ». Одного дня автоматичний секретар «відповів» на 8 листів. Укажіть формулу, за якою обчислюється ймовірність того, що тільки на трьох листах було поставлено штамп «ТАК».

А	Б	В	Г	Д
$\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5$	$C_8^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7$	$C_8^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7$	$C_8^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5$

38. Двоє друзів Микола та Григорій грають у шахи, причому ймовірності виграти, зіграти внічию та програти для Миколи відносяться як 1:3:1. Одного разу Микола та Григорій зіграли 10 партій у шахи. Укажіть формулу, за якою обчислюється ймовірність того, що вони зіграли внічию тільки двічі.

А	Б	В	Г	Д
$C_{10}^2 \cdot (0,6)^2 \cdot (0,4)^8$	$C_{10}^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8$	$C_{10}^2 \cdot (0,5)^2 \cdot (0,5)^8$	$C_{10}^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8$	$C_{10}^2 \cdot (0,4)^2 \cdot (0,6)^8$

39. В одному королівстві закон про смертний вирок був м'якшим, ніж в інших. Засудженому дозволялось розкласти по двох коробках 2 білі і 2 чорні кулі. Правитель навмання вибирав коробку і з неї навмання вилучав кулю (якщо перша коробка виявлялася порожньою, правитель брав другу). Біла куля означала життя, а чорна — страту. Яким чином засуджений мусив розкласти кулі по коробках, щоб забезпечити собі порятунок з максимальною ймовірністю? Укажіть правильну схему розкладання куль.

А	Б	В	Г	Д

40. У коробці містяться 5 куль. Усі варіанти щодо кількості білих куль, зображені на рисунках А–Д, є однаково ймовірними. Імовірність якого з наведених варіантів є найбільшою, якщо навмання вибрана з цієї коробки куля виявилася білою?

А	Б	В	Г	Д

41. Діаграма, зображена на рис. 14, містить інформацію про температуру повітря (у °С) протягом п'яти робочих днів одного тижня. Укажіть день, у який температура повітря була найближчою до середнього значення температури за ці п'ять днів.

А	Б	В	Г	Д
Понеділок	Вівторок	Середа	Четвер	П'ятниця

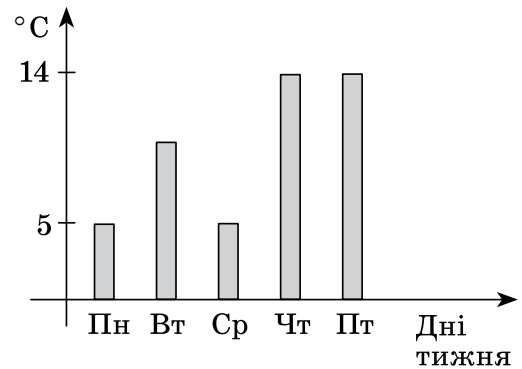


Рис. 14

42. Діаграма, зображена на рис. 15, містить інформацію про кількість відвідувачів автосалону протягом п'яти робочих днів одного тижня. Укажіть день, у який кількість відвідувачів була найближчою до середнього значення за ці п'ять днів.

А	Б	В	Г	Д
Понеділок	Вівторок	Середа	Четвер	П'ятниця

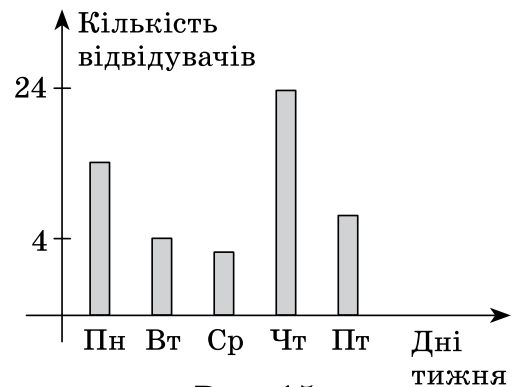


Рис. 15

43. Маса одного контейнера дорівнює 80 кг. Знайдіть середнє арифметичне маси n таких контейнерів.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{80}{n}$ кг	80 кг	$\frac{n}{80}$ кг	n кг	$80n$ кг

44. Висота одного типового будинку дорівнює k м. Знайдіть середнє арифметичне значення висоти 10 таких будинків.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{10}{k}$ м	10 м	$\frac{k}{10}$ м	k м	$10k$ м

45. Знайдіть x , якщо відомо, що середнє арифметичне трьох чисел $x+1$, $x+3$ і $x+5$ дорівнює 0.

А	Б	В	Г	Д
-1	0	-3	-2	-5

46. Середнє арифметичне оцінок двох учнів за контрольну роботу дорівнює 8 балів. Знайдіть оцінку другого учня, якщо перший отримав 5 балів.

А	Б	В	Г	Д
8 балів	9 балів	10 балів	11 балів	12 балів

47. Дано вибірку об'єму n ($n > 10$). Перші 8 елементів цієї вибірки є такими: 1, 3, 3, 5, 5, 5, 7, 7. Решта елементів вибірки дорівнюють 9. Укажіть число, яке може бути середнім арифметичним значенням цієї вибірки.

А	Б	В	Г	Д
2	4	5	8	9

48. Задано вибірку об'єму 3: x , 5, 7. Відомо, що $x \in (0; 3)$. Укажіть проміжок, якому належить середнє арифметичне значення цієї вибірки.

А	Б	В	Г	Д
$(0; 3)$	$(3; 4)$	$(4; 5)$	$(5; 6)$	$(6; 7)$

49. Семеро осіб відповіли на запитання: «Скільки разів за останній рік ви відвідували театр?» Відповіді були такими: 0, 2, 19, 6, 5, 2, 8. Знайдіть медіану цієї вибірки.

А	Б	В	Г	Д
5	0	19	2	6

50. За умовою попередньої задачі знайдіть моду вказаної вибірки.

А	Б	В	Г	Д
5	0	19	2	6

У завданнях 51–54 сформульовано проблему (питання), яку потрібно розв'язати (отримати однозначну відповідь на питання), використовуючи для цього додаткові дані — твердження (1) і (2). Визначте, чи достатньо цих даних для розв'язання проблеми, і оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь*.

51. Відомо, що $P(A + B) = 0,5$. Установіть, чи є сумісними події A і B .

(1) $P(A) = 0,6$.

(2) $P(B) = 0,7$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

* Саму проблему розв'язувати не обов'язково.

52. Відомо, що $P(C + D) = 0,8$. Установіть, чи є сумісними події C і D .

(1) $P(C) = 0,3$.

(2) $P(D) = 0,5$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

53. П'ятеро друзів отримали за контрольну роботу п'ять різних оцінок за 12-бальною шкалою: 7, 4, 9, 11 і x . Знайдіть x .

(1) Середнє арифметичне оцінок п'яти друзів дорівнює 7,8.

(2) Медіана цієї вибірки дорівнює x .

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

54. П'ятеро подруг отримали за контрольну роботу п'ять оцінок за 12-бальною шкалою: 7, 6, 9, 11 і x . Знайдіть x .

(1) Медіана цієї вибірки дорівнює 7.

(2) Мода цієї вибірки дорівнює 7.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

У завданнях 55–56 порівняйте величини X і Y та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

55. Симетричну монету підкидають 5 разів.

Величина X : імовірність того, що герб випаде 2 рази.

Величина Y : імовірність того, що герб випаде ТІЛЬКИ при першому й останньому підкиданнях.

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

56. Симетричну монету підкидають 5 разів.
 Величина X : імовірність того, що герб випаде 2 рази.
 Величина Y : імовірність того, що герб випаде 3 рази.

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

Завдання на встановлення відповідності

У завданнях 57–60 до кожного рядка, позначеного цифрою, доберіть один відповідник, позначений літерою.

57. Два спортсмени стріляють в одну й ту саму мішень. Імовірність влучення для першого спортсмена дорівнює a , а для другого — b ($a \in (0; 1)$, $b \in (0; 1)$). Установіть відповідність між подіями (1–4) та виразами для обчислення ймовірності (А–Д) цих подій.
- | | |
|---|----------------|
| 1 Обидва спортсмени влучили в мішень | А $(1-a)b$ |
| 2 Перший спортсмен влучив у мішень, а другий — ні | Б ab |
| 3 Другий спортсмен влучив у мішень, а перший — ні | В $(1-a)(1-b)$ |
| 4 Обидва спортсмени НЕ влучили в мішень | Г $1-ab$ |
| | Д $a(1-b)$ |
58. Три студенти складають залік. Імовірність скласти залік для першого студента дорівнює a , для другого — b , а для третього — c ($a \in (0; 1)$, $b \in (0; 1)$, $c \in (0; 1)$). Установіть відповідність між подіями (1–4) та виразами для обчислення ймовірності (А–Д) цих подій.
- | | |
|--|---------------------|
| 1 Усі три студенти склали залік | А $(1-a)bc$ |
| 2 Усі три студенти НЕ склали залік | Б $a(1-b)(1-c)$ |
| 3 Хоча б один студент НЕ склав залік | В abc |
| 4 Перший студент склав залік, а інші двоє — ні | Г $1-abc$ |
| | Д $(1-a)(1-b)(1-c)$ |
59. У магазині одягу протягом одного дня було продано 10 чоловічих костюмів таких розмірів: 48, 48, 48, 50, 50, 52, 54, 54, 56, 60. Установіть відповідність між статистичними характеристиками одержаної вибірки (1–4) і їх числовими значеннями (А–Д).
- | | |
|-----------------------|------|
| 1 Мода | А 10 |
| 2 Медіана | Б 12 |
| 3 Середнє арифметичне | В 48 |
| 4 Розмах вибірки | Г 51 |
| | Д 52 |

60. На рис. 16 зображено полігон частот варіаційного ряду. Установіть відповідність між статистичними характеристиками цього варіаційного ряду (1–4) і їх числовими значеннями (А–Д).

- | | |
|-----------------------|-------------------|
| 1 Об'єм вибірки | А 20 |
| 2 Мода | Б 30 |
| 3 Середнє арифметичне | В $36\frac{1}{3}$ |
| 4 Розмах вибірки | Г $42\frac{2}{3}$ |
| | Д 60 |

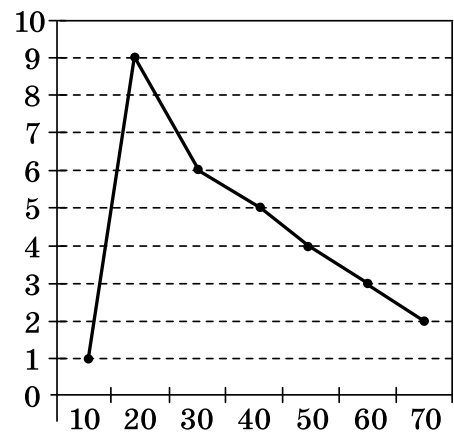


Рис. 16

Завдання на встановлення послідовності

У завданнях 61–62 виберіть тільки необхідні для розв'язання поставленої задачі дії і розмістіть їх у правильній послідовності. У відповідь запишіть отриману послідовність літер.

61. На рис. 17 зображено ділянку електричного кола ХУ. Запобіжники А, В і С виходять з ладу протягом тижня незалежно один від одного з імовірностями a , b і c відповідно ($0 < a < 1$, $0 < b < 1$, $0 < c < 1$). Як знайти ймовірність p того, що протягом тижня лампочка Z погасне?

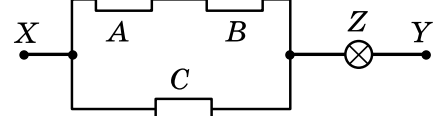


Рис. 17

- А Обчислити ймовірність t за формулою $t = ab$.
- Б Обчислити ймовірність t за формулою $t = a + b$.
- В Обчислити ймовірність t за формулою $t = a + b - ab$.
- Г Обчислити ймовірність t за формулою $t = 1 - ab$.
- Д Обчислити шукану ймовірність p за формулою $p = tc$.
- Е Обчислити шукану ймовірність p за формулою $p = t + c$.
- Є Обчислити шукану ймовірність p за формулою $p = t + c - tc$.
- Ж Обчислити шукану ймовірність p за формулою $p = 1 - tc$.

62. На рис. 18 зображено ділянку електричного кола XU . Запобіжники K , L і M виходять з ладу протягом тижня незалежно один від одного з імовірностями k , l і m відповідно ($0 < k < 1$, $0 < l < 1$, $0 < m < 1$). Як знайти ймовірність p того, що протягом тижня лампочка Z погасне?

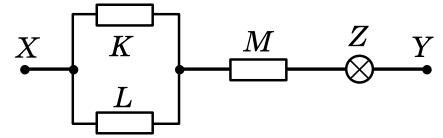


Рис. 18

- А Обчислити ймовірність a за формулою $a = kl$.
 Б Обчислити ймовірність a за формулою $a = k + l$.
 В Обчислити ймовірність a за формулою $a = k + l - kl$.
 Г Обчислити ймовірність a за формулою $a = 1 - kl$.
 Д Обчислити шукану ймовірність p за формулою $p = ma$.
 Е Обчислити шукану ймовірність p за формулою $p = m + a$.
 Є Обчислити шукану ймовірність p за формулою $p = m + a - ma$.
 Ж Обчислити шукану ймовірність p за формулою $p = 1 - ma$.

Завдання з короткою відповіддю

Розв'яжіть завдання 63–92 і запишіть відповідь **ОДНИМ ЧИСЛОМ**.

63. На 120 картках написано натуральні числа від 1 до 120 включно. Яка ймовірність того, що число, написане на витягнутій навмання картці, ділиться націло або на 4, або на 5?
64. На 200 картках написано натуральні числа від 1 до 200 включно. Яка ймовірність того, що число, написане на витягнутій навмання картці, ділиться націло або на 2, або на 3?
65. На тренуванні Роман кидає баскетбольний м'яч у кошик з трьох різних позначок. За влучення з першої та другої позначок нараховується 1 бал, а за влучення з третьої — нараховуються 2 бали. Імовірність влучення в кошик з першої позначки дорівнює 0,4, з другої — дорівнює 0,3, а з третьої — дорівнює 0,2. Яка ймовірність того, що, кинувши м'яч з кожної позначки по одному разу, Роман у підсумку набере 2 бали?
66. На тренуванні Павло стріляє по мішені з трьох різних відстаней. За влучення з першої та другої відстаней нараховується 1 бал, а за влучення з третьої — нараховуються 2 бали. Імовірність влучення в мішень з першої відстані дорівнює 0,4, з другої — дорівнює 0,3, а з третьої — дорівнює 0,2. Яка ймовірність того, що, вистріливши з кожної відстані по одному разу, Павло в підсумку набере 1 бал?

67. Два однаково вправні гравці (імовірність виграшу для кожного дорівнює 0,5) грають у гру, яка не допускає нічиєї. Вони зробили рівні ставки по 50 грн і домовилися, що той, хто раніше виграє 10 партій, одержить усі гроші. Гру було припинено з рахунком 9:8. Як гравці повинні розподілити гроші, якщо ці гроші мають бути розподілені пропорційно ймовірностям виграти 10 партій після зупинки гри? У відповідь запишіть кількість гривень, що дістанеться гравцю, який виграв 8 партій.
68. За умовою попередньої задачі знайдіть суму грошей (у грн), що має взяти гравець, який вже набрав 9 очок, якщо гру припинили з рахунком 9:7.
69. Прилад складено з двох блоків, які працюють незалежно один від одного і з'єднані послідовно, тобто прилад працюватиме безвідмовно, якщо ВСІ його блоки працюватимуть безвідмовно. Знайдіть імовірність відмови приладу, якщо ймовірності безвідмовної роботи першого та другого блоків дорівнюють 0,9 і 0,8 відповідно.
70. Прилад складено з двох блоків, які працюють незалежно один від одного і з'єднані паралельно, тобто прилад працюватиме безвідмовно, якщо ХОЧА Б ОДИН блок не вийде з ладу. Обчисліть імовірність безвідмовної роботи приладу, якщо надійності першого та другого блоків дорівнюють 0,9 і 0,8 відповідно.
71. Вернидуб, Вернигора і Крутивус допомагали Котигорошку шукати шлях через зачарований ліс. Імовірність вдалого завершення пошуків для Вернидуба дорівнює 0,8; для Вернигори дорівнює 0,4; для Крутивуса дорівнює 0,5. Яка ймовірність того, що всім трьом багатирям вдалося допомогти Котигорошку?
72. Три Паньки допомагали Оленці шукати квітку папороті в ніч на Івана Купала. Імовірність вдалого пошуку для першого Панька дорівнює 0,2; для другого дорівнює 0,4; для третього дорівнює 0,5. Яка ймовірність того, що хоча б один із Паньків виконає все-таки свою високу місію?
73. Під час тестування в деякій аудиторії працюють три приховані телекамери спостереження. Перша з них увімкнута 90 %, друга — 60 %, а третя — 50 % усього часу, причому незалежно від того, увімкнуті інші телекамери чи ні. Знайдіть імовірність того, що момент спроби списування абітурієнтом X був знятий ТІЛЬКИ ДВОМА телекамерами.
74. За умовою попередньої задачі знайдіть імовірність того, що момент спроби списування абітурієнтом Y був знятий ПРИНАЙМНІ ДВОМА телекамерами?

75. У баби Палажки живуть дві кицьки: Муся і Дуся. Імовірність того, що Муся зробить шкоду протягом доби, дорівнює p . Для Дусі ймовірність цієї події дорівнює $0,7$. Знайдіть p , якщо ймовірність того, що протягом доби **ТІЛЬКИ ОДНА** з кицьок зробить шкоду, дорівнює $0,412$, а кожна з кицьок шкодить не більше одного разу на добу, незалежно одна від одної.
76. Сержант Петро Цікавий під час стрільби влучає в мішень з однаковою ймовірністю p незалежно від номера пострілу, а ймовірність хоча би одного влучення в мішень паном Цікавим при чотирьох пострілах дорівнює $0,9984$. Знайдіть p .
77. Два гравці по черзі кидають симетричну монету. Виграє той, у кого раніше випаде герб. Знайдіть імовірність виграшу для гравця, який починає гру.
78. В урні знаходяться 3 білі і 9 чорних куль. Гравці A і B по черзі виймають по одній кулі, повертаючи їх до урни. Виграє той, хто раніше витягне білу кулю. Обчисліть імовірність виграшу гравця B , якщо гру починає гравець A .
79. Майстер карате щодня тренується в розбиванні цегли ребром долоні. Відомо, що в середньому він розбиває 8 цеглин із кожних 10. Яка ймовірність того, що під час показового виступу серед чотирьох цеглин майстер розіб'є рівно дві, нанісши по кожній із них по одному удару? Відповідь округліть до тисячних.
80. Футболіст Кіндрат Бабайкін у середньому забиває один гол після 10 ударів у площину воріт. Протягом останнього матчу він влучив у площину воріт чотири рази. Яка ймовірність того, що в цьому матчі на рахунок пана Бабайкіна буде дубль (два голи) у ворота суперників? Відповідь округліть до тисячних.
81. Із шухляди, у якій лежать 8 жовтих і 4 зелені олівці, навмання виймають по одному олівцю, не повертаючи їх до шухляди. Яка ймовірність того, що перший вийнятий олівець буде зеленим, а другий — жовтим?
82. Із шухляди, у якій лежать 8 жовтих і 4 зелені олівці, навмання виймають по одному олівцю, не повертаючи їх до шухляди. Яка ймовірність того, що перші два олівці будуть жовтими, а третій — зеленим?
83. Кіт Матроскін, пес Шарик, дядько Федір та листоноша Печкін знайшли скарб, розділивши який за справедливістю, отримали в середньому по 15 золотих монет. Але наступного дня Печкін дізнався, що він виграв джек-пот Простоквашинської лотереї. Тому щасливий листоноша вирішив подарувати свою частину скарбу вчорашнім компаньйонам. Якою стане після цього середня кількість монет у Матроскіна, Шарика та дядька Федора?

84. Лисичка-сестричка, Вовчик-братик, Зайчик-побігайчик та Їжачок-колючка знайшли на лісовій галявині забуті кимось ваги. Після колективного зважування всіх чотирьох звіряток з'ясувалося, що середня маса кожного з них дорівнює 12 кг. Розумник Зайчик помітив, що якби він не брав участь у зважуванні, то середня маса Лисички, Вовчика та Їжачка дорівнювала б 14 кг. Яка маса Зайчика (у кг)?
85. Середня норма заселення готелю протягом літнього сезону (травень–вересень) становить 96 %, а протягом решти часу (жовтень–квітень) — 36 %. Знайдіть середній відсоток заселення готелю протягом усього року.
86. Середня норма відвідування сауни протягом холодного сезону (листопад–березень) становить 84 %, а протягом решти часу (квітень–жовтень) — 36 %. Знайдіть середній відсоток відвідування сауни протягом усього року.
87. Учні 11-го класу проходили тестування з математики, під час якого оцінка виставлялася за 100-бальною шкалою. Середнє арифметичне оцінок учнів усього класу, в якому навчається 10 юнаків і 12 дівчат, дорівнює 90 балів, а середнє арифметичне оцінок тільки юнаків дорівнює 87 балів. Знайдіть середнє арифметичне оцінок дівчат цього класу.
88. Учні 11-го класу проходили тестування з української мови, під час якого оцінка виставлялася за 100-бальною шкалою. Середнє арифметичне оцінок 10 перших за списком учнів цього класу дорівнює 86 балів. Знайдіть середнє арифметичне оцінок решти 20 учнів цього класу, якщо відомо, що середнє арифметичне оцінок усіх 30 учнів класу дорівнює 93 бали.
89. Один із варіантів вибірки об'єму $n = 3$ дорівнює 15. Число 12 є модою і медіаною цієї вибірки. Знайдіть середнє арифметичне значення цієї вибірки.
90. Один із варіантів вибірки об'єму $n = 5$ дорівнює 8. Вибірka має дві моди, одна з яких дорівнює 3, а друга дорівнює 12. Знайдіть різницю між медіаною цієї вибірки та середнім арифметичним значенням цієї вибірки.
91. Три подружки Віка, Віра та Катя вирішили зважитися. Катя та Віра в середньому важать по 60 кг, Катя та Віка — по 56 кг, а Віра та Віка — по 61 кг. Знайдіть середню масу (у кг) усіх трьох подружок разом.
92. Три Паньки купили на базарі по одному кульку соняшникового насіння, причому перший і другий у середньому купили по 1,5 кг, другий і третій — у середньому по 3,5 кг, а перший і третій — у середньому по 3 кг. Скільки у середньому кілограмів насіння купили на кожного всі три Паньки разом? Відповідь округліть до тисячних.

Завдання з повним розв'язанням

Завдання 93–100 розв'яжіть із повним обґрунтуванням, посилаючись на відповідні означення, твердження, формули. У разі потреби проілюструйте розв'язання таблицями, діаграмами, графіками тощо.

93. Імовірність влучення в мішень з одного пострілу для стрільця A дорівнює $0,5$, для стрільця B дорівнює $0,6$, а для стрільця C дорівнює $0,4$. Відомо, що після одночасного залпу всіх трьох стрільців по одній мішені були виявлені тільки два влучення. Що більш імовірно: стрілець C влучив у мішень чи не влучив?
94. Імовірність своєчасної сплати податків для підприємця A дорівнює $0,5$, для підприємця B дорівнює $0,6$, а для підприємця C дорівнює $0,2$. Відомо, що тільки один підприємець своєчасно сплатив податки. Що більш імовірно: підприємець A сплатив податки чи не сплатив?
95. Завод випускає крейду, розфасовану в пакети по 250 г. Перевіркою встановлено, що 5% пакетів мають масу, меншу за 245 г, 10% пакетів мають масу, більшу за 255 г, а решта пакетів мають допустиму масу — від 245 г до 255 г. З досить великої партії навмання взято 3 пакети з крейдою. Знайдіть імовірність того, що:
- усі три пакети мають допустиму масу;
 - хоча б один пакет з трьох має допустиму масу.
96. Молокозавод випускає молоко, розфасоване в пакети по 1000 г. Перевіркою встановлено, що 2% пакетів мають масу, меншу за 990 г, 1% пакетів мають масу, більшу за 1010 г, а решта пакетів мають допустиму масу — від 990 г до 1010 г. З досить великої партії навмання взято 3 пакети молока. Знайдіть імовірність того, що:
- усі три пакети мають масу, більшу за 990 г;
 - один пакет має масу, меншу за 990 г, а два — допустиму масу.
97. У Країні проводять ТІЛЬКИ три лотереї. За даними опитування гравців відомо, що в середньому з 10 осіб 2 грають у першу лотерею, 5 — у другу, а 3 — у третю. Імовірності виграшу під час гри в першу, другу та третю лотерею дорівнюють $0,01$; $0,05$ і $0,02$ відповідно. Авторитетна комісія з перевірки таланності навмання вибирає жителя Країни. Знайдіть імовірність того, що він:
- вигравав у лотерею;
 - грав саме в другу лотерею, якщо відомо, що він виграв у якусь лотерею.

98. У містечку M є ТІЛЬКИ три перукарні. Відомо зі спостережень, що в середньому з 10 осіб 5 вибирають першу перукарню, 2 — другу, а 3 — третю. Імовірності вдалої стрижки в першій, другій та третій перукарнях дорівнюють 0,9; 0,7 і 0,8 відповідно. Авторитетна комісія з перевірки якості надання перукарських послуг навмання вибирає жителя містечка. Знайдіть імовірність того, що він:
- буде вдало пострижений;
 - стригся саме в першій перукарні, якщо відомо, що він вдало пострижений.
99. Керівництво юридичної фірми планує підвищити якість обслуговування клієнтів. З цією метою протягом місяця співробітники фіксували час очікування клієнтів у черзі у вечірній час. Для оцінки якості обслуговування з отриманих даних була сформована випадкова вибірка (дані наведено у хв): 10, 3, 10, 4, 19, 7, 2, 6, 7, 16, 5, 7, 1, 5, 3.
- Запишіть упорядкований варіаційний ряд.
 - Знайдіть моду, медіану і середнє значення цього ряду.
 - Побудуйте полігон частот.
 - Менеджер фірми, до якого у вечірній час звернувся клієнт із запитанням: «Скільки часу я стоятиму в черзі?», відповів: «У нас приблизно кожний другий клієнт витрачає на очікування не більше 6 хвилин». Чи має він рацію? Відповідь обґрунтуйте.
100. Готель X проводить анкетування своїх клієнтів — їм пропонується перед від'їздом оцінити якість обслуговування за 10-бальною шкалою. Зі спостережень відомо, що оцінки 8, 9, 10 виставляють постійні клієнти, які й у майбутньому планують користуватися послугами цього готелю; оцінки 5, 6, 7 виставляють клієнти, які в цілому задоволені перебуванням, однак у майбутньому будуть шукати собі інші місця для проживання; оцінки нижче 5 балів виставляють клієнти, які незадоволені якістю обслуговування й ніколи не повернуться до цього готелю. PR -менеджер навмання відібрав для аналізу 20 анкет останнього року і їх результати записав до таблиці:

Оцінка, бали	3	4	5	6	7	8	9	10	Усього
Кількість, особи	1	3	2	2	1	3	6	2	20

На основі цих результатів:

- побудуйте полігон частот;
- знайдіть середній бал;
- визначте, чи мав рацію PR -менеджер, доповівши керівництву готелю, що 55 % клієнтів, які відпочивали у готелі останнього року, прийдуть сюди у майбутньому. Відповідь обґрунтуйте.

ВІДПОВІДІ ДО ЗАВДАНЬ

Розділ 1. ЧИСЛА І ВИРАЗИ

1.1. Цілі і дробові раціональні вирази

21	22	23	24	25	26
А	Д	В	Б	Б	Б
27	28	29	30	31	32
А	Г	В	В	Д	А
33	34	35	36	37	38
А	Г	В	Б	Г	Д
39	40	41	42	43	44
В	Д	В	Б	Г	Д
45	46	47	48	49	50
Д	В	В	Д	А	Г
51	52	53	54	55	56
Б	В	А	Д	Б	В
57	58	59	60	61	62
1-Б; 2-Г; 3-В; 4-А	1-Д; 2-В; 3-Б; 4-А	1-Г; 2-В; 3-Б; 4-Д	1-Б; 2-Д; 3-В; 4-Г	А, В, Е	Б, Д
63	64	65	66	67	68
255	27	324	14 400	36	-52
69	70	71	72	73	74
30	-28	20	12	42	54
75	76	77	78	79	80
38	81	2,6	0,49	0,125	0,375
81	82	83	84	85	86
15	41	$\frac{7}{6}$	$\frac{10}{33}$	-13,5	19
87	88	89	90	91	92
12	6,5	-7	9	3	-1

93. Наприклад, $\frac{51}{300}$; $\frac{52}{300}$; $\frac{53}{300}$.

94. $\frac{6}{31}$; $\frac{6}{35}$.

95. а) Ні; б) так; в) ні.

96. а) Ні; б) ні; в) ні.

97. $a = \frac{40-5n}{7}$, $n \in \mathbb{Z}$.

98. а) $a \in \mathbb{Z}$, $a \square -5$; б) $a \in \mathbb{Q}$.

99. $D = (-\infty; -1) \cup \left(-1; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right) \cup (1; +\infty)$; в результаті перетворень отримаємо $\frac{2x^2+1}{2} > 0$ при всіх $x \in D$.

100. $D = \left(-\infty; -\frac{5}{3}\right) \cup \left(-\frac{5}{3}; 0\right) \cup \left(0; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{3}; +\infty\right)$.

1.2. Ірраціональні вирази

21	22	23	24	25	26
А	Б	Б	Д	Г	Г
27	28	29	30	31	32
В	В	В	Б	В	А
33	34	35	36	37	38
А	Д	В	Б	Б	А
39	40	41	42	43	44
Б	Д	В	Г	Д	Г
45	46	47	48	49	50
Б	Б	А	Д	Б	В
51	52	53	54	55	56
В	В	Б	А	А	Г
57	58	59	60	61	62
1-Б; 2-В; 3-Г; 4-Д	1-Б; 2-Г; 3-А; 4-Д	1-Д; 2-Г; 3-В; 4-Б	1-Д; 2-А; 3-Г; 4-В	Б, Г, Д	А, В, Є

63	64	65	66	67	68
2,4	3,2	0,6	-0,75	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{24}$
69	70	71	72	73	74
-0,875	-0,375	15	$\frac{13}{3}$	-1,8	20
75	76	77	78	79	80
5,5	-2,1	-420	0,09	0,7	8
81	82	83	84	85	86
15	6	9	20	11	8
87	88	89	90	91	92
4	10	-7	1	6	7

93. а) 2; б) $-\frac{1}{2}$.

94. *Вказівка.* Для обчислення значення виразу застосуйте формули скороченого множення. а) 2; б) 2.

95. а) 1; б) 1.

96. 2.

97. $-\sqrt{x}$; -0,2.

98. $2|a|$; 18.

99. а) \sqrt{a} ; б) $\sqrt{\frac{b}{a}}$.

100. а) $-b$; б) 3.

1.3. Тригонометричні вирази

21	22	23	24	25	26
В	Б	В	Г	А	Д
27	28	29	30	31	32
Б	А	Д	Г	А	В

33	34	35	36	37	38
А	Д	Г	Б	Б	Г
39	40	41	42	43	44
Д	В	А	Г	Д	Г
45	46	47	48	49	50
Б	В	А	Д	А	В
51	52	53	54	55	56
Г	В	Б	В	Б	Б
57	58	59	60	61	62
1-Г; 2-Б; 3-Д; 4-А	1-В; 2-Д; 3-Б; 4-А	1-А; 2-Б; 3-Д; 4-Г	1-Б; 2-Г; 3-А; 4-В	Б, Г, Є	А, В, Д або В, А, Д
63	64	65	66	67	68
$0,4\sqrt{6}$	-0,96	-0,25	-2	43	-30
69	70	71	72	73	74
-0,39	-0,99	-1	$\sqrt{3}$	4,5	5
75	76	77	78	79	80
-0,96	0,28	79	0,68	-0,28	-0,7
81	82	83	84	85	86
-0,9	-3	-0,96	-0,8	2	0
87	88	89	90	91	92
-0,5	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	6	0,75	0,6	0,75

96. а) Мінімальне значення (-16) , максимальне значення 16 ; б) мінімальне значення (-17) , максимальне значення 17 .

97. $\frac{1}{2}(a^2 + b^2 - 2)$.

98. $\frac{1}{2}(a^2 + b^2 - 2)$.

100. а) $2\pi - 6$; б) $\frac{5\pi}{2} - 6$.

1.4. Логарифмічні вирази

21	22	23	24	25	26
Г	Б	Б	Д	Д	Б
27	28	29	30	31	32
А	В	Г	Д	А	Г
33	34	35	36	37	38
В	Г	Г	А	Г	Б
39	40	41	42	43	44
В	Д	Д	Б	Г	Б
45	46	47	48	49	50
Г	Б	В	Г	Б	А
51	52	53	54	55	56
А	Г	А	Б	А	Г
57	58	59	60	61	62
1-В; 2-Г; 3-Б; 4-Д	1-В; 2-Б; 3-Д; 4-Г	1-Б; 2-Д; 3-Г; 4-В	1-А; 2-Д; 3-В; 4-Б	Б, Е, Є	А, Г, Е, Є
63	64	65	66	67	68
-1	-3	$-\frac{1}{3}$	0,5	2	-2
69	70	71	72	73	74
6	-5	20	0,125	2	0,25
75	76	77	78	79	80
56	231	0,25	14	1,25	2
81	82	83	84	85	86
3	7	2	3	19	12
87	88	89	90	91	92
-9	37	-2	-16	$\frac{5}{12}$	-0,15

93. $\log_b a$.

95. -2012.

94. $\log_x y$.

96. 1.

97. $\frac{4(1-a)}{1+b}$.

99. 13.

98. $\frac{3xy-x}{y}$.

100. 82.

Розділ 2. ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ГРАФІКИ**2.1. Поняття функції. Основні властивості функцій**

21	22	23	24	25	26
В	Г	В	Б	А	Г
27	28	29	30	31	32
А	Г	Д	А	Д	А
33	34	35	36	37	38
Б	Б	В	Д	Г	Г
39	40	41	42	43	44
Г	Б	В	Д	Г	В
45	46	47	48	49	50
Б	А	Г	В	Д	Д
51	52	53	54	55	56
Б	В	Д	Д	А	В
57	58	59	60	61	62
1-Б; 2-Д; 3-В; 4-Г	1-Г; 2-А; 3-Б; 4-В	1-Б; 2-Д; 3-А; 4-В	1-В; 2-Г; 3-Б; 4-А	Д, Б, Г, Е	А, Г, Д, Е, Ж
63	64	65	66	67	68
-2	12	2,5	2	-4	8
69	70	71	72	73	74
7	6	-2	3	12	-10
75	76	77	78	79	80
2	8	31	-28	-15	8
81	82	83	84	85	86
-10	16	4	1,5	6	1
87	88	89	90	91	92
-4	-6	8	-4	3	17

95. $S(x) = x\sqrt{100 - x^2}$; область визначення $(0; 10)$; множина значень $(0; 50]$; функція ні парна, ні непарна; неперіодична.
96. $a(x) = 2\sqrt{\frac{x}{\sqrt{3}}}$; область визначення $(0; +\infty)$; множина значень $(0; +\infty)$; функція ні парна, ні непарна; неперіодична.
97. $D(g) = (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$, $E(g) = (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$. Графік є фрагментом графіка функції $y = \frac{-1}{x}$, із якого вилучено точку $(-1; 1)$.
98. $D(g) = E(g) = (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$. Графік є фрагментом графіка функції $y = x$, із якого вилучено точки $(0; 0)$ і $(1; 1)$.
99. а) $h(x) = x^3 - 1$; б) $T = 8$; в) $D(\varphi) = (-\infty; +\infty)$, $E(\varphi) = [-2; 0]$, функція ні парна, ні непарна.
100. а) $h(x) = \frac{1}{x} + 1$; б) $T = 1$; в) $D(\psi) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; $E(\psi) = [-1; 1]$, функція парна.

2.2. Основні елементарні функції

21	22	23	24	25	26
А	Г	Б	Д	А	В
27	28	29	30	31	32
А	Г	Д	Б	Г	Д
33	34	35	36	37	38
В	Г	В	Д	А	А
39	40	41	42	43	44
Д	В	А	Б	Д	А
45	46	47	48	49	50
Б	Б	Г	В	А	В
51	52	53	54	55	56
Б	Д	В	Г	Б	В
57	58	59	60	61	62
1-Д; 2-Б; 3-Г; 4-А	1-Д; 2-Б; 3-А; 4-В	1-Б; 2-А; 3-Д; 4-В	1-В; 2-Г; 3-Д; 4-А	А, Б, Д, Ж	А, В, Д, З або В, А, Д, З

63	64	65	66	67	68
-3,5	0,8	8,2	26	$\frac{8}{3}$	1,125
69	70	71	72	73	74
4,8	6	-6	-4,25	-3	5
75	76	77	78	79	80
0,2	32	0,4	$\sqrt{5}$	$\sqrt{3}$	$0,5\sqrt{3}$
81	82	83	84	85	86
4	2	9	16	-4	8
87	88	89	90	91	92
9	-9	1	3	3	5

93. $\gamma = \frac{\pi}{4}$.

94. а) $\alpha = \arctg 3$; б) $y = \frac{\sqrt{10}-1}{3}(x+2)$; в) $y = -\frac{\sqrt{10}+1}{3}(x+2)$.

95. $D(y) = (-\infty; 5)$, $E(y) = (0; +\infty)$. Графік функції наведено на рис. 1.

96. $D(y) = (1; 2) \cup (2; +\infty)$, $E(y) = \{2\}$. Графік функції наведено на рис. 2.

97. $E(f) = [-1; +\infty)$; функція зростає на проміжках $(-\infty; 1)$ і $(3; +\infty)$, спадає на проміжку $(1; 3)$. Ескіз графіка функції наведено на рис. 3.

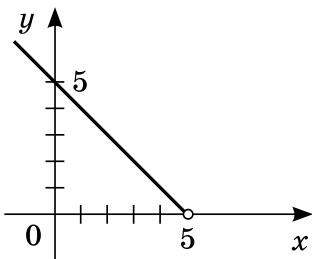


Рис. 1

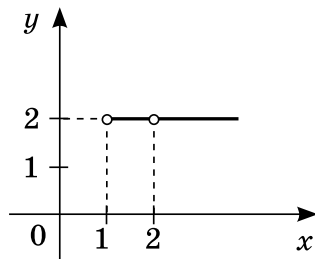


Рис. 2

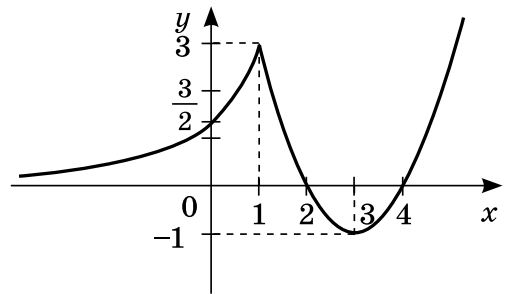


Рис. 3

98. $E(g) = (-\infty; 4]$; функція зростає на проміжку $(-\infty; -1)$, спадає на проміжку $(-1; +\infty)$. Ескіз графіка функції наведено на рис. 4.

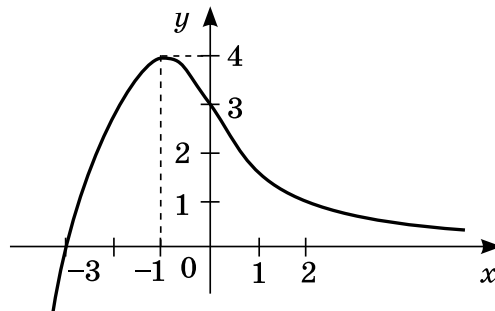


Рис. 4

99. а) $D(f) = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \right\}$, $E(f) = \{0\}$. Ескіз графіка функції наведено на рис. 5; б) $D(g) = \left(\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{2} + \frac{\pi n}{2} \right)$, $n \in \mathbb{Z}$, $E(g) = 4$. Ескіз графіка функції наведено на рис. 6.

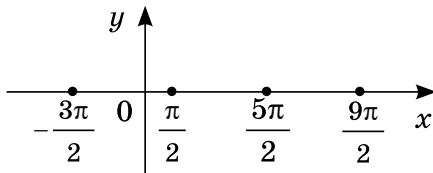


Рис. 5

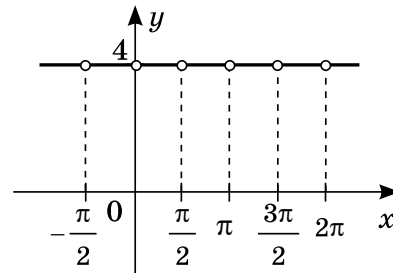


Рис. 6

100. а) $E(h) = [0; 1]$; функція зростає на проміжках $\left(0 + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right)$, $n \in \mathbb{Z}$ і спадає на проміжках $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi n \right)$, $n \in \mathbb{Z}$. Ескіз графіка функції наведено на рис. 7; б) $E(\varphi) = \left(-\frac{\pi}{2}; 0 \right]$; функція зростає на проміжку $(-\infty; 0)$; проміжків спадання немає. Ескіз графіка функції наведено на рис. 8.

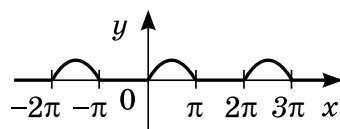


Рис. 7

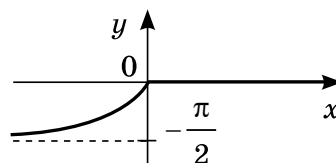


Рис. 8

2.3. Побудова графіків функцій та рівнянь за допомогою геометричних перетворень

21	22	23	24	25	26
Д	А	Б	Г	Д	А
27	28	29	30	31	32
Б	В	Б	В	В	Д
33	34	35	36	37	38
Г	Б	А	Г	А	В
39	40	41	42	43	44
Б	В	А	В	Г	Б
45	46	47	48	49	50
Д	Б	А	В	В	А
51	52	53	54	55	56
А	Б	Б	В	Г	В
57	58	59	60	61	62
1-В; 2-Д; 3-А; 4-Б	1-Д; 2-А; 3-Б; 4-Г	1-Г; 2-Б; 3-В; 4-А	1-А; 2-Г; 3-Б; 4-Д	А, В, З або А, З, В	А, Б, Ж або А, Ж, Б
63	64	65	66	67	68
-9	-5	2	32	3,5	1,5
69	70	71	72	73	74
$\frac{4}{15}$	3,5	19	55	4	6
75	76	77	78	79	80
-2	-2	3	7	5	3
81	82	83	84	85	86
-14	23	-9	5	6	8
87	88	89	90	91	92
20	78,5	-3	-2	17	3

93. а) $D(g) = [-1; 3]$; б) $E(g) = [-1; 7]$; в) функція $h(x)$ спадає на проміжках: $(-4; -3)$; $(1; 2)$; $(3; 4)$; зростає на проміжках: $(-3; 1)$; $(2; 3)$; г) точки локального мінімуму функції $\varphi(x)$: $M_1(0; 2)$, $M_2(-3; -1)$, $M_3(3; -1)$; точки локального максимуму функції $\varphi(x)$: $M_4(-1; 3)$, $M_5(1; 3)$.

94. а) $D(g) = [-2; 6]$; б) $E(g) = \left[-2\frac{1}{2}; -1\frac{1}{4}\right]$; в) функція $\varphi(x)$ зростає на проміжках: $(-5; -3)$; $(-1; 0)$; $(1; 3)$; спадає на проміжках: $(-3; -1)$; $(0; 1)$; $(3; 5)$; г) точки локального мінімуму функції $h(x)$: $M_1(-2; 0)$, $M_2(0; 0)$, $M_3(2; 0)$; точки локального максимуму функції $h(x)$: $M_4(-1; 1)$, $M_5(1; 2)$; $M_6(3; 2)$.

95. а) Рис. 9; б) рис. 10; в) рис. 11, $(-8; 0) \cup (0; 8)$.

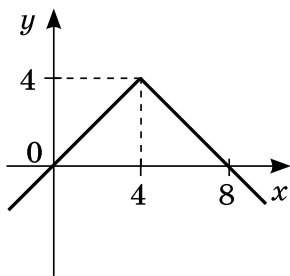


Рис. 9

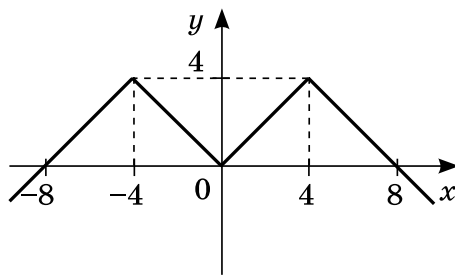


Рис. 10

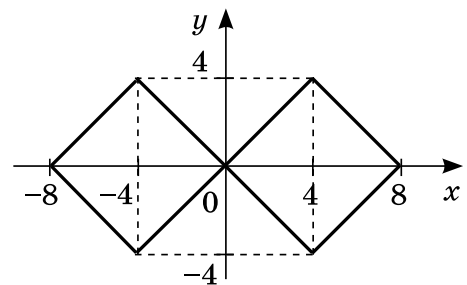


Рис. 11

96. а) Рис. 12; б) рис. 13; в) рис. 14, $(-5; 5)$.

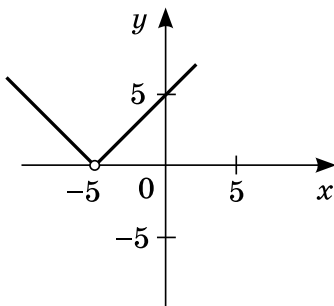


Рис. 12

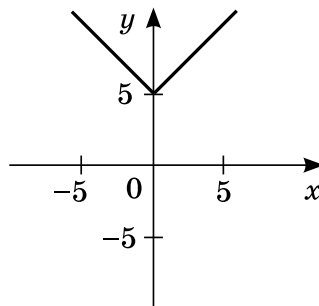


Рис. 13

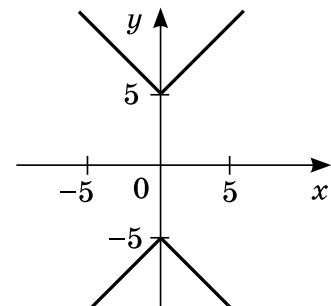


Рис. 14

97. а) Рис. 15; б) довжина лінії $\pi\sqrt{2}$ при всіх значеннях a ; в) $a = \pm 1$.

98. а) Рис. 16; б) довжина лінії $3\pi\sqrt{2}$ при всіх значеннях b ; в) $b \in \{\pm\sqrt{2}\} \cup (-1; 1)$.

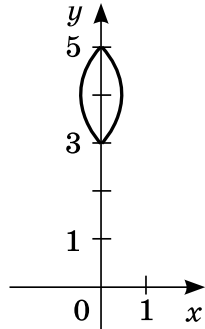


Рис. 15

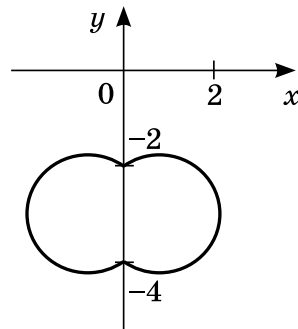


Рис. 16

99. Графік рівняння $|x-5|+|y|=1$ наведено на рис. 17, графік рівняння $(x-a)^2+y^2=4$ при $a=-2$ наведено на рис. 18. а) $(-\infty; 2) \cup (4; 6) \cup (8; +\infty)$; б) $\{2; 4; 6; 8\}$.

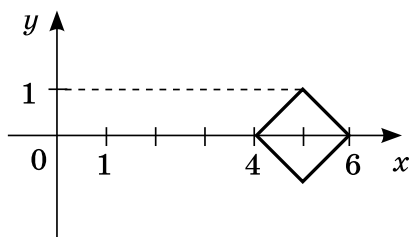


Рис. 17

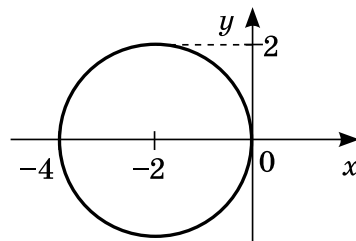


Рис. 18

100. Графік рівняння $x^2+(y-10)^2=1$ наведено на рис. 19, графік рівняння $x^2+y^2=a^2$ при $a=3$ наведено на рис. 20.

а) $\{-11; -9; 9; 11\}$; б) $[-11; -9] \cup [9; 11]$.

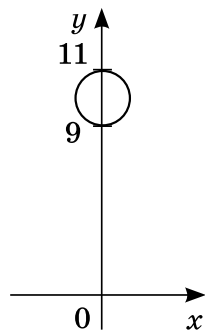


Рис. 19

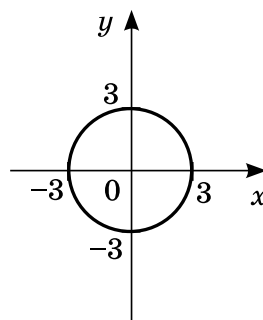


Рис. 20

Розділ 3. РІВНЯННЯ ТА СИСТЕМИ РІВНЯНЬ

3.1. Цілі та дробові раціональні рівняння

21	22	23	24	25	26
В	Г	Д	А	В	Б
27	28	29	30	31	32
А	Г	Б	Д	В	Г
33	34	35	36	37	38
В	Д	В	Б	Д	Г
39	40	41	42	43	44
А	Д	Б	Д	Д	А
45	46	47	48	49	50
Б	А	Б	Д	В	Г
51	52	53	54	55	56
Г	А	Б	Г	А	Б
57	58	59	60	61	62
1-Д; 2-В; 3-А; 4-Б	1-Б; 2-Г; 3-А; 4-Д	1-Г; 2-А; 3-Д; 4-Б	1-Б; 2-Д; 3-В; 4-А	А, Б, Е або Б, А, Е	А, Б, Д або Б, А, Д
63	64	65	66	67	68
-4	-5	2	-1	-4	-7,5
69	70	71	72	73	74
6	-9	3,875	-1,25	-12	11
75	76	77	78	79	80
18	13	8	-2	10,1	4,25
81	82	83	84	85	86
-4	-9	0,5	40	10	-9
87	88	89	90	91	92
3	3	12	54	-12	41

93. а) $x = -2$; б) $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{3}$.

94. а) $x_1 = 3$, $x_2 = -4$, $x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{57}}{2}$; б) $x_1 = -6$, $x_2 = -4$, $x_{3,4} = \frac{-15 \pm \sqrt{129}}{2}$.

95. а) $x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$; б) $x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = -\frac{1}{2}, x_4 = -1$.

96. а) $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$; б) $x_1 = -2, x_2 = 1$.

97. а) $x_1 = 1, x_{2,3} = -2 \pm \sqrt{3}$; б) $x_1 = 2, x_2 = \frac{3}{4}$.

98. а) $\begin{cases} x = -5, \\ y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = 9, \\ y = 1. \end{cases}$

99. а) $\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 0, \end{cases} \begin{cases} x_2 = -2, \\ y_2 = 0, \end{cases} \begin{cases} x_3 = 1, \\ y_3 = 3, \end{cases} \begin{cases} x_4 = -1, \\ y_4 = -3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = -3, \end{cases} \begin{cases} x_2 = 3, \\ y_2 = -1. \end{cases}$

100. а) $\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 5, \end{cases} \begin{cases} x_2 = 5, \\ y_2 = 1, \end{cases} \begin{cases} x_3 = 2, \\ y_3 = 3, \end{cases} \begin{cases} x_4 = 3, \\ y_4 = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 2, \\ z_1 = 3, \end{cases} \begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = -2, \\ z_2 = -3. \end{cases}$

3.2. Ірраціональні та тригонометричні рівняння

21	22	23	24	25	26
В	А	А	Б	А	Г
27	28	29	30	31	32
Г	Б	В	Б	Д	В
33	34	35	36	37	38
Г	А	А	Д	В	Б
39	40	41	42	43	44
А	Г	Д	Г	Б	В
45	46	47	48	49	50
Г	В	Б	В	В	Г
51	52	53	54	55	56
Б	А	Г	Д	Г	Б
57	58	59	60	61	62
1-Г; 2-А; 3-В; 4-Б	1-Б; 2-А; 3-Д; 4-В	1-В; 2-Д; 3-Б; 4-Г	1-Д; 2-Б; 3-А; 4-В	В, Є, З або Є, В, З	Г, Е, З

63	64	65	66	67	68
14	-12	29	-9	7	-3
69	70	71	72	73	74
54	4	81	7	-23	-116
75	76	77	78	79	80
78	261	3	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$
81	82	83	84	85	86
$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{12}$	2	12	6
87	88	89	90	91	92
-2	-3	0,5	0,25	16,5	-12,5

93. а) $x_1 = -2$, $x_2 = 9$; б) $x_1 = -7$, $x_2 = 2$.

94. а) $x = 1$; б) $x = 4$.

95. а) $x_1 = 5$, $x_2 = -11$, $x_3 = -4$; б) $x_1 = 80$, $x_2 = -109$.

96. а) $\begin{cases} x = 4, \\ y = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = 16, \\ y = 1. \end{cases}$

97. а) $x_1 = \frac{\pi n}{5}$, $n \in \mathbb{Z}$; $x_2 = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi m}{5}$, $m \in \mathbb{Z}$; $x_3 = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$,
 $n \in \mathbb{Z}$; $x_2 = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

98. а) $x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x_2 = \arctg 5 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
 $x_2 = \arctg 2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

99. а) При $a = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq -4$ $x_1 = a$, $x_2 = 8$; при інших значеннях параметра a $x = -8$; б) при $b = -\frac{1}{2} + 2n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$ $x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = -b$; при інших значеннях параметра b $x = \frac{5}{2}$.

100. а) $\begin{cases} x = 0, \\ y = -3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = -5, \\ y = 2. \end{cases}$

3.3. Показникові та логарифмічні рівняння

21	22	23	24	25	26
Г	А	В	Г	Б	Д
27	28	29	30	31	32
Г	Б	Д	Д	Б	Б
33	34	35	36	37	38
В	Г	Б	Б	В	Г
39	40	41	42	43	44
Б	В	А	Г	Д	Г
45	46	47	48	49	50
Г	Б	А	Д	Д	Б
51	52	53	54	55	56
Б	Д	А	В	А	Г
57	58	59	60	61	62
1-Г; 2-В; 3-Б; 4-А	1-А; 2-Г; 3-В; 4-Б	1-В; 2-Б; 3-А; 4-Г	1-В; 2-Д; 3-А; 4-Г	В, Д, Е або Д, В, Е	Б, Г, Є або Г, Б, Є
63	64	65	66	67	68
4,5	4,2	-1	1	0	-4
69	70	71	72	73	74
79	6,2	5	-2	7,5	8
75	76	77	78	79	80
7	-36	0,25	81	3	125
81	82	83	84	85	86
2	3	28	4,5	0,75	-1,25
87	88	89	90	91	92
-9	-13	27	25,2	6	3

93. а) $x = 2$; б) $x = 2$.94. а) $x = \pm 2\sqrt{2}$; б) $x_1 = 0,01$, $x_2 = 10$.

95. а) $x_1 = 2, x_2 = -2$; б) $x_1 = 4, x_2 = -4$.

96. а) $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 4, x_3 = 2$; б) $x_1 = -3, x_2 = -1, x_3 = -\frac{1}{2}$.

97. а) $x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = 2$; б) $x_1 = 1, x_2 = 2$.

98. а) $x_1 = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; x_2 = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

99. а) $\begin{cases} x = 5, \\ y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 = 16, \\ y_1 = -28, \end{cases} \begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = 2. \end{cases}$

100. а) $\begin{cases} x = \frac{1}{16}, \\ y = \frac{1}{16}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = 49, \\ y = 49. \end{cases}$

Розділ 4. НЕРІВНОСТІ ТА СИСТЕМИ НЕРІВНОСТЕЙ

4.1. Цілі та дробові раціональні нерівності

21	22	23	24	25	26
Д	В	Д	А	А	Б
27	28	29	30	31	32
В	Б	Б	Г	Г	Д
33	34	35	36	37	38
Д	Б	Г	А	Б	В
39	40	41	42	43	44
А	Г	Д	А	А	Б
45	46	47	48	49	50
А	Д	Г	В	В	Г
51	52	53	54	55	56
Б	Г	Д	Г	В	Б
57	58	59	60	61	62
1-Б; 2-Г; 3-В; 4-Д	1-А; 2-В; 3-Б; 4-Г	1-Г; 2-Д; 3-В; 4-Б	1-Д; 2-А; 3-Б; 4-В	Б, Е, Є	В, З

63	64	65	66	67	68
6	1	7	64	12	15
69	70	71	72	73	74
0,5	1,75	6	2	2	5
75	76	77	78	79	80
9	-1	0,55	$\frac{7}{12}$	20	16
81	82	83	84	85	86
-12	-5	-4,5	1	11	3
87	88	89	90	91	92
1	100	28	-14	137	151

93. а) $(-\infty; -3) \cup (-2; 1) \cup (2; +\infty)$; б) $[1; 3] \cup [4; 6]$.

94. а) $(-\infty; 2]$; б) нерівність не має розв'язків.

95. а) $(-\infty; -6\frac{1}{2}) \cup (-1\frac{5}{6}; +\infty)$; б) $\left[-3\frac{1}{2}; \frac{1-\sqrt{19}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{19}}{2}; +\infty\right)$.

96. а) Нерівність має розв'язки при всіх значеннях параметра $c \in \left[-1\frac{1}{4}; 1\frac{1}{4}\right]$,

зокрема, при $c = -1\frac{1}{4}$ $x = -\frac{1}{2}$; при $c \in \left(-1\frac{1}{4}; -1\right]$ $x \in \left[\frac{-1-\sqrt{4c+5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{4c+5}}{2}\right]$;

при $c \in (-1; 1)$ $x \in \left[\frac{1-\sqrt{5-4c}}{2}; \frac{-1+\sqrt{4c+5}}{2}\right]$; при $c \in \left[1; 1\frac{1}{4}\right)$

$x \in \left[\frac{1-\sqrt{5-4c}}{2}; \frac{1+\sqrt{5-4c}}{2}\right]$; при $c = 1\frac{1}{4}$ $x = \frac{1}{2}$; при інших значеннях пара-

метра c нерівність не має розв'язків.

б) Нерівність має розв'язки при всіх значеннях параметра $c \in \left[-2\frac{1}{4}; 2\frac{1}{4}\right]$,

зокрема, при $c = -2\frac{1}{4}$ $x = \frac{1}{2}$; при $c \in \left(-2\frac{1}{4}; -\sqrt{2}\right]$ $x \in \left[\frac{1-\sqrt{9+4c}}{2}; \frac{1+\sqrt{9+4c}}{2}\right]$;

при $c \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ $x \in \left[\frac{1 - \sqrt{9 + 4c}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{9 - 4c}}{2} \right]$; при $c \in \left[\sqrt{2}; 2\frac{1}{4} \right)$
 $x \in \left[\frac{-1 - \sqrt{9 - 4c}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{9 - 4c}}{2} \right]$; при $c = 2\frac{1}{4}$ $x = -\frac{1}{2}$; при інших значеннях параметра c нерівність не має розв'язків.

97. Множину E зображено на рис. 21. Площа отриманої фігури дорівнює 28π кв. од. при $a = \pm 6$.

98. Множину G зображено на рис. 22. Площа отриманої фігури дорівнює 96π кв. од. при $c = \pm 14$.

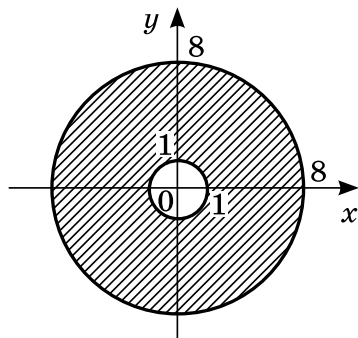


Рис. 21

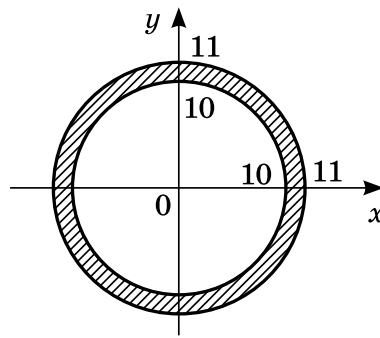


Рис. 22

99. Множина розв'язків системи нерівностей є трикутником ABC (рис. 23), площа якого $S = 12$ кв. од.

100. Множина розв'язків системи нерівностей є необмеженою геометричною фігурою (заштрихована ділянка на рис. 24).

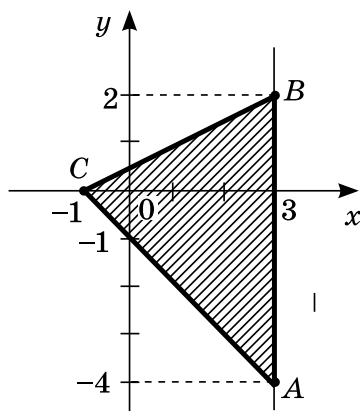


Рис. 23

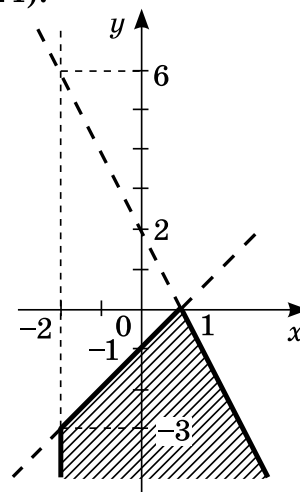


Рис. 24

4.2. Ірраціональні та тригонометричні нерівності

21	22	23	24	25	26
В	А	Г	А	Б	А
27	28	29	30	31	32
Д	А	В	Д	Г	А
33	34	35	36	37	38
В	А	Г	Д	Б	В
39	40	41	42	43	44
Б	В	Д	А	Г	А
45	46	47	48	49	50
В	Д	В	Г	Б	А
51	52	53	54	55	56
Г	В	Б	А	Г	А
57	58	59	60	61	62
1-Г; 2-Д; 3-А; 4-В	1-Д; 2-Г; 3-В; 4-А	1-Д; 2-В; 3-Г; 4-А	1-Г; 2-Д; 3-А; 4-В	В, Д, Є або Д, В, Є	Г, Б, Е, В або Б, Г, Е, В або Б, Е, Г, В
63	64	65	66	67	68
20	-12	45	-10	34	-54
69	70	71	72	73	74
13	4	-0,5	1	3	9
75	76	77	78	79	80
5	6	35	82	91	2
81	82	83	84	85	86
-2	241	3	31	$\frac{2\pi}{9}$	2π
87	88	89	90	91	92
4	9	18	28	4	-9

93. а) $(-\infty; -3] \cup \{-2; 1\} \cup [3; +\infty)$; б) $[-5; -3) \cup (4; 5]$.

94. а) $\left[6; \frac{15+\sqrt{5}}{2}\right]$; б) $(8; +\infty)$.

95. а) $\left[-2; \frac{1}{4}\right]$; б) $\left[1\frac{1}{4}; 31\frac{1}{4}\right]$.
96. а) $x = -7$; б) $x = 0$.
97. а) $\left[-\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{\pi}{3} + \pi n\right], n \in \mathbb{Z}$;
 б) $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; -\arctg 3 + \pi n\right) \cup \left[\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$.
98. а) При $a \square 2$ нерівність не має розв'язків; при $a < -2$ $x \in (-\infty; +\infty)$; при $-2 \square a < 2$ $x \in \left(\frac{\pi}{6} - \arccos \frac{a}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + \arccos \frac{a}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$;
 б) при $a \square -2$ нерівність не має розв'язків; при $a > 2$ $x \in (-\infty; +\infty)$; при $-2 < a \square 2$ $x \in \left(\frac{\pi}{12} + \frac{1}{3} \arccos \frac{a}{2} + \frac{2\pi n}{3}; \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{3} \arccos \frac{a}{2} + \frac{2\pi n}{3}\right), n \in \mathbb{Z}$.
99. а) $\left(-\frac{\pi}{12} + \pi n; \frac{7\pi}{12} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$; б) $\left(3\arctg 4 + 3\pi n; \frac{9\pi}{4} + 3\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$.
100. а) $\left[\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{2\pi}{3} + \pi n\right], n \in \mathbb{Z}$; б) $\left(-\frac{\pi}{4} + \pi n; \pi n\right) \cup \left(\pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$.

4.3. Показникові та логарифмічні нерівності

21	22	23	24	25	26
Г	Б	Г	Г	Д	А
27	28	29	30	31	32
А	Д	Б	Д	Б	Г
33	34	35	36	37	38
Б	А	В	Б	Б	Г
39	40	41	42	43	44
А	Д	А	Б	В	Д
45	46	47	48	49	50
В	Б	Г	В	Г	В
51	52	53	54	55	56
Б	А	Д	В	Б	В

57	58	59	60	61	62
1-В; 2-Д; 3-Б; 4-А	1-Д; 2-Г; 3-Б; 4-В	1-А; 2-Д; 3-Б; 4-Г	1-А; 2-Г; 3-Д; 4-В	Б, Д, А або Д, Б, А	Г, Е, А або Е, Г, А
63	64	65	66	67	68
0	2	7	9	52	-54
69	70	71	72	73	74
1	8	-15	21	54	18
75	76	77	78	79	80
7	4	120	12	4	-12
81	82	83	84	85	86
4	0	15	7	5	6
87	88	89	90	91	92
-1	12	8	18	3	6

93. а) $[-4; 4]$; б) $[-2; -1) \cup [1; +\infty)$.

94. а) $\left[\log_3 \frac{83}{19}; +\infty\right)$; б) $\left[\log_2 \frac{36}{7}; +\infty\right)$.

95. а) $\left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup (0; 4]$; б) $\left(2\frac{1}{2}; 3\right) \cup (3; 8]$.

96. а) $(-7; -6] \cup [-5; 5]$; б) $[3; +\infty)$.

97. а) Рис. 25; б) рис. 26.

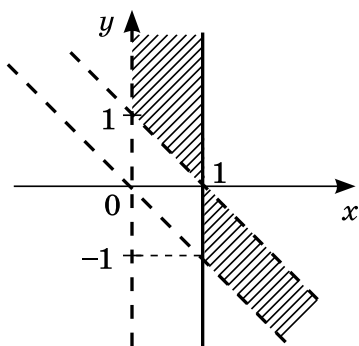


Рис. 25

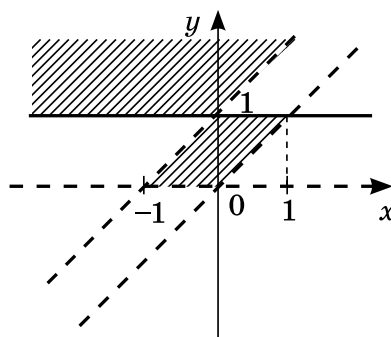


Рис. 26

98. а) Рис. 27; б) рис. 28.

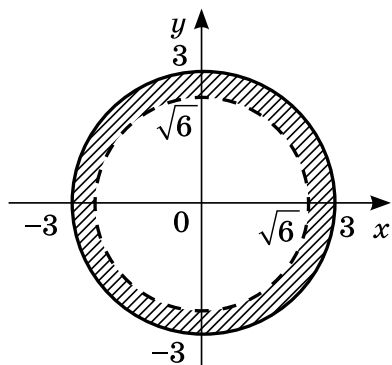


Рис. 27

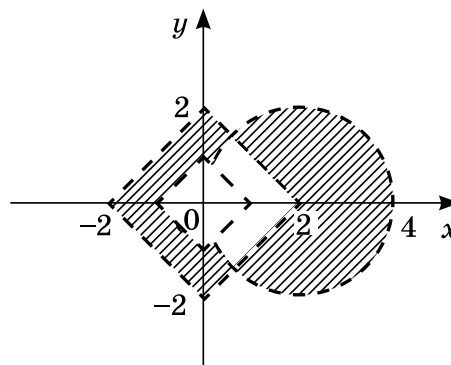


Рис. 28

99. а) $\{-14\} \cup [-7; 5)$; б) $\{-12\} \cup [-5; 3)$.

100. а) $(0; 1) \cup \left[\pi; \frac{5\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}; 2\pi\right)$; б) $(0; 1) \cup \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{11\pi}{4}\right)$.

Розділ 5. ТЕКСТОВІ ЗАДАЧІ

5.1. Задачі на арифметичні співвідношення між об'єктами

21	22	23	24	25	26
А	Г	Г	Б	Б	Г
27	28	29	30	31	32
В	А	Б	В	Б	Д
33	34	35	36	37	38
В	А	Д	В	Г	Д
39	40	41	42	43	44
Г	В	Д	А	А	Д
45	46	47	48	49	50
А	Г	Г	Б	В	Д
51	52	53	54	55	56
Д	Б	В	Г	Б	В
57	58	59	60	61	62
1-Г; 2-А; 3-Д; 4-Б	1-В; 2-Б; 3-Д; 4-Г	1-А; 2-Б; 3-Г; 4-Д	1-Б; 2-А; 3-Г; 4-В	А, Д, Б	Е, В, А

63	64	65	66	67	68
34	36	330	48	8	3,4
69	70	71	72	73	74
60	1,25	120	150	60	24
75	76	77	78	79	80
300	90	6	10	6	4
81	82	83	84	85	86
220	1260	16	27	13	260
87	88	89	90	91	92
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	20	12	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{3}$

93. 19 «мерседесів»; 10 «запорожців».

94. Загальна кількість будинків у містечку 17, з них 9 двоповерхових і 8 триповерхових.

95. а) 1 л; б) при $t=1$ до переливання в першій посудині було 4 л води, у другій — 7 л, у третій — 1 л; в) до переливань у першій посудині було $(3+t)$ л води, у другій — $(8-t)$ л, у третій — 1 л; г) $0 \leq t \leq 8$.

96. а) 9 л; б) при $x=1$ до переливання в першій посудині був 1 л води, у другій — 8 л, у третій — 9 л; в) до переливань у першій посудині було x л, у другій — $(9-x)$ л, у третій — 9 л; г) $0 \leq x \leq 9$.

97. а) Дівчат $(2n-6)$, хлопців $(n+6)$; б) $n=10$; в) дівчат 14, хлопців 16.

98. а) Дівчат $(3k-3)$, хлопців $(k+3)$; б) $k=7$; в) дівчат 18, хлопців 10.

99. а) 950 осіб; б) 50 осіб; в) 720 осіб.

100. а) 370 осіб; б) 280 осіб; в) 200 осіб; г) 50 осіб.

5.2. Задачі на рух і на роботу

21	22	23	24	25	26
Д	Б	Г	Б	Д	Б
27	28	29	30	31	32
Д	А	А	Б	Б	А

33	34	35	36	37	38
А	Б	В	Б	В	Д
39	40	41	42	43	44
Д	Г	Д	Г	В	Б
45	46	47	48	49	50
А	Г	Б	Д	Д	Б
51	52	53	54	55	56
Б	В	Д	Г	А	Б
57	58	59	60	61	62
1-В; 2-А; 3-Г; 4-Д	1-В; 2-А; 3-Б; 4-Г	1-А; 2-Г; 3-Б; 4-Д	1-Б; 2-Д; 3-Г; 4-В	Б, Д	А, Д, Є
63	64	65	66	67	68
8,64	7,5	3,2	80	60	100
69	70	71	72	73	74
70	120	2	1	12	3
75	76	77	78	79	80
20	0,25	18	60	650	500
81	82	83	84	85	86
20	132	6	10	2	240
87	88	89	90	91	92
15	2,5	5	6	40	4

93. Швидкість Буца — 500 м/хв, а Баца — 400 м/хв.

94. а) За 10 хв; б) 45 км.

95. 20 корів.

96. 6 каністр.

97. $27\frac{3}{11}$ хв.

98. $21\frac{9}{11}$ хв.

99. За 18 днів і 9 днів відповідно.

100. Перша лінія виконує денну норму за 8 год, друга — за 6 год, а третя — за $6\frac{6}{7}$ год.

5.3. Задачі на відсотки і на подільність

21	22	23	24	25	26
Г	Б	В	Д	Г	В
27	28	29	30	31	32
Г	Б	Д	В	Д	А
33	34	35	36	37	38
Д	Б	Г	Д	В	Г
39	40	41	42	43	44
В	А	В	А	В	Д
45	46	47	48	49	50
Б	Г	Б	В	Д	А
51	52	53	54	55	56
В	Г	Г	Б	В	А
57	58	59	60	61	62
1-А; 2-Д; 3-Б; 4-Г	1-Б; 2-Г; 3-А; 4-В	1-Д; 2-Г; 3-В; 4-Б	1-А; 2-В; 3-Б; 4-Г	А, Е	Б, Є
63	64	65	66	67	68
30	48	2180	6250	150	9000
69	70	71	72	73	74
1200	3	8	15	25	37,5
75	76	77	78	79	80
3	35	6	260	120	60
81	82	83	84	85	86
15	19	132	81	120	24
87	88	89	90	91	92
2	9	1110	992	91	14

93. 16,32 %.

98. 7.

94. 12,18 %.

99. Від 40 % до $43\frac{1}{3}$ %.

97. 3.

100. Від 55 % до 75 %.

Розділ 6. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

6.1. Числові послідовності. Арифметична і геометрична прогресія

21	22	23	24	25	26
В	А	Г	В	Д	Б
27	28	29	30	31	32
В	Д	Б	А	Г	А
33	34	35	36	37	38
А	В	Д	Б	Г	В
39	40	41	42	43	44
А	Г	Д	А	Г	Г
45	46	47	48	49	50
В	А	Г	Д	В	Б
51	52	53	54	55	56
Б	Г	А	Д	А	Г
57	58	59	60	61	62
1-А; 2-Д; 3-Г; 4-В	1-В; 2-А; 3-Б; 4-Д	1-Б; 2-А; 3-Г; 4-Д	1-Д; 2-А; 3-В; 4-Г	В, Е	Г, Д
63	64	65	66	67	68
9	99	4	16	13	-3
69	70	71	72	73	74
24	0,125	-3	-2	2	0,5
75	76	77	78	79	80
2	-0,3	420	900	92,5	10811
81	82	83	84	85	86
190	435	5	15	270	24
87	88	89	90	91	92
57	38	5	4	-1,5	-0,5

93. а) $S_n = \frac{n}{n+1}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$.

94. а) $S_n = \frac{5n^2 + 13n}{12(n+2)(n+3)}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{5}{12}$.

95. $S_{19} = 0$.

96. $S_{16} = 0$.

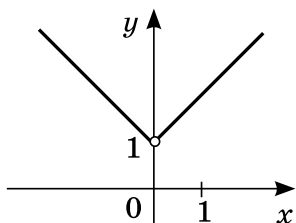
97. $f(1) = 2$; $f(x) = 1 + |x|$, $x \neq 0$. Графік функції наведено на рис. 29.98. $g(-2) = 5$; $g(x) = 1 + x^2$, $x \neq 0$. Графік функції наведено на рис. 30.

Рис. 29

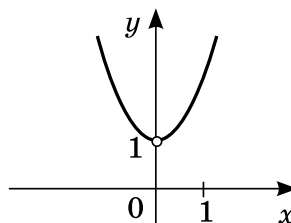


Рис. 30

99. Існують два різні розв'язки:

I розв'язок: а) елементи арифметичної прогресії 8, 10, 12; елементи геометричної прогресії 3, 6, 12; б) різниця арифметичної прогресії $d = 2$, знаменник геометричної прогресії $q = 2$.

II розв'язок: а) елементи арифметичної прогресії 17, 10, 3; елементи геометричної прогресії 12, 6, 3; б) різниця арифметичної прогресії $d = -7$, знаменник геометричної прогресії $q = 0,5$.

100. а) Елементи арифметичної прогресії $19 - 10\sqrt{3}$, 10, $1 + 10\sqrt{3}$; елементи геометричної прогресії $10(2 - \sqrt{3})$, 10, $10(2 + \sqrt{3})$; б) різниця арифметичної прогресії $d = 10\sqrt{3} - 9$, знаменник геометричної прогресії $q = 2 + \sqrt{3}$.

6.2. Похідна та її застосування

21	22	23	24	25	26
Д	Б	А	В	А	Д
27	28	29	30	31	32
В	Г	В	А	Д	В
33	34	35	36	37	38
Г	Г	А	Г	Д	Б
39	40	41	42	43	44
Б	Д	Г	Б	В	Б
45	46	47	48	49	50
А	В	Б	Г	Б	А

51	52	53	54	55	56
Д	В	Б	А	Б	В
57	58	59	60	61	62
1-В; 2-Д; 3-Б; 4-А	1-Г; 2-А; 3-Д; 4-Б	1-Д; 2-А; 3-Г; 4-В	1-Г; 2-Б; 3-А; 4-Д	Б, Г, Є	А, Г, Д
63	64	65	66	67	68
-0,5	-8	$-\frac{4}{3}$	-2	26	-11
69	70	71	72	73	74
15	1,5	8	2,75	19	8
75	76	77	78	79	80
6	-2	18	0,1	$\frac{4}{7}$	5
81	82	83	84	85	86
2,5	0,5	192	174	3	2,5
87	88	89	90	91	92
-5	-2	98	18	25	60

93. $y=5$ і $y=4\frac{5}{6}$.

94. а) $y=4x+1$ і $y=4x+33$; б) $y=0,25x+1,75$ і $y=0,25x+9,75$.

95. Критичні точки функції: $x_1=-1$, $x_2=3$. З них проміжку $[-a; a]$ ($a>0$) належать: обидві точки при всіх $a\in[3; +\infty)$, тільки одна точка при всіх $a\in[1; 3)$, жодної точки при всіх $a\in(0; 1)$.

96. При всіх $a\in\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ маємо 2 критичні точки: $x_1=\frac{4a+1}{6}$ і $x_2=a$; при всіх $a\in\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ маємо тільки одну критичну точку: $x=a$.

97. а) Точки екстремуму: $x_{\max}=1$, $y_{\max}=8$; $x_{\min}=3$, $y_{\min}=0$; функція зростає на кожному з проміжків $(-\infty; 1)$ і $(3; +\infty)$; функція спадає на проміжку $(1; 3)$; б) точка перегину: $x=2$, $f(2)=4$; функція опукла вгору

на проміжку $(-\infty; 2)$ і опукла вниз на проміжку $(2; +\infty)$; в) ескіз графіка функції наведено на рис. 31; г) при всіх $a \in (-\infty; 0) \cup (8; +\infty)$ рівняння має тільки один корінь; при всіх $a \in \{0; 8\}$ рівняння має тільки два корені; при всіх $a \in (0; 8)$ рівняння має три корені.

98. а) Точки екстремуму: $x_{\max} = -1$, $y_{\max} = 16$; $x_{\min} = 3$, $y_{\min} = -16$; функція зростає на кожному з проміжків $(-\infty; -1)$ і $(3; +\infty)$; функція спадає на проміжку $(-1; 3)$; б) точка перегину: $x = 1$, $f(1) = 0$; функція опукла вгору на проміжку $(-\infty; 1)$ і опукла вниз на проміжку $(1; +\infty)$; в) ескіз графіка функції наведено на рис. 32; г) при всіх $a \in (-\infty; -16) \cup (16; +\infty)$ рівняння має тільки один корінь; при всіх $a \in \{-16; 16\}$ рівняння має тільки два корені; при всіх $a \in (-16; 16)$ рівняння має три корені.

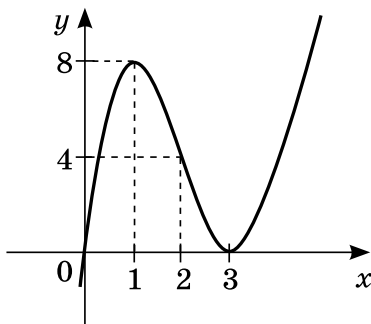


Рис. 31

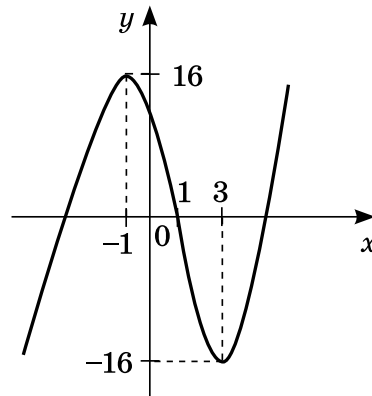


Рис. 32

99. а) $A\left(-\frac{2}{3}; \frac{8}{3}\right)$; $B\left(-\frac{2}{3}; 8\right)$; $C\left(\frac{2}{3}; 8\right)$; $D\left(\frac{2}{3}; \frac{8}{3}\right)$; б) $S = \frac{64}{9}$ кв. од.

100. а) $x = 2,25$; б) $S_{ACB} = 3,375$ кв. од.

6.3. Первісна, інтеграл та їх застосування

21	22	23	24	25	26
Б	В	А	В	В	Д
27	28	29	30	31	32
Г	Д	А	Г	В	Г
33	34	35	36	37	38
А	Б	Б	Д	А	В

39	40	41	42	43	44
В	Д	Г	Д	А	Г
45	46	47	48	49	50
Г	В	Д	А	Г	В
51	52	53	54	55	56
А	Г	Г	Б	В	А
57	58	59	60	61	62
1-Г; 2-В; 3-Б; 4-А	1-Д; 2-Г; 3-В; 4-А	1-Б; 2-Г; 3-А; 4-Д	1-Д; 2-А; 3-Б; 4-Г	Б, Г, Е або Г, Б, Е	А, В, Д або В, А, Д
63	64	65	66	67	68
10	11	33	3,5	-1,25	2,5
69	70	71	72	73	74
0,5	-0,25	16	-12	-7	8
75	76	77	78	79	80
5	2,5	6,5	1,5	12,5π	π
81	82	83	84	85	86
28	32	4,5	4,5	-4,5	-3
87	88	89	90	91	92
2π	$\frac{64\pi}{15}$	3	17	60	72

93. $\frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

96. $(-3; 4)$.

94. $\frac{\pi}{2}$.

97. $f(x) = x^2 - 4$.

95. $(-\infty; -6] \cup [1; +\infty)$.

98. $g(x) = 2x + 0,75$.

99. Шуканий графік є графіком функції $y = x^2 + 8x$: парабола з вершиною в точці $A(-4; 16)$, вітки якої напрямлені вгору. Множина значень цієї функції $E(f) = [-16; +\infty)$.

100. Шуканий графік є графіком функції $y = -x^2 + 10x$: парабола з вершиною в точці $B(5; 25)$, вітки якої напрямлені вниз. Множина значень цієї функції $E(f) = (-\infty; 25]$.

Розділ 7. ПЛАНІМЕТРІЯ

7.1. Трикутники та їх елементи

21	22	23	24	25	26
Г	Б	Д	Б	А	Г
27	28	29	30	31	32
В	Д	А	В	Г	Б
33	34	35	36	37	38
А	В	Д	В	Б	А
39	40	41	42	43	44
В	Д	Д	Д	Г	Б
45	46	47	48	49	50
А	Б	Д	Б	Б	Д
51	52	53	54	55	56
В	Г	В	Б	Б	Г
57	58	59	60	61	62
1-А; 2-Г; 3-Д; 4-Б	1-Д; 2-Г; 3-Б; 4-А	1-А; 2-Г; 3-В; 4-Б	1-Д; 2-А; 3-Г; 4-Б	Б, Д, Е	Б, Д, Е, Є
63	64	65	66	67	68
32	35	$4\sqrt{3}$	15	15	12
69	70	71	72	73	74
110	20	156	180	2	11
75	76	77	78	79	80
14	53	28,8	216	$\sqrt{61}$	4
81	82	83	84	85	86
7	120	3	4,8	150	220
87	88	89	90	91	92
12	0,4	40	15	5,25	1,25

93. б) $KL = KM = ML = \sqrt{3}$ см.

94. б) У 7 разів.

95. а) $2 < a < 10$; б) трикутник ABC прямокутний при $a = 2\sqrt{13}$ або $a = 2\sqrt{5}$; трикутник ABC гострокутний при всіх $a \in (2\sqrt{5}; 2\sqrt{13})$; трикутник ABC тупокутний при всіх $a \in (2; \sqrt{5}) \cup (2\sqrt{13}; 10)$.

96. а) $\cos \angle BAC = -0,25$; б) $DE = \sqrt{6}$.

97. а) При $a = 1,8$ $\square ABC \square \square AMN$; б) $BC = \sqrt{a^2 - 3,6a + 44,2}$.

98. а) $AK : KF = 4 : 1$; б) $KN : NC = m : 2n$.

7.2. Чотирикутники і многокутники

21	22	23	24	25	26
В	А	В	Б	Г	В
27	28	29	30	31	32
Б	А	Б	Г	Г	Д
33	34	35	36	37	38
Г	Б	Г	Д	Д	Б
39	40	41	42	43	44
Г	Д	А	В	Б	А
45	46	47	48	49	50
Г	Б	Д	А	Б	Г
51	52	53	54	55	56
В	Б	А	В	В	Г
57	58	59	60	61	62
1-Д; 2-Г; 3-В; 4-А	1-В; 2-Б; 3-Г; 4-Д	1-В; 2-А; 3-Г; 4-Д	1-Г; 2-Б; 3-А; 4-Д	Г, Е	В, Е
63	64	65	66	67	68
48	12,5	136	9,6	17,5	$8\sqrt{5}$
69	70	71	72	73	74
0,875	864	66	56	60	18
75	76	77	78	79	80
0,125	1,5	81	20	16,5	20

75	76	77	78	79	80
4	12,5	25π	$8\sqrt{2}$	24	12
81	82	83	84	85	86
2	15	7	20	12	0,25
87	88	89	90	91	92
565,2	31,4	240	10	48π	3π

93. $S = 25\pi - 50$.

96. $S = 37,5\pi - 75$.

94. $S = 75\sqrt{3} - 25\pi$.

97. $\angle ABC = \arccos \frac{1}{3}$.

95. $S = 50\pi - 75\sqrt{3}$.

98. У 4 рази.

Розділ 8. СТЕРЕОМЕТРІЯ

8.1. Прямі та площини у просторі

21	22	23	24	25	26
Г	В	А	Д	Б	Г
27	28	29	30	31	32
Д	Б	Д	А	Д	Б
33	34	35	36	37	38
В	Д	Д	Г	А	Б
39	40	41	42	43	44
Г	В	В	Г	Д	Г
45	46	47	48	49	50
В	Д	Б	Г	Б	Д
51	52	53	54	55	56
Г	Д	В	Б	В	А

57	58	59	60	61	62
1-Б; 2-Г; 3-Д; 4-А	1-Б; 2-Б; 3-Д; 4-Г	1-Б; 2-Д; 3-А; 4-В	1-А; 2-Г; 3-Д; 4-В	А, В, Е або В, А, Е	А, Б, Е, Ж або Б, А, Е, Ж
63	64	65	66	67	68
3,5	5,5	$8\sqrt{3}$	84	37,5	3,5
69	70	71	72	73	74
24	30	9,5	80	6	13
75	76	77	78	79	80
27	2,5	5	$4\sqrt{6}$	3	9,5
81	82	83	84	85	86
90	60	30	60	$\sqrt{2}$	1
87	88	89	90	91	92
$30\sqrt{2}$	0,32	$5\sqrt{3}$	0,125	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\frac{3}{\sqrt{11}}$

93. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

96. 90° .

94. $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

97. $\arccos\sqrt{\frac{3}{5}}$.

95. 12 см.

98. 120° .

8.2. Многогранники

21	22	23	24	25	26
Б	А	В	Д	В	Б
27	28	29	30	31	32
Д	В	Г	Б	Г	В
33	34	35	36	37	38
Д	Г	Г	Б	А	Б

Відповіді до завдань

39	40	41	42	43	44
Д	А	Д	В	Б	Б
45	46	47	48	49	50
Г	А	Б	Д	А	В
51	52	53	54	55	56
Г	Б	В	В	Г	В
57	58	59	60	61	62
1-Б; 2-Д; 3-В; 4-Г	1-Д; 2-Б; 3-Г; 4-В	1-Б; 2-А; 3-В; 4-Г	1-А; 2-Г; 3-В; 4-Б	А, Б, Г, Є або Б, А, Г, Є	А, В, Е
63	64	65	66	67	68
$25\sqrt{2}$	$4,5\sqrt{3}$	384	7	3	120
69	70	71	72	73	74
$180\sqrt{3}$	$30\sqrt{3}$	30	2	306	324
75	76	77	78	79	80
140	18	$36\sqrt{3}$	18	105	280
81	82	83	84	85	86
$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	12	16	8	$156\sqrt{3}$
87	88	89	90	91	92
31,5	9	21	70	9	3,5

93. $\arctg 2$.

97. а) $\frac{a^2}{\cos \alpha}$; б) $2a^3 \operatorname{tg} \alpha$.

94. 1.

98. а) $\frac{d^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{4 \cos \beta}$; б) $\frac{1}{4} d^3 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta$.

95. 90° .

99. $\frac{1}{6} a^3 \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \gamma$.

96. $\varphi = \arcsin \frac{4}{5\sqrt{2}}$.

100. $\frac{1}{12} a^3 \sin^2 (2\alpha) \operatorname{tg} \gamma$.

8.3. Тіла обертання. Комбінації тіл

21	22	23	24	25	26
А	Б	Б	Г	Б	В
27	28	29	30	31	32
Д	А	Д	В	Д	А
33	34	35	36	37	38
Г	А	В	Б	Г	В
39	40	41	42	43	44
Г	А	Г	Б	Б	А
45	46	47	48	49	50
А	Д	Б	В	А	Г
51	52	53	54	55	56
А	Д	Б	А	А	В
57	58	59	60	61	62
1-В; 2-А; 3-Б; 4-Г	1-Г; 2-Д; 3-А; 4-Б	1-Д; 2-Г; 3-Б; 4-А	1-В; 2-Б; 3-Д; 4-Г	Б, Г, Є або Г, Б, Є	В, Г, Е або Г, В, Е
63	64	65	66	67	68
48	112	1680π	9600π	504π	1632π
69	70	71	72	73	74
80π	2,25	100π	$\frac{54}{\pi}$	300	12
75	76	77	78	79	80
20	6,25	3,75	5	8π	205
81	82	83	84	85	86
45	0,75	244π	4	144π	81π
87	88	89	90	91	92
$\frac{2}{3}$	$\frac{9}{32}$	32	48	4	16

93. $2\pi R^2$.

97. $\frac{4}{3}\pi H^3 \operatorname{ctg}^3 \gamma \operatorname{tg}^3 \frac{\gamma}{2}$.

94. $\frac{\pi l^3 \operatorname{ctg}^2 \beta}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}$.

98. $\frac{\pi a^2}{\cos^2 \varphi}$.

95. $\frac{r^2 \sin \alpha}{2 \cos^2 \beta}$.

99. 24 см.

96. а) $\frac{9}{4}$; б) $\frac{19}{37}$.

100. 31,5 см.

Розділ 9. КООРДИНАТИ І ВЕКТОРИ

9.1. Системи координат на площині та у просторі

21	22	23	24	25	26
Д	Б	Г	А	Б	Г
27	28	29	30	31	32
Г	Г	Б	Д	Г	А
33	34	35	36	37	38
В	Д	Б	В	Д	Г
39	40	41	42	43	44
А	В	В	А	В	Д
45	46	47	48	49	50
А	Б	В	Г	Д	А
51	52	53	54	55	56
Б	Г	Д	Г	Г	А
57	58	59	60	61	62
1-Б; 2-Д; 3-Г; 4-В	1-Д; 2-В; 3-А; 4-Б	1-Г; 2-Д; 3-А; 4-Б	1-Б; 2-Г; 3-Д; 4-В	В, Д	Г, Д
63	64	65	66	67	68
11	25	-48	-14	2	47,5

69	70	71	72	73	74
52	42	$3\sqrt{3}$	9	3,25	$-\frac{7}{3}$
75	76	77	78	79	80
5	14,5	-0,2	-3	89	41
81	82	83	84	85	86
-6	5	19	-11	-25	84
87	88	89	90	91	92
24	-30	16	11	8,5	18

93. а) Медіана $BM = \sqrt{50}$; б) бісектриса $AK = \frac{10\sqrt{2}}{3}$; в) точка перетину медіан $O\left(\frac{7}{3}; \frac{13}{3}\right)$; г) $\cos \angle C = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

94. а) Медіана $BM = \sqrt{14}$; б) точка перетину медіан $O\left(1; \frac{7}{3}; -\frac{4}{3}\right)$; в) $\cos \angle A = \frac{1}{2}$.

95. $\left(0; \frac{5}{3}\right)$.

96. $\left(-\frac{14}{3}; 0\right)$.

97. а) Коло з центром у точці $M(-3; 5)$ і радіусом $R = 1$; б) найбільша площа $S_{\max} = 15$ кв. од.; найменша площа $S_{\min} = 9$ кв. од.

98. а) Сфера з центром у точці $M(0; 0; 8)$ і радіусом $R = 3$; б) 18 кв. од.; в) найменший об'єм $V_{\min} = 24$ куб. од., найбільший об'єм $V_{\max} = 60$ куб. од.

99. $3x + 4y - 30 = 0$ і $3x - 4y - 30 = 0$.

100. а) $\left(x - (4 - \sqrt{10})\right)^2 + \left(y - (4 - \sqrt{10})\right)^2 = (4 - \sqrt{10})^2$; б) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 10$.

9.2. Вектори та їх застосування

21	22	23	24	25	26
Г	В	Г	В	А	В
27	28	29	30	31	32
В	Д	А	Г	Б	Д
33	34	35	36	37	38
Б	Г	Г	А	В	Д
39	40	41	42	43	44
А	В	А	Б	В	А
45	46	47	48	49	50
Г	Б	Д	А	В	Г
51	52	53	54	55	56
Б	Г	А	В	А	В
57	58	59	60	61	62
1-Д; 2-Г; 3-Б; 4-А	1-Б; 2-В; 3-Д; 4-А	1-Б; 2-Д; 3-А; 4-Г	1-А; 2-Д; 3-В; 4-Б	А, В, Е, Ж або В, А, Е, Ж	Б, Г, Є або Г, Б, Є
63	64	65	66	67	68
2	$\sqrt{5}$	26	20	-8	0,2
69	70	71	72	73	74
2	0	33	-10	-0,5	4
75	76	77	78	79	80
-1	5	212	150	92	-28
81	82	83	84	85	86
18	-50	64	-36	$\sqrt{\frac{5}{18}}$	$\sqrt{\frac{13}{45}}$
87	88	89	90	91	92
26	22	-26	20	18	-15

93. $\overline{AB} = 2\vec{m} - \vec{p}$; $\overline{BD} = 2\vec{p} - 2\vec{m}$; $\overline{CD} = \vec{p} - 2\vec{m}$.

94. $\overline{BM} = \frac{1}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y}$; $\overline{BK} = \frac{5}{9}\vec{x} + \frac{4}{9}\vec{y}$.

$$95. \overline{KM} = \frac{1}{2}\overline{AD} - \frac{1}{2}\overline{AB} - \overline{AA_1}.$$

$$96. \overline{LP} = \frac{1}{2}\overline{AB} - \frac{1}{2}\overline{AA_1} + \overline{AD}.$$

97. а) Півплощина, обмежена «зверху» прямою $2x + 3y + 4 = 0$;

б) коло $(x - 2)^2 + (y + 0,5)^2 = 3,25$.

98. а) Півплощина, обмежена «знизу» прямою $3x + 2y + 2 = 0$;

б) коло $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 13$.

Розділ 10. ЕЛЕМЕНТИ СТОХАСТИКИ

10.1. Комбінаторика. Різні означення ймовірності

21	22	23	24	25	26
Г	Д	Д	Г	А	В
27	28	29	30	31	32
В	Б	А	Д	Б	Г
33	34	35	36	37	38
Д	А	А	Б	Д	А
39	40	41	42	43	44
В	Б	Б	Д	А	В
45	46	47	48	49	50
Б	Д	Д	Б	Г	Г
51	52	53	54	55	56
Б	В	А	Б	Б	Б
57	58	59	60	61	62
1-В; 2-А; 3-Б; 4-Д	1-Б; 2-В; 3-Д; 4-Г	1-Б; 2-Г; 3-Д; 4-В	1-Б; 2-Г; 3-В; 4-А	Б, Д, Є або Д, Б, Є	В, Е, Ж або Е, В, Ж
63	64	65	66	67	68
7	22	8	12	100	90

69	70	71	72	73	74
4	10	18	42	60	24
75	76	77	78	79	80
12	10	9	11	5040	504
81	82	83	84	85	86
0,45	0,7	24	24	0,6	$\frac{4}{7}$
87	88	89	90	91	92
0,125	0,375	0,16	0,75	9950	1100

93. $n < 6$.

97. $\frac{5}{9}$.

94. $n \square 8$.

98. $\frac{107}{288}$.

95. $P = \frac{C_n^2}{C_{3n}^2} = \frac{n-1}{9n-3}$.

99. $\frac{1+3\ln 2}{8}$.

96. $P = \frac{4n}{3(3n-1)}$, $P > \frac{1}{2}$ при $n \in \{1; 2\}$.

100. $\frac{1}{6}$.

10.2. Основні теореми теорії ймовірностей. Математична статистика

21	22	23	24	25	26
Д	А	Б	В	Б	А
27	28	29	30	31	32
А	В	Б	Д	Б	А
33	34	35	36	37	38
Д	Г	Д	Г	Г	А
39	40	41	42	43	44
В	Д	Б	А	Б	Г
45	46	47	48	49	50
В	Г	Г	В	А	Г

51	52	53	54	55	56
Г	Д	В	Б	А	В
57	58	59	60	61	62
1-Б; 2-Д; 3-А; 4-В	1-В; 2-Д; 3-Г; 4-Б	1-В; 2-Г; 3-Д; 4-Б	1-Б; 2-А; 3-В; 4-Д	В, Д	А, Є
63	64	65	66	67	68
0,4	0,665	0,18	0,368	25	87,5
69	70	71	72	73	74
0,28	0,98	0,16	0,76	0,48	0,75
75	76	77	78	79	80
0,72	0,8	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{7}$	0,154	0,049
81	82	83	84	85	86
$\frac{8}{33}$	$\frac{28}{165}$	20	6	61	56
87	88	89	90	91	92
92,5	96,5	13	0,4	59	2,667

93. Імовірніше, що В влучить.

94. Імовірніше, що А не сплатив податки.

95. а) $(0,85)^3$; б) $1 - (0,15)^3$.

96. а) $(0,98)^3$; б) $C_3^2 (0,97)^2 \cdot 0,02$.

97. а) 0,033; б) $\frac{25}{33} \approx 0,758$.

98. а) 0,83; б) $\frac{45}{83} \approx 0,542$.

99. б) $Mo = 7$, $Me = 6$, $\bar{x} = 7$; г) менеджер має рацію.

100. б) $\bar{x} = 7,1$; в) менеджер має рацію.

ЗМІСТ

Передмова	3
Розділ 1. Числа і вирази	7
1.1. Цілі і дробові раціональні вирази	7
1.2. Ірраціональні вирази	18
1.3. Тригонометричні вирази	30
1.4. Логарифмічні вирази	43
Розділ 2. Функції та їх графіки	55
2.1. Поняття функції. Основні властивості функцій	55
2.2. Основні елементарні функції	72
2.3. Побудова графіків функцій та рівнянь за допомогою геометричних перетворень	88
Розділ 3. Рівняння та системи рівнянь	107
3.1. Цілі та дробові раціональні рівняння	107
3.2. Ірраціональні та тригонометричні рівняння	119
3.3. Показникові та логарифмічні рівняння	133
Розділ 4. Нерівності та системи нерівностей	148
4.1. Цілі та дробові раціональні нерівності	148
4.2. Ірраціональні та тригонометричні нерівності	161
4.3. Показникові та логарифмічні нерівності	175
Розділ 5. Текстові задачі	189
5.1. Задачі на арифметичні співвідношення між об'єктами	189
5.2. Задачі на рух і на роботу	206
5.3. Задачі на відсотки та на подільність цілих чисел	226
Розділ 6. Елементи математичного аналізу	242
6.1. Числові послідовності. Арифметична і геометрична прогресії	242
6.2. Похідна та її застосування	257
6.3. Первісна, інтеграл та їх застосування	273
Розділ 7. Планіметрія	291
7.1. Трикутники та їх елементи	291
7.2. Чотирикутники і багатокутники	307
7.3. Коло, круг та їх елементи	321

Розділ 8. Стереометрія	337
8.1. Прямі та площини в просторі	337
8.2. Многогранники	352
8.3. Тіла обертання. Комбінації тіл	367
Розділ 9. Координати і вектори	383
9.1. Системи координат на площині та в просторі	383
9.2. Вектори та їх застосування	398
Розділ 10. Елементи стохастики	414
10.1. Комбінаторика. Різні означення ймовірності.....	414
10.2. Основні теореми теорії ймовірностей. Математична статистика ..	432
Відповіді	450
Розділ 1	450
Розділ 2	455
Розділ 3	462
Розділ 4	466
Розділ 5	472
Розділ 6	476
Розділ 7	481
Розділ 8	484
Розділ 9	488
Розділ 10	491

Навчальне видання

Енциклопедія тестових завдань

ЗАХАРІЙЧЕНКО Юрій Олексійович
ШКОЛЬНИЙ Олександр Володимирович
ЗАХАРІЙЧЕНКО Ліліана Ігорівна
ШКОЛЬНА Олена Володимирівна

ПОВНИЙ КУРС МАТЕМАТИКИ В ТЕСТАХ

Редактор *О. В. Костіна*. Технічний редактор *О. В. Сміян*
Т14022У. Підписано до друку 27.07.2011. Формат 70×90/16. Папір офсетний.
Гарнітура Шкільна. Друк офсетний. Ум. друк. арк. 31,17.

ТОВ Видавництво «Ранок». Свідоцтво ДК № 3322 від 26.11.2008.
61071 Харків, вул. Кібальчича, 27, к. 135.

Адреса редакції: 61145 Харків, вул. Космічна, 21а. Тел. (057) 719-48-65, тел./факс (057) 719-58-67.
Для листів: 61045 Харків, а/с 3355. E-mail: office@ranok.kharkov.ua

З питань реалізації звертатися за тел.: у Харкові – (057) 712-91-44, 712-90-87;
Києві – (044) 599-14-53, 377-73-23; Білій Церкві – (04563) 6-90-92;
Вінниці – (0432) 55-61-10, 27-70-08; Дніпропетровську – (056) 785-01-74;
Донецьку – (062) 261-73-17; Житомирі – (0412) 41-27-95, 44-81-82;
Івано-Франківську – (0342) 72-41-54; Кривому Розі – (056) 401-27-11;
Луганську – (0642) 53-34-51; Львові – (032) 244-14-36; Миколаєві – (0512) 37-85-87;
Одесі – (048) 737-46-54; Сімферополі – (0652) 54-21-38; Тернополі – (0352) 51-28-27;
Хмельницькому – (0382) 70-63-16; Черкасах – (0472) 51-22-51, 36-72-14;
Чернигові – (0462) 62-27-43

E-mail: commerce@ranok.com.ua
«Книга поштою»: 61045 Харків, а/с 3355. Тел. (057) 717-74-55, (067) 546-53-73.
E-mail: pochta@ranok.com.ua
www.ranok.com.ua

Повний курс математики в тестах

ЕНЦИКЛОПЕДІЯ
ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ

Основні типи тестових завдань, що використовуються в світовій практиці

У посібнику ви знайдете:

- завдання для початківців
- завдання для учнів із середнім рівнем підготовки
- завдання підвищеної складності

Посібник допоможе учням, абітурієнтам
та студентам вишів:

- у процесі навчання
- при систематизації знань
- під час підготовки до ДПА і ЗНО

Уся шкільна математика під однією обкладинкою

ISBN 978-617-540-281-8



9 786175 402818

ВИДАВНИЦТВО
РАНОК
www.ranok.com.ua

Навчально-методична література видавництва «РАНОК»

УСІ КНИГИ ТУТ!

🛒 **КУПИТИ:** WWW.RANOK.COM.UA

⬇️ **ЗАВАНТАЖИТИ:** WWW.E-RANOK.COM.UA

📧 **ЗАМОВИТИ:** pochta@ranok.com.ua

безкоштовний каталог видань: (057) 717-74-55