Серія «Усі уроки»
Заснована 2006 року

С. П. Бабенко

Усі уроки ГЕОМЕТРІЇ 11 клас

Академічний рівень

Харків
Видавнича група «Основа»
2011

УДК 514
ББК 22.151
Б12

Бабенко С. П.
Б12 Усі уроки геометрії. 11 клас. Академічний рівень. — Х.: Вид. група «Основа», 2011. — 299, [5] с. — (Серія «Усі уроки»).

ISBN 978-617-00-1088-9.

Докладні розробки уроків до вивчення геометрії в 11 класі (академічний рівень).

Цікаві методичні рекомендації, різноманітні прийоми роботи із завданнями, велика кількість усних вправ, широкий вибір форм перевірки знань, використання ігрових моментів на уроці, грамотне урахування вікових особливостей — усе це вигідно відрізняє посібник від традиційних планів-конспектів уроків.

Посібник для вчителя нового покоління.

УДК 514
ББК 22.151

ISBN 978-617-00-1088-9

ЗМІСТ

ГЕОМЕТРІЯ. 11 КЛАС. АКАДЕМІЧНИЙ РІВЕНЬ

ОРІЄНТОВНЕ КАЛЕНДАРНЕ ПЛАНУВАННЯ (І семестр — 32 годин (2 години на тиждень) ІІ семестр — 38 годин (2 години на тиждень), усього — 70 годин

№ уроку	Зміст навчального матеріалу (тема уроку)	Кількість годин
	Тема 1. Координати та вектори у просторі	16
1	Прямокутна система координат у просторі	1
2	Відстань між точками	1
3	Координати середини відрізка	1
4	Переміщення в просторі та його властивості	1
5	Симетрія в просторі	1
6	Паралельне перенесення в просторі	1
7	Розв'язування задач	1
8	Вектори в просторі	1
9	Операції на векторами в просторі та їх властивості	1
10	Скалярний добуток векторів у просторі	1
11	Розв'язування задач	1
12	Компланарність векторів [Розкладання векторів за трьома некомпланарними векторами]	1
13	[Рівняння площини]	1
14	Розв'язування задач	1
15	Координати та вектори в просторі. Підсумковий урок	1
16	Координати та вектори в просторі. Контрольна робота № 1	1
	Тема 2. Многогранники	16
17	Двогранні кути. Лінійний кут двогранного кута. Многогранні кути	1

№ уроку	Зміст навчального матеріалу (тема уроку)	Кількість годин
18	Многогранник та його елементи. Опуклі многогранники	1
19	Призми. Пряма і правильні призми	1
20	Розв'язування задач	1
21	Площі бічної та повної поверхонь призми	1
22	Розв'язування задач	1
23	Паралелепіпед	1
24	Прямокутний паралелепіпед. Куб	1
25	Піраміда. Площі бічної та повної поверхні піраміди	1
26	Розв'язування задач	1
27	Правильна піраміда. Формула для обчислення бічної поверхні правильної піраміди	1
28	Розв'язування задач. (Зрізана піраміда*)	1
29	Правильні многогранники	1
30	Підсумковий урок із теми «Многогранники»	1
31	Контрольна робота № 2	1
32	Узагальнення знань учнів, набутих у першому семестрі. Розв'язування задач	1
	Тема 3. Тіла обертання	14
33	Тіла та поверхні обертання	1
34	Циліндр і його елементи	1
35	Перерізи циліндра площинами	1
36	Розв'язування задач	1
37	Розв'язування задач	1
38	Конус і його елементи	1
39	Перерізи конуса площинами. Зрізаний конус	1
40	Розв'язування задач	1
41	Розв'язування задач	1
42	Куля і сфера. Перерізи кулі площиною	1
43	Площина, дотична до сфери	1
44	Розв'язування задач. [Рівняння сфери]	1
45	Підсумковий урок із теми «Тіла обертання»	1

№ уроку	Зміст навчального матеріалу (тема уроку)	Кількість годин
46	Контрольна робота № 3	1
	Тема 4. Об'єми та площі поверхонь геометричних тіл	14
47	Поняття про об'єм тіла. Основні властивості об'ємів. Об'єм паралелепіпеда	1
48	Об'єм призми	1
49	Об'єм піраміди	1
50	Розв'язування задач	1
51	Об'єм циліндра	1
52	Об'єм конуса	1
53	Об'єм кулі	1
54	Розв'язування задач	1
55	Площі бічної та повної поверхонь циліндра	1
56	Площі бічної та повної поверхонь конуса	1
57	Площа сфери	1
58	Розв'язування задач	1
59	Підсумковий урок із теми «Об'єми та площі поверхонь геометричних тіл»	1
60	Контрольна робота № 4	1
	Повторення, узагальнення та систематизація навчального матеріалу. Розв'язування задач	
61, 62	Повторення стереометрії за курс 10 класу	2
63	Координати та вектори у просторі	1
64	Призма	1
65	Піраміда	1
66	Тіла обертання	1
67	Підсумкова контрольна робота	1
68	Розв'язування задач	1
69,70	Резервні години. Розв'язування задач на комбінації геометричних тіл	2

ТЕМА 1. КООРДИНАТИ ТА ВЕКТОРИ У ПРОСТОРІ (16 ГОДИН)

УРОК № 1
ПРЯМОКУТНА СИСТЕМА КООРДИНАТ У ПРОСТОРІ

Мета: домогтися засвоєння учнями:
- ✓ поняття прямокутної системи координат у просторі;
- ✓ назви координатних осей у просторі.

Сформувати вміння:
- ✓ відтворювати зміст вивчених понять;
- ✓ визначати положення точки в просторі за її координатами;
- ✓ визначати координати точки в просторі.

Тип уроку: засвоєння знань, формування вмінь.

Наочність та обладнання: конспект «Прямокутна система координат у просторі».

Хід уроку

I. Організаційний етап

Вступне слово вчителя
- ✓ особливості вивчення геометрії в 11 класі;
- ✓ вимоги до вивчення предмета;
- ✓ критерії оцінювання навчальних досягнень учнів;
- ✓ структура підручника та особливості роботи з підручником;
- ✓ додаткові матеріали (зошити для тематичного оцінювання, довідники тощо).

II. Перевірка домашнього завдання

Учитель перевіряє літнє домашнє завдання (якщо таке було задане).

III. Формулювання мети й завдань уроку

На цьому етапі уроку вчителеві доцільно нагадати учням про те, що вони ознайомлені з поняттям прямокутної системи координат на площині, що прямокутну систему координат на площині широко використовують під час вивчення функцій. Перехід від системи координат на площині до системи координат у просторі пов'язано із життєвою необхідністю.

Наприклад, положення літака в повітрі неможливо описати за допомогою тільки двох координат, тобто за допомогою координат проекції літака на поверхню землі (довготи та широти), необхідно знати ще й висоту літака над поверхнею землі. Ця та інші просторові ситуації спонукають до введення ще однієї координатної осі для описання положення точок у просторі за допомогою чисел. Отже, завданням цього уроку є засвоєння поняття прямокутної системи координат у просторі, формування вміння визначати положення точки в просторі за її координатами та координати точки в просторі.

IV. Актуалізація опорних знань і вмінь

Фронтальне опитування

1. Яку будову має прямокутна система координат на площині?
2. Яку вісь називають віссю абсцис?
3. Яку вісь називають віссю ординат?
4. Як визначають координати точки?
5. Скільки існує точок із заданими координатами?
6. Скільки координат має задана точка?
7. Чому дорівнюють координати початку координат?
8. Чому дорівнюють абсциси точок, що належать осі ординат?
9. Чому дорівнюють ординати точок, що належать осі абсцис?
10. Скільки існує точок на площині з координатами $(7;-8)$?

Математичний диктант із подальшою перевіркою та обговоренням

1. Укажіть координатну чверть або вісь координат, якій належить точка з координатами:

   а) $(-2;3)$; б) $(1;101)$; в) $(-59;0)$;

   г) $(75;-75)$; д) $(0;10)$; е) $(-20;-30)$.
2. Чому дорівнює відстань від точки $A(-5;4)$ до осі абсцис?
3. Чому дорівнює відстань від точки $B(-9;1)$ до осі ординат?
4. Дано: точка $A(2;3)$, точка $B(x;y)$. Наведіть які-небудь значення x і y такі, щоб відрізок AB:

   а) перетинав вісь абсцис, але не перетинав осі ординат;
   б) перетинав вісь ординат, але не перетинав осі абсцис;
   в) перетинав обидві координатні осі;
   г) не перетинав жодної з координатних осей;
   д) проходив через початок координат.

V. Засвоєння знань

План вивчення нового матеріалу

1. Побудова прямокутної системи координат у просторі.
2. Назви координатних осей у просторі.
3. Поняття координатних площин.
4. Визначення координат довільної точки простору.
5. Відповідність кожній точці простору єдиної впорядкованої трійки чисел.
6. Відповідність будь-якій трійці чисел єдиної точки простору.

Конспект 1

Прямокутна система координат у просторі

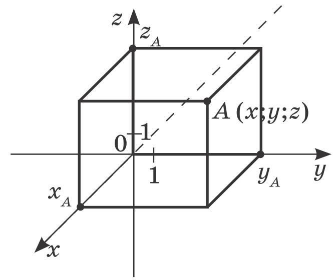
Прямокутна система координат у просторі задається трійкою попарно перпендикулярних осей:

вісь абсцис Ox, вісь ординат Oy, вісь аплікат Oz, які мають спільний початок (початок координат) і однаковий масштаб уздовж осей.

Кожній точці простору за певним правилом ставиться у відповідність трійка чисел $(x;y;z)$, які називають координатами точки.

Правило визначення координат точки

Через точку A проводимо три площини, паралельні координатним площинам xy, xz, yz. Ці площини перетнуться з координатними осями в точках x_A, y_A, z_A. Число x, абсолютна величина якого дорівнює довжині відрізка Ox_A, називають абсцисою точки A. Аналогічно визначають ординату y і аплікату z точки A.



Координати в просторі записують у дужках поруч із буквеним позначенням точки, причому першою записують абсцису, другою — ординату, третьою — аплікату.

Точки, аплікати яких дорівнюють нулю, належать площині xy;

точки, ординати яких дорівнюють нулю, належать площині xz;

точки, абсциси яких дорівнюють нулю, належать площині yz.

Будь-якій трійці чисел x, y, z відповідає єдина точка простору $A(x,y,z)$

Під час вивчення нового матеріалу доречно провести аналогію між прямокутною системою координат на площині та прямокутною системою координат у просторі. Цьому сприяють вправи, запропоновані учням під час актуалізації опорних знань і вмінь. Оскільки матеріал в основному відомий учням, його викладення доцільно провести так, щоб окремі фрагменти теорії були підбиттям підсумку роботи, виконаної учнями раніше.

VI. Формування вмінь

Виконання усних вправ

1. Точка K розташована на від'ємній півосі z на відстані 10 від початку координат. Які координати точки K?
2. Перша координата точки від'ємна, а друга і третя дорівнюють нулю. Як розміщена ця точка в просторі?
3. Точка A лежить на площині xy, але не на осях координат. Що можна сказати про координати цієї точки?

Виконання письмових вправ

1. Укажіть координатну площину, в якій лежить точка:
а) $A(0;-2;8)$; б) $B(-1;0;-5)$; в) $C(9;-3;0)$.
2. З-поміж точок $A(2;0;-4)$, $B(3;0;0)$, $C(0;5;0)$, $D(-2;9;0)$, $E(0;0;13)$ виберіть ту, яка належить:
а) осі аплікат; б) осі ординат.
3. З-поміж точок $A(2;2;-8)$, $B(0;2;-4)$, $C(-4;0;6)$, $D(0;-12;8)$ виберіть ту, яка не належить жодній із координатних площин.
4. Знайдіть відстань від точки $P(-5;-6;-7)$ до координатних площин.
5. Побудуйте в прямокутній системі точки $A(1;-3;2)$ і $B(-3;3;-4)$. Яка з цих точок розміщена ближче до площини xy? Чи правильно, що точки A і B знаходяться на однаковій відстані від площини xz?

Виконання наведених вправ сприяє засвоєнню поняття прямокутної системи координат у просторі. За допомогою цих вправ можна сформувати вміння знаходити точку простору за її координатами, знаходити координати точки. Крім того, виконання усних вправ сприяє розвитку просторової уяви учнів, тому бажано, щоб учні розв'язували задачі дійсно усно, не користуючись чернетками. Під час виконання вправ доцільно вимагати від учнів обґрунтування відповідей, навіть якщо вони здаються очевидними. Наприклад, розв'язуючи письмово задачу 1, необхідно не тільки вказати площину, якій належить та чи інша точка, але й дати пояснення, чому точка належить саме цій координатній площині.

VII. Підсумки уроку

1. Поясніть, як визначають координати точки в просторі.

2. Заповніть порожні місця в таблиці:

Положення точки	На координатній осі			У координатній площині		
	Ox	Oy	Oz	xy	yz	xz
Координати точки						

VIII. Домашнє завдання

Вивчити означення понять, розглянутих на уроці.

Виконати вправи.

1. Знайдіть координати основ перпендикулярів, проведених із точки $A(5;9;13)$, до координатних осей і координатних площин.
2. Знайдіть відстані від точки $M(7;-9;5)$ до координатних площин.
3. Побудуйте в прямокутній системі координат куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ так, щоб грань $ABCD$ належала площині xy, а початок координат збігався з точкою перетину діагоналей цієї грані. Знайдіть координати вершин цього куба, якщо довжина ребра дорівнює 5 см. Скільки розв'язків має задача?

Повторити формулу для знаходження відстані між точками площини, якщо відомі координати цих точок.

УРОК № 2
ВІДСТАНЬ МІЖ ТОЧКАМИ

Мета: домогтися засвоєння формули для знаходження відстані між двома точками в просторі, заданими координатами; сформувати вміння застосовувати цю формулу до розв'язування задач.

Тип уроку: засвоєння знань, формування вмінь.

Наочність та обладнання: конспект «Відстань між двома точками в просторі».

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Перевірка наявності та обговорення письмового домашнього завдання

Виконання тестових завдань

Варіант 1

1. Яка з наведених точок належить координатній осі Ox?

А) $A(1;-5;0)$; Б) $B(5;0;-4)$; В) $C(-9;0;0)$; Г) $D(0;-8;0)$.

2. Яка з наведених точок належить координатній площині xz?
А) $A(0;-7;0)$; Б) $B(4;0;-1)$; В) $C(3;-4;3)$; Г) $D(-1;-1;2)$.

Варіант 2

1. Яка з наведених точок належить осі Oy?
А) $A(2;0;-3)$; Б) $B(0;-4;0)$; В) $C(3;1;-1)$; Г) $D(0;9;1)$.
2. Яка з наведених точок належить координатній площині yz?
А) $A(0;3;1)$; Б) $B(2;0;0)$; В) $C(1;1;6)$; Г) $D(5;-3;-3)$.

III. Формулювання мети й завдань уроку

Щоб створити ситуацію, яка допоможе учням усвідомити необхідність вивчення зазначеної теми, вчитель може запропонувати для обговорення такі питання:

1. Як знайти периметр трикутника ABC, якщо його вершини лежать у координатній площині і мають координати: $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$?

Для розв'язування цієї задачі треба спочатку знайти довжини відрізків, які є сторонами трикутника ABC (або відстані між відповідними точками), скориставшися формулою відстані між двома точками на площині: $AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$, а потім знайти суму довжин цих відрізків.

2. Як знайти периметр трикутника ABC, якщо його вершини мають координати: $A(-3;0;4)$, $B(-2;1;1)$, $C(3;0;4)$?

Після обговорення ситуації (що змінилося, чи можна розв'язати задачу тим самим способом, що й попередню, тощо) вчитель формулює завдання: дослідити можливість визначення відстані між двома точками через їхні координати в прямокутній системі координат у просторі. Учитель звертає увагу учнів на те, що ця формула є однією з основних формул методу координат. Вивчення формули відстані між двома точками простору, якщо відомі їх координати, і є основною метою уроку.

IV. Актуалізація опорних знань

Колективне розв'язування задач

1. Знайдіть відстань між двома точками, які лежать на координатній прямій:
а) $A(5)$ і $B(2)$; б) $A(-3)$ і $B(-7)$;
в) $A(-5)$ і $B(6)$; г) $A(x_1)$ і $B(x_2)$.

2. Знайдіть відстань між двома точками, які лежать у координатній площині:
а) $A(3;4)$ і $B(-1;1)$; б) $A(-5;2)$ і $B(3;-4)$;
в) $A(3;1)$ і $B(0;-1)$; г) $A(x_1;y_1)$ і $B(x_2;y_2)$.
3. Знайдіть відстань до початку координат від точки:
а) $A(5;-2)$; б) $A(-4;3)$.
4. На осі Oy знайдіть точку, рівновіддалену від точок $A(2;4)$ і $B(-1;5)$.

V. Засвоєння знань

План вивчення теми

1. Формула відстані між двома точками.
2. Відстань від точки до початку координат.
3. Застосування формули відстані між двома точками.

Конспект 2

Відстань між двома точками в просторі

1. Теорема. Відстань між точками $A(x_1;y_1;z_1)$ і $B(x_2;y_2;z_2)$ обчислюють за формулою $AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$.

2. Наслідок. Відстань від точки $A(x;y;z)$ до початку координат дорівнює

$$AO=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

3. Задача. На осі Oz знайдіть точку C, рівновіддалену від точок $A(-3;2;5)$ і $B(2;-2;4)$.

Розв'язання. Нехай точка $C(0;0;z)$ рівновіддалена від точок A і B. Тоді

$$CA^2=(-3-0)^2+(2-0)^2+(5-z)^2=9+4+25-10z+z^2=38-10z+z^2;$$

$$CB^2=(2-0)^2+(-2-0)^2+(4-z)^2=4+4+16-8z+z^2=24-8z+z^2.$$

За умовою $CA=CB$, тому $CA^2=CB^2$ і $38-10z+z^2=24-8z+z^2$, звідки $z=7$.

Відповідь. $C(0;0;7)$

Вивчення нового матеріалу можна розпочати із запитання: як формулу для обчислення відстані між двома точками на площині $AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ узагальнити на випадок двох точок у просторі? Учні, швидше за все, здогадаються про необхідну модифікацію останньої формули. Після цього її виведення доцільно провести лекційним методом. Під час доведення теореми (виведення формули) необхідно розглянути окремий випадок: відрізок паралельний якій-небудь координатній площині.

Для кращого запам'ятовування формулу

$$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

корисно записати словами: *відстань між двома точками дорівнює квадратному кореню із суми квадратів різниць відповідних координат точок.*

Можна обговорити з учнями питання: чи правильна рівність

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\ ?$$

Як правильність цієї рівності обґрунтувати аналітично та геометрично?

VI. Формування вмінь

Виконання усних вправ

1. Чому дорівнює відстань між точками:
а) $A(0;0;3)$ і $B(0;-4;0)$; б) $A(2;0;0)$ і $B(-1;0;0)$?
2. Знайдіть відстань від точки $M\left(-1;2;\sqrt{11}\right)$ до початку координат.

Виконання письмових вправ

1. При якому значенні x $AB=AC$, якщо $A(x;-2;0)$, $B(x;-3;2)$, $C(2;-2;2)$?
2. Задано точки $A(2;-3;z)$, $B(4;1;2)$, $C(3;-1;-1)$. При якому значенні z виконується рівність $\frac{1}{2}AB=AC$?
3. На осі Oy знайдіть точку, відстань від якої до точки $A(-4;0;9)$ удвічі більша від відстані до точки $B(4;0;-2)$.
4. Доведіть, що точки $A(0;12;17)$, $B(9;-3;8)$, $C(18;-18;-1)$ лежать на одній прямій.
5. Доведіть, що трикутник з вершинами $A(4;2;10)$, $B(10;-2;8)$, $C(-2;0;6)$ рівнобедрений.

Під час розв'язування вправ на засвоєння формули для обчислення відстані між двома точками в просторі доцільно зробити акценти на таких моментах:

✓ зазначена формула правильна й у випадках, якщо точка (точки) лежить на координатній осі або в координатній площині;

✓ як окремий наслідок із доведеної теореми можна розглянути формулу відстані від заданої точки до початку координат;

✓ застосування вивченої формули можливо не тільки у випадках, коли вказано на необхідність обчислення відстані між двома точками, але й у випадках, що передбачають обчислення довжин відрізків для доведення певних геометричних фактів (письмова задача № 5).

VII. Підсумки уроку

Виконання усних вправ

1. Знайдіть відстань AB, якщо $A(-1;3;-1)$, $B(-1;0-5)$.
2. Яка з точок: $A(2;1;5)$ чи $B(-2;1;6)$ — лежить ближче до початку координат?

VIII. Домашнє завдання

Вивчити формулу для обчислення відстані між двома точками простору.

Виконати вправи

1. Знайдіть значення x, якщо відстань між точками $A(x;3;-5)$ і $B(2;-1;0)$ дорівнює $5\sqrt{2}$.
2. Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо $A(7;1;-5)$, $B(4;-3;-4)$, $C(1;3;-2)$.
3. Доведіть, що трикутник ABC правильний, якщо $A(7;1;-7)$, $B(0;8;-7)$, $C(0;1;0)$.
4. На осі Ox знайдіть точку, відстань від якої до точки $K(0;2;-1)$ утричі менша від відстані до точки $M(0;7;5)$.

Повторити формулу для обчислення координат середини відрізка на площині.

УРОК № 3
КООРДИНАТИ СЕРЕДИНИ ВІДРІЗКА

Мета: домогтися засвоєння формули для знаходження координат середини відрізка, якщо відомі координати його кінців; сформувати вміння використовувати цю формулу для розв'язування задач.

Тип уроку: засвоєння знань, формування вмінь.

Наочність та обладнання: конспект «Координати середини відрізка».

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Перевірка наявності та обговорення письмового домашнього завдання

Самостійна робота з подальшою взаємоперевіркою

Варіант 1

1. Знайдіть довжину відрізка MN, якщо $M(-2;-3;1)$ і $N(-1;-1;3)$.
2. Знайдіть координати точки, яка лежить на осі Ox і рівновіддалена від точок $A(1;3;2)$ і $B(-2;1;4)$.
3. При яких значеннях x виконується рівність $3MN = MK$, якщо $M(1;-3;-5)$, $N(x;-1;-2)$, $K(4;3;4)$?

Варіант 2

1. Знайдіть довжину відрізка PK, якщо $P(-1;-2;3)$, $K(-2;0;1)$.
2. Знайдіть координати точки, яка лежить на осі Oy і рівновіддалена від точок $A(4;-1;3)$ і $B(1;3;0)$.
3. При яких значеннях y виконується рівність $2MN = MK$, якщо $M(-2;1;3)$, $N(-3;y;6)$, $K(0;5;9)$?

III. Формулювання мети й завдань уроку

Як і на попередньому уроці, можна скористатися аналогією між формулами для обчислення координат середини відрізка на площині й у просторі, запропонувавши учням для обговорення такі задачі:

1. Як знайти довжину медіани CM трикутника ABC, якщо $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$?

Учні пригадують, що медіана трикутника — це відрізок, який сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони. Отже, для того щоб обчислити довжину медіани CM трикутника ABC, потрібно спочатку знайти координати точки $M(x;y)$ — середини відрізка AB, скориставшися формулами для обчислення координат середини відрізка на площині: $x=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y=\frac{y_1+y_2}{2}$, а потім обчислити довжину відрізка CM.

2. Як знайти довжину медіани CM трикутника ABC, якщо $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$, $C(x_3;y_3;z_3)$?

За аналогією з попередньою задачею, спочатку треба знайти координати середини відрізка AB, але в поданій задачі цей відрізок розміщений у просторі.

Виведення формул для знаходження координат середини відрізка у просторі — основна мета уроку.

IV. Актуалізація опорних знань

Колективне розв'язування задач

1. Знайдіть координату середини відрізка AB, якщо:
а) $A(3)$, $B(7)$; б) $A(-5)$, $B(9)$; в) $A(x_1)$, $B(x_2)$.
2. Знайдіть координати середини відрізка AB, якщо:
а) $A(2;-3)$, $B(-4;1)$; б) $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$.
3. Точка $M(3;-5)$ — середина відрізка AB. Знайдіть координати точки A, якщо $B(-3;1)$.
4. Знайдіть довжину середньої лінії трикутника ABC, яка паралельна стороні BC, якщо $A(1;7)$, $B(-3;-5)$, $C(5;-5)$.

V. Засвоєння знань

План вивчення теми

1. Формули для обчислення координат середини відрізка в просторі.
2. Застосування формули координат середини відрізка в просторі.

Конспект 3

1. Теорема. Координати $(x;y;z)$ точки, що є серединою відрізка, обчислюють за формулами:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2},$$

де $(x_1;y_1;z_1)$ і $(x_2;y_2;z_2)$ — координати кінців відрізка.

2. Задача. Знайдіть координати точки C — середини відрізка AB, якщо $A(3;4;-1)$, $B(-1;2;-5)$.

Розв'язання. Оскільки $AC=BC$ і $A(3;4;-1)$, $B(-1;2;-5)$, то

$$x_C=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{3+(-1)}{2}=1,\quad y_C=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{4+2}{2}=3,\quad z_C=\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{-1+(-5)}{2}=-3.$$

Отже, $C(1;3;-3)$.

Відповідь. $C(1;3;-3)$

Як і на попередньому уроці, формули для обчислення координат середини відрізка на площині необхідно узагальнити для випадку, коли відрізок розміщений у просторі. Доведення теореми про формули координат середини відрізка проводять традиційно. Залежно від рівня підготовленості учнів виведення цих формул можна провести або у формі фронтальної роботи, або у вигляді самостійної роботи учнів за текстом підручника, або лекційним методом.

Для кращого запам'ятовування формули для обчислення координат середини відрізка за відомими координатами його кінців корисно записати словами: *кожна координата середини відрізка дорівнює півсумі відповідних координат його кінців.*

VI. Формування вмінь

Виконання усних вправ

1. Знайдіть координати точки C — середини відрізка AB, якщо $A(0;4;-9)$, $B(6;-2;3)$.
2. Чи правильно, що середина відрізка AB належить площині xz, якщо $A(3;2;-1)$, $B(-3;2;1)$?
3. Знайдіть координати точки C, якщо $AC = BC$, $A(-1;2;5)$, $B(-3;4;1)$ і точки A, B, C лежать на одній прямій.
4. AB — діаметр кола, $A(-2;3;5)$, $B(3;2;-1)$. Знайдіть координати центра кола.

Виконання письмових вправ

1. Знайдіть довжину медіани AM трикутника ABC, якщо $A(2;1;3)$, $B(2;1;5)$, $C(0;1;1)$.
2. Точка $C(1;3;-5)$ — середина відрізка AB. Знайдіть координати точки A, якщо $B(5;0;-3)$.
3. Точки $M(-2;3;4)$, $N(3;5;2)$, $K(3;-5;1)$ — середини сторін трикутника. Знайдіть координати вершин цього трикутника.
4. Точка $A(4;3;2)$ є серединою відрізка MN, точка M належить площині xy, точка N належить осі Oz. Знайдіть координати точок M і N.
5. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ із вершинами $A(-3;2;4)$, $B(3;-2;2)$, $C(1;-10;0)$, $D(-5;-6;2)$ є паралелограмом.

Майже всі задачі, що заплановані для розв'язування на уроці, спрямовані на засвоєння формул координат середини відрізка і передбачають їх застосування в прямому або зворотному порядку. Під час розв'язування письмової задачі № 5 можна застосувати ознаку паралелограма: якщо діагоналі чотирикутника перетинаються і точкою перетину діляться навпіл, то цей чотирикутник — паралелограм. Необхідно звернути увагу учнів на той факт, що оскільки відрізки AC і BD мають спільну середину, то прямі AC і BD перетинаються, а це означає, що точки A, B, C і D лежать в одній площині. Крім того, оскільки за умовою $ABCD$ — чотирикутник, то точки A, B, C і D не лежать на одній прямій. Під час розв'язування аналогічної задачі в курсі планіметрії було застосовано й інший спосіб — доводили попарну рівність протилежних сторін поданого чотирикутника. Але в просторі цей спосіб неприйнятний, оскільки з рівностей $AB = CD$ і $AD = BC$ не випливає, що точки A, B, C і D лежать в одній площині.

VII. Підсумки уроку

Виконання усних вправ

1. Знайдіть координати середини відрізка AB, якщо $A(-3;2;5)$, $B(-1;4;1)$.
2. Точка C — середина відрізка AB. Знайдіть координати точки B, якщо $A(3;-2;1)$, $C(2;-3;-1)$.
3. Точка C — середина відрізка AB, точка D — середина відрізка BC. Знайдіть координати точки D, якщо $A(-2;-1;2)$, $B(4;3;6)$.

VIII. Домашнє завдання

Вивчити формулу для знаходження координат середини відрізка.

Виконати вправи.

1. Задано точки $A(7;-1;3)$ і $B(x;y;5)$. При яких значеннях x і y середина відрізка AB належить осі Oz?
2. Доведіть, що середина відрізка з кінцями $M(a,b,c)$ і $N(p;q,-c)$ лежить у площині xy.
3. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ є ромбом, якщо $A(6;7;8)$, $B(8;2;6)$, $C(4;3;2)$, $D(2;8;4)$.
4. Знайдіть координати вершини D паралелограма $ABCD$, якщо відомі координати трьох його вершин: $A(1;-1;0)$, $B(0;1;-1)$, $C(-1;0;1)$.

Повторити перетворення фігур на площині; означення та властивості руху.

УРОК № 4
ПЕРЕМІЩЕННЯ В ПРОСТОРІ ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Мета: сформувати поняття переміщення (руху) в просторі; узагальнити властивості переміщення на площині для випадку переміщення в просторі; домогтися засвоєння властивості переміщення, за якою переміщення переводить площину в площину; сформувати поняття рівних фігур у просторі; сформувати вміння застосовувати означення та властивості переміщення до розв'язування задач.

Тип уроку: засвоєння знань, формування вмінь.

Наочність та обладнання: конспект «Переміщення в просторі та його властивості».

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Виконання тестових завдань

Варіант 1

1. Яка з точок є серединою відрізка AB, якщо $A(-1;2;-3)$, $B(3;2;-1)$?
   А) $K(2;4;-4)$; Б) $P(1;2;-2)$; В) $M(-1;2;2)$; Г) $N(1;2;2)$.
2. Точка $C(1;1;1)$ — середина відрізка AB. Знайдіть координати точки B, якщо $A(2;3;-1)$.
   А) $B(0;-1;3)$; Б) $B(-1;0;3)$; В) $B(3;0;-1)$; Г) $B(-3;1;2)$.
3. У трикутнику з вершинами $A(2;1;3)$, $B(2;1;5)$, $C(0;1;1)$ знайдіть довжину медіани AM.
   А) 1; Б) 2; В) 3; Г) 4.

Варіант 2

1. Яка з точок є серединою відрізка AB, якщо $A(-2;4;-3)$, $B(4;-2;5)$?
   А) $T(-2;2;2)$; Б) $Q(-1;1;-1)$; В) $L(1;1;1)$; Г) $F(2;-2;1)$.
2. Точка $M(-2;1;4)$ — середина відрізка KL. Знайдіть координати точки K, якщо $L(2;3;-2)$.
   А) $K(-2;-1;5)$; Б) $K(-6;1;10)$; В) $K(-6;-1;10)$; Г) $K(2;1;-5)$.

3. У трикутнику з вершинами $M(-1;2;0)$, $N(0;3;-1)$, $P(2;1;-3)$ знайдіть довжину медіани MK.
   А) 4; Б) 3; В) $2\sqrt{2}$; Г) $\sqrt{6}$.

III. Формулювання мети й завдань уроку

Тема «Перетворення фігур» стоїть окремо в курсі геометрії, тому з метою усвідомлення значення цього розділу в системі геометричних знань учитель може провести з учнями бесіду, під час якої нагадає, що предметом вивчення геометрії є геометричні фігури та їх властивості, відношення між геометричними фігурами. До відомих учням відношень між фігурами належать паралельність прямих, паралельність площин, рівність фігур на площині. Крім відношень між фігурами, учням відоме ще одне поняття сучасної геометрії — перетворення фігур на площині. Отже, предметом вивчення розділу є перетворення фігур у просторі, а метою уроку — узагальнення знань учнів про переміщення фігур на площині для випадку переміщення в просторі, вивчення нової властивості переміщення, яку воно має тільки в просторі.

IV. Актуалізація опорних знань і вмінь

Повторення поняття перетворення фігур і переміщення на площині

Фронтальне опитування

1. Що називають перетворенням фігур на площині?
2. Яке перетворення фігур на площині називають переміщенням?
3. Чи правильно, що:
   а) два переміщення, виконані послідовно, задають переміщення;
   б) перетворення, обернене до переміщення, також є переміщенням?
4. У які геометричні фігури під час переміщення переходять точки, що лежать на одній прямій? Чи зберігається порядок їх взаємного розташування?
5. У які геометричні фігури переходять під час переміщення:
   а) прямі; б) промені; в) відрізки?
6. Чи правильно, що під час переміщення зберігаються кути між променями?

Виконання усних вправ

1. Під час переміщення квадрат $ABCD$ переходить у геометричну фігуру $MNKP$. Чи може $MNKP$ бути:
   а) трикутником; б) квадратом; в) прямокутником;
   г) ромбом; д) паралелограмом?

2. У яку фігуру під час переміщення переходить ромб? Відповідь обґрунтуйте.
3. Знайдіть площу геометричної фігури, у яку під час переміщення переходить круг радіуса 5 см.
4. Під час переміщення чотирикутника $ABCD$ дістали квадрат $A_1B_1C_1D_1$. Обчисліть довжину діагоналі BD, якщо $A_1C_1 = 7$ см.
5. Під час переміщення прямокутний трикутник ABC переходить у трикутник $A_1B_1C_1$. Чи може який-небудь із кутів трикутника $A_1B_1C_1$ бути тупим?

Оскільки переміщення в просторі означають так само, як і на площині, і всі властивості переміщення, що відомі з курсу планіметрії, зберігаються, то етап актуалізації знань і вмінь учнів має вирішальне значення. Запитання, запропоновані для фронтальної роботи, призначені для відтворення означення перетворення фігур на площині, переміщення на площині та його властивостей. Вправи для усної роботи сприяють актуалізації вміння застосовувати означення та властивості переміщення до розв'язування задач. У разі необхідності під час проведення актуалізації опорних знань і вмінь можна використовувати фрагменти конспекту 4.

V. Засвоєння знань

План вивчення теми

1. Означення переміщення в просторі.
2. Властивості переміщення в просторі.
3. Означення рівних фігур у просторі.

Конспект 4

Переміщення в просторі та його властивості

1. Переміщенням (рухом) у просторі називають геометричне перетворення, яке зберігає відстані між точками.

2. Властивості переміщення:

• під час переміщення точки, що лежать на прямій, переходять у точки, що лежать на прямій, і зберігається порядок їх взаємного розміщення;

• під час переміщення прямі переходять у прямі, промені — у промені, відрізки — у відрізки, площини — у площини;

• під час переміщення зберігаються кути між променями.

3. Дві фігури в просторі називають рівними, якщо вони суміщаються переміщенням

Властивості переміщення, у яких йдеться про те, що прямі переходять у прямі, півпрямі — у півпрямі, відрізки — у відрізки і зберігаються кути між променями, доводять дослівно так само, як і для переміщення на площині. Новою властивістю переміщення в просторі є те, що переміщення переводить площину в площину. Залежно від рівня підготовленості учнів доведення можна провести лекційним методом або запропонувати учням виконати його самостійно за текстом підручника.

VI. Формування вмінь

Виконання усних вправ

1. Чи існує переміщення, яке переводить:
   а) сторону паралелограма в протилежну сторону;
   б) одну зі сторін трапеції в іншу;
   в) один із кутів трикутника в інший;
   г) одну із граней куба в іншу?
2. Точка C ділить відрізок AB у відношенні $2:3$. Унаслідок переміщення відрізок AB і точка C переходять у відрізок A_1B_1 і точку C_1 відповідно. Знайдіть довжину відрізка C_1B_1, якщо $AB = 10$ см.
3. Трикутник $A_1B_1C_1$ є образом прямокутного рівнобедреного трикутника ABC, здобутим у результаті переміщення. Чому дорівнюють кути трикутника $A_1B_1C_1$?

Виконання письмових вправ

1. Під час переміщення прямокутний трикутник ABC $(\angle C = 90°)$ переходить у трикутник $A_1B_1C_1$. Знайдіть довжину сторони A_1B_1, якщо $AC = 12$ см, $BC = 5$ см.
2. Чотирикутник $MNKP$ — образ паралелограма $ABCD$, здобутий у результаті переміщення. Обчисліть кути чотирикутника $MNKP$, якщо кут A удвічі більший від кута B.
3. Обчисліть об'єм геометричного тіла, здобутого в результаті переміщення куба, ребро якого дорівнює 5 см.
4. Діагоналі квадрата $ABCD$ перетинаються в точці O. Відрізок MO довжиною 4 см перпендикулярний до площини поданого квадрата. Унаслідок переміщення відрізок MO і площина квадрата $ABCD$ переходять відповідно у відрізок M_1O_1 і площину квадрата $A_1B_1C_1D_1$ (O_1 — точка перетину діагоналей квадрата $A_1B_1C_1D_1$). Знайдіть відстань від точки M_1 до сторони квадрата $A_1B_1C_1D_1$, якщо $AB = 6$ см.

Вправи, що заплановані для розв'язування на уроці, сприяють засвоєнню означення та властивостей переміщення. Усі запропоновані задачі передбачають формування та засвоєння учнями вмінь проводити стандартні міркування за схемою: оскільки подане перетворення є переміщенням, то за властивістю... (якою самою)... (висновок щодо співвідношень між елементами фігури, що розглядаються в задачі).

VII. Підсумки уроку

Контрольні запитання

1. Чи існує переміщення, яке переводить рівнобедрений трикутник у рівносторонній? Відповідь обґрунтуйте.
2. Чи існує переміщення, яке переводить відрізок AB, де $A(-3;2;1)$, $B(-1;1;0)$, у відрізок CD, де $C(-2;0;-1)$, $D(-3;-1;-2)$? Відповідь обґрунтуйте.

VIII. Домашнє завдання

Вивчити означення та властивості переміщення у просторі.

Виконати вправи.

1. У трикутнику ABC $\angle A = 30°$, $BC = 6$ см. Трикутник MNK — образ трикутника ABC, здобутий у результаті переміщення. Чому дорівнює радіус кола, описаного навколо трикутника MNK?
2. У ромбі $ABCD$ $\angle A = 36°$. Знайдіть кут між меншою діагоналлю та стороною ромба, здобутого в результаті переміщення ромба $ABCD$.
3. Площа бічної поверхні куба дорівнює 216 см^2. Знайдіть бічне ребро куба, здобутого в результаті переміщення поданого куба.
4. Пряма CD перпендикулярна до площини гострокутного трикутника ABC, CK — його висота. Унаслідок переміщення пряма CD, площина трикутника ABC і відрізок CK переходять відповідно в пряму C_1D_1, площину трикутника $A_1B_1C_1$ і відрізок C_1K_1. Обґрунтуйте взаємне розміщення прямих D_1K_1 і A_1B_1.

Повторити означення та властивості симетрії відносно точки та відносно прямої.

УРОК № 5
СИМЕТРІЯ В ПРОСТОРІ

Мета: сформувати поняття точок простору, симетричних відносно:

- ✓ точки;
- ✓ прямої;
- ✓ площини.

Сформувати поняття геометричних фігур, симетричних відносно площини; домогтися засвоєння основних властивостей симетрії в просторі; сформувати вміння розв'язувати задачі, що передбачають використання означення та властивостей симетрії в просторі.

Тип уроку: засвоєння знань, формування вмінь.

Наочність та обладнання: конспект «Симетрія в просторі».

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Оскільки письмові вправи домашньої роботи аналогічні задачам, розглянутим на попередньому уроці, то можна перевірити лише наявність домашнього завдання та правильність виконання обчислень; у разі необхідності, відповісти на запитання учнів, що виникли під час виконання домашньої роботи.

З метою оперативної перевірки засвоєння знань і вмінь учнів можна провести математичний диктант.

Математичний диктант

1. У яку фігуру переходить унаслідок переміщення двогранний кут?
2. У яку фігуру внаслідок переміщення переходить площина?
3. Чи існує переміщення, яке переводить пряму в промінь?
4. AM — медіана трикутника ABC. У результаті переміщення точки A, B, C і M переходять у точки A_1, B_1, C_1 і M_1 відповідно. Чому дорівнює відношення $B_1M_1 : M_1C_1$?
5. AF — висота трикутника ABC. У результаті переміщення точки A, B, C і F переходять у точки A_1, B_1, C_1 і F_1 відповідно. Яке взаємне розміщення прямих A_1F_1 і B_1C_1?
6. AP — бісектриса рівнобедреного трикутника ABC, у якого $\angle B = \angle C = 40°$. У результаті переміщення точки A, B, C і P переходять у точки A_1, B_1, C_1 і P_1 відповідно. Чому дорівнює величина кута $B_1A_1P_1$?

III. Формулювання мети й завдань уроку

На цьому етапі уроку вчителеві доречно нагадати учням про те, що їм відоме поняття симетрії відносно точки та відносно прямої на площині. Але існує багато прикладів просторової симетрії. В основі будови живих форм лежить принцип симетрії, причому природа використовує різні види симетрії майже з математичною строгістю (листя дерев, квіти, тварини). Неможливо уявити архітектурні споруди без використання симетрії у просторі. Довершену симетричну форму мають різноманітні кристали. Таких прикладів можна наводити безліч. Отже, метою уроку є вивчення симетрії в просторі та її властивостей.

IV. Актуалізація опорних знань

Фронтальне опитування

1. Які точки називають симетричними відносно точки?
2. Які точки називають симетричними відносно прямої?
3. Чи правильно, що перетворення симетрії відносно точки та відносно прямої є рухом?
4. Наведіть приклади геометричних фігур, які мають:
   а) центр симетрії; б) вісь симетрії.
5. Скільки осей симетрії має:
   а) коло; б) квадрат; в) рівнобічна трапеція?
6. Чи має осі симетрії:
   а) різносторонній трикутник; б) рівнобедрений трикутник;
   в) рівносторонній трикутник? Якщо так, то скільки?

Виконання усних вправ

1. Укажіть координати точки, симетричної точці $A(-3;2)$ відносно початку координат.
2. Знайдіть центр симетрії відрізка AB, якщо $A(4;-6)$, $B(-2;0)$.
3. Укажіть координати точки, симетричної точці $M(-5;3)$ відносно осі абсцис.
4. Укажіть координати точки, симетричної точці $K(3;-1)$ відносно осі ординат.

V. Засвоєння знань

План вивчення теми

1. Означення точок простору, симетричних відносно:
   а) точки; б) прямої; в) площини.
2. Означення перетворення симетрії відносно площини (дзеркальної симетрії).

3. Означення фігури, симетричної відносно площини.
4. Основна властивість дзеркальної симетрії (теорема).

Конспект 5

Симетрія в просторі

1. Точки A_1 і A_2 називають симетричними відносно точки O, якщо точка O — середина відрізка A_1A_2.

Перетворення, за якого кожна точка поданої фігури відображається у точку, симетричну їй відносно точки O, називають симетрією відносно точки, або центральною симетрією.

Якщо симетрія відносно деякої точки O відображає фігуру на ту ж саму фігуру, то таку фігуру називають симетричною відносно точки O, або центрально-симетричною, а саму точку O — центром симетрії фігури.

2. Точки A_1 і A_2 називають симетричними відносно прямої l, якщо пряма l проходить через середину відрізка A_1A_2 і перпендикулярна до нього.

Перетворення, за якого кожна точка поданої фігури відображається у точку, симетричну їй відносно заданої прямої, називають симетрією відносно прямої, або осьовою симетрією.

Якщо симетрія відносно деякої прямої l відображає фігуру на ту ж саму фігуру, то таку фігуру називають симетричною відносно прямої l, а саму пряму l — віссю симетрії.

3. Точки A_1 і A_2 називають симетричними відносно площини α, якщо ця площина перпендикулярна до відрізка A_1A_2 і ділить його навпіл.

Перетворення, за якого кожна точка поданої фігури відображається у точку, симетричну їй відносно площини α, називають симетрією відносно площини, або дзеркальною симетрією.

Якщо симетрія відносно деякої площини α відображає фігуру на ту ж саму фігуру, то таку фігуру називають симетричною відносно площини α, а саму площину α — площиною симетрії.

Основна властивість симетрії відносно площини (теорема):

Симетрія відносно площини є переміщенням

Перетворення симетрії відносно точки і відносно прямої у просторі означають так само, як і на площині. Тому, залежно від рівня підготовленості учнів, ці пункти плану можна запропонувати учням опрацювати самостійно за підручником або провести їх вивчення у формі фронтальної бесіди. Основну увагу слід приділити новому поняттю — симетрії відносно площини. Після введення поняття дзеркальної симетрії потрібно довести, що дзеркальна симетрія є переміщенням. Для доведення зручніше за все скористатися методом координат. Але перед цим доцільно обговорити з учнями питання про те, які координати мають точки, симетричні точці $A(x;y;z)$ відносно початку координат, координатних осей, координатних площин. Для цього можна запропонувати учням у ході вивчення нового матеріалу заповнювати таблицю:

Координати точки, симетричної точці $A(x;y;z)$ відносно:						
початку координат	площини xy	площини xz	площини yz	осі Ox	осі Oy	осі Oz
$(-x;-y;-z)$	$(x;y;-z)$	$(x;-y;z)$	$(-x;y;z)$	$(x;-y;-z)$	$(-x;y;-z)$	$(-x;-y;z)$

VI. Формування вмінь

Виконання усних вправ

1. Чи симетричні будь-які дві точки простору відносно деякої третьої точки?
2. Скільки центрів симетрії має:
   а) пряма; б) відрізок; в) коло; г) площина; д) куб?
3. Скільки осей симетрії має:
   а) пряма; б) відрізок; в) коло; г) площина; д) куб?
4. Скільки площин симетрії має:
   а) пряма; б) відрізок; в) коло; г) площина; д) куб?
5. Відомо, що довжина відрізка AB дорівнює 5 см. Чому дорівнює довжина відрізка A_1B_1, симетричного відрізку AB відносно площини xz? Відповідь обґрунтуйте.

Виконання графічних вправ

Задано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте геометричне тіло, симетричне заданому кубу відносно:

а) вершини A; б) прямої CC_1; в) площини $A_1B_1C_1$.

Виконання письмових вправ

1. Знайдіть координати точки, симетричної точці $A(-2;3;-5)$ відносно:
   а) початку координат; б) осі Oz; в) площини xy.
2. У яку точку перейде середина відрізка AB за симетрії відносно площини xz, якщо $A(4;2;10)$, $B(-2;0;6)$?

3. Точки $A(2;-4;6)$ і $B(-4;-2;0)$ симетричні відносно точки C. Знайдіть координати точки C.
4. Знайдіть координати точки A, симетричної точці $B(-3;2;-1)$ відносно точки $C(4;-2;5)$.
5. Знайдіть координати точки, у яку перейде точка $A(2;-3;1)$, якщо її спочатку симетрично відображено відносно точки $B(4;-1;5)$, а потім відносно прямої Ox.

Вправи, що заплановані для виконання на уроці, спрямовані на засвоєння учнями означень нових понять та їх властивостей, формування вмінь проводити аргументовані міркування з їх використанням. Крім того, виконання усних та графічних вправ сприяє розвитку просторової уяви учнів, а виконання письмових вправ — повторенню вивчених раніше формул координат середин відрізка.

VII. Підсумки уроку

Фронтальна робота

Задано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажіть його:

а) центр симетрії; б) осі симетрії; в) площини симетрії.

VIII. Домашнє завдання

Засвоїти поняття симетрії в просторі.

Виконати вправи.

1. Знайдіть координати точки, симетричної точці $A(1;8;-5)$ відносно:
   а) осі Oy; б) площини xz.
2. Знайдіть координати середини відрізка CD, симетричного відрізку AB відносно прямої Ox, якщо $A(2;-7;1)$, $B(4;-1;3)$.
3. Знайдіть координати точки, у яку перейде точка $A(-4;3;-2)$, якщо її спочатку симетрично відображено відносно площини xz, а потім відносно точки $B(-3;1;4)$.
4. Побудуйте прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте геометричне тіло, симетричне цьому паралелепіпеду відносно:
   а) точки D_1; б) прямої AA_1;
   в) площини ABC.

Повторити означення та властивості паралельного перенесення на площині.

УРОК № 6
ПАРАЛЕЛЬНЕ ПЕРЕНЕСЕННЯ В ПРОСТОРІ

Мета: сформувати поняття паралельного перенесення в просторі, домогтися засвоєння його властивостей; сформувати вміння розв'язувати задачі на використання означення та властивостей паралельного перенесення в просторі.

Тип уроку: засвоєння знань, формування вмінь.

Наочність та обладнання: конспект «Паралельне перенесення в просторі».

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Враховуючи, що на попередньому уроці розглядалося багато понять, перевірку домашнього завдання доцільно розпочати з теоретичного математичного диктанту.

Математичний диктант

Закінчіть речення.

1. Точки A_1 і A_2 називають симетричними відносно точки O, якщо...
2. Центральна симетрія — це...
3. Точки A_1 і A_2 називають симетричними відносно прямої l, якщо...
4. Осьова симетрія — це...
5. Точки A_1 і A_2 називають симетричними відносно площини α, якщо...
6. Дзеркальна симетрія — це...

Оскільки вправи для домашнього завдання були аналогічні тим, що виконувалися на попередньому уроці, то можна, у разі необхідності, відповісти на запитання учнів, що виникли під час виконання домашньої роботи і зібрати зошити для перевірки наявності та правильності виконання завдань.

III. Формулювання мети й завдань уроку

На цьому етапі уроку вчитель пропонує учням зіставити види переміщень на площині, які їм відомі з попередніх класів, та у просторі, з якими вони ознайомилися протягом останніх уроків, і пригадати, які види переміщень на площині ще не розглянуті. Враховуючи, що на попередньому уроці було задано повторити означення та властивості паралельного перенесення на площині, учні з легкістю знайдуть відповідь на це запитання. Отже, мета уроку — вивчення означення та властивостей паралельного перенесення в просторі.

IV. Актуалізація опорних знань

Фронтальне опитування

1. Які промені називають:
   а) однаково напрямленими; б) протилежно напрямленими?
2. Сформулюйте означення паралельного перенесення на площині.
3. Сформулюйте властивості паралельного перенесення на площині.
4. Запишіть формули, які задають у прямокутній системі координат паралельне перенесення точки $A(x;y)$ у точку $A_1(x_1;y_1)$.

V. Засвоєння знань

План вивчення теми

1. Означення паралельного перенесення в просторі.
2. Властивості паралельного перенесення в просторі.
3. Формули для задання паралельного перенесення в прямокутній системі координат.

Конспект 6

Паралельне перенесення в просторі

1. Паралельним перенесенням фігури F у напрямку променя OA на відстань a називають перетворення фігури F у фігуру F_1, за якого кожна точка X фігури F переходить у точку X_1 фігури F_1 так, що промені OA і XX_1 співнапрямлені і $XX_1 = a$.

2. Властивості паралельного перенесення

Теорема. Паралельне переміщення в просторі є переміщенням.

Наслідок 1. У результаті паралельного перенесення кожна пряма переходить у паралельну їй пряму (або в себе), відрізок — у рівний йому відрізок, кут — у рівний йому кут.

Наслідок 2. У результаті паралельного перенесення площина переходить у паралельну їй площину (або в себе).

3. За умови введення прямокутної системи координат паралельне перенесення, яке переводить точку $M(x;y;z)$ у точку $M_1(x_1;y_1;z_1)$, можна задати формулами:

$$x_1 = x + a,\ y_1 = y + b,\ z_1 = z + c,$$

де a, b і c — деякі числа, однакові для всіх точок простору

Оскільки означення та основні властивості паралельного перенесення в просторі майже не відрізняються від означення та основних властивостей паралельного перенесення на площині, то викладення нового матеріалу можна побудувати за такою ж схемою, як і на попередньому уроці. Новою і такою, що потребує доведення, є властивість паралельного перенесення, за якою площина переходить у паралельну їй площину або в себе. Доведення цієї властивості можна провести лекційним способом або запропонувати учням зробити це самостійно, використовуючи текст підручника або план доведення, наданий учителем.

VI. Формування вмінь

Виконання усних вправ

1. Чи можна в результаті якого-небудь паралельного перенесення куба дістати прямокутний паралелепіпед? Відповідь обґрунтуйте.
2. Задано паралельне перенесення, у результаті якого вершина B куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ переходить у вершину B_1. Чи правильно, що в результаті цього паралельного перенесення:
   а) грань BB_1C_1C переходить у грань AA_1D_1D;
   б) грань $ABCD$ переходить у грань $A_1B_1C_1D_1$;
   в) грань $A_1B_1C_1D_1$ переходить у грань $ABCD$?
3. Чи існує паралельне перенесення, у результаті якого одна грань піраміди переходить в іншу грань цієї ж піраміди?

Виконання графічних вправ

Задано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Виконайте паралельне перенесення цього куба так, щоб:

а) точка D перейшла у точку D_1;

б) точка A перейшла у точку C_1.

Виконання письмових вправ

1. Паралельне перенесення задано формулами:

$$x_1 = x - 3,\ y_1 = y + 3,\ z_1 = z - 1.$$

   У яку точку в результаті цього паралельного перенесення переходить точка $A(3;2;1)$?
2. У результаті паралельного перенесення точка $A(-3;2;5)$ переходить у точку $A_1(1;-2;3)$. Задайте формули цього паралельного перенесення.

3. Під час паралельного перенесення точка $A(3;4;5)$ переходить у точку $B(-2;6;-3)$. У яку точку під час цього паралельного перенесення перейде точка:
   а) $M(1;-1;1)$; б) $N(-3;2;8)$; в) $K(5;-2;0)$?
4. У результаті паралельного перенесення точка $A(-2;1;0)$ переходить у точку $A_1(1;-3;0)$. У яку точку перейде точка $D(0;-5;6)$ під час послідовного виконання паралельного перенесення, яке задають точки A і A_1, та симетрії відносно осі абсцис?
5. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$, вершини якого знаходяться в точках $A(3;-1;-2)$, $B(-5;7;4)$, $C(1;5;2)$, $D(9;-3;-4)$, є паралелограмом.

Виконання вправ спрямоване на засвоєння учнями означення та властивостей паралельного перенесення в просторі. Метою розв'язування задач є також формування вмінь застосовувати відповідні твердження для обґрунтування міркувань, розвиток просторової уяви. Необхідно приділяти увагу формуванню вмінь розв'язувати як стандартні задачі на застосування формул паралельного перенесення в прямокутній системі координат (письмові задачі № 1–4), так і нестандартні (письмова задача № 5). Слід звернути увагу учнів на те, що задачу, аналогічну письмовій задачі № 5, розв'язано під час вивчення теми «Координати середини відрізка» (урок № 3). Тепер цю задачу можна розв'язати іншим способом, використовуючи формули паралельного перенесення. Для цього треба показати, що паралельне перенесення, яке переводить точку B в точку A, переводить точку C у точку D. Дійсно, підставивши в загальні формули паралельного перенесення координати точок A і B, дістанемо:

$$3 = -5 + a,\ a = 8;\ -1 = 7 + b,\ b = -8;\ -2 = 4 + c,\ c = -6.$$

Тоді формули цього перенесення мають вигляд:

$$x_1 = x + 8,\ y_1 = y - 8,\ z_1 = z - 6.$$

Підставивши в здобуті формули координати точок D і C, дістанемо правильні рівності. Отже, за властивістю паралельного перенесення в чотирикутнику $ABCD$ дві сторони паралельні й рівні, тобто $ABCD$ — паралелограм.

VII. Підсумки уроку

Контрольні запитання

1. Сформулюйте означення паралельного перенесення в просторі.

2. Чи буде паралельним перенесенням два паралельних перенесення, виконаних послідовно?
Відповідь обґрунтуйте.
3. Чи буде паралельним перенесенням перетворення, обернене до паралельного перенесення?
Відповідь обґрунтуйте.

VIII. Домашнє завдання

Вивчити означення та властивості паралельного перенесення в просторі.

Виконати вправи.

1. Паралельне перенесення задано формулами: $x_1 = x + 2$, $y_1 = y + 3$, $z_1 = z + 4$. Точка A в результаті цього паралельного перенесення переходить у точку $A_1(4;-3;2)$. Знайдіть координати точки A.
2. У результаті паралельного перенесення точка $A(-4;5;1)$ переходить у точку $A_1(-3;5;0)$. У яку точку під час цього перенесення перейде початок координат?
3. Вершини трикутника ABC знаходяться в точках $A(7;1;-5)$, $B(4;-3;-4)$, $C(1;3;-2)$. У яку точку перейде середина K сторони AB у результаті паралельного перенесення, яке вершину C переводить у точку $C_1(-4;2;5)$?
4. Побудуйте геометричну тіло, у яке перейде куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ у результаті паралельного перенесення, що переводить точку B у точку A_1.

УРОК № 7
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Мета: працювати над засвоєнням учнями змісту понять прямокутної системи координат у просторі, основних формул координатного методу, означення симетрії та паралельного перенесення в просторі та їх властивостей.

Сформувати вміння та навички використовувати вивчені твердження для розв'язування задач.

Тип уроку: застосування знань, умінь та навичок.

Наочність та обладнання: конспекти 1–6.

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Перевірку правильності виконання письмових вправ домашнього завдання проводимо за готовими стислими записами розв'язань. Такі записи можуть виконати декілька учнів із високим рівнем навчальних досягнень, або вчитель запропонує їх у формі роздавального матеріалу для індивідуальної роботи учнів.

Перевірку засвоєння теоретичного матеріалу, що вивчався на попередньому уроці, можна провести у формі гри «Вірю — не вірю». Залежно від рівня підготовленості учнів і наявності часу учні в усній або письмовій формі (на розсуд учителя) дають стислі (або розгорнуті) відповіді на запитання.

Гра «Вірю — не вірю»

1. Чи правильно, що паралельне перенесення в просторі є переміщенням?
2. Чи правильно, що в результаті паралельного перенесення геометричне тіло може перейти само в себе?
3. Чи правильно, що два паралельних перенесення, виконаних послідовно, дають паралельне перенесення?
4. Чи правильно, що перетворення, обернене до паралельного перенесення, є тим же самим паралельним перенесенням?
5. Чи правильно, що в результаті паралельного перенесення площина переходить або в себе, або в паралельну площину?
6. Чи правильно, що для будь-яких точок A і B існує, і притому єдине, паралельне перенесення, у результаті якого точка A переходить у точку B?

III. Формулювання мети й завдань уроку

Головна мета уроку зумовлена його місцем у розділі й полягає в тому, щоб, закріпивши знання учнів про будову прямокутної системи координат у просторі, про переміщення, симетрію та паралельне перенесення в просторі, сформувати сталі вміння та навички роботи із зазначеним теоретичним матеріалом під час розв'язування задач.

IV. Відтворення та систематизація опорних знань

Учням пропонуємо самостійно повторити зміст матеріалу, вивченого на попередніх уроках, за конспектами 1–6.

V. Формування навичок

Виконання усних вправ

1. Знайдіть відстань між точками $A(3;1;3)$ і $B(1;2;1)$.

2. Якій координатній площині належить середина відрізка MN, якщо $M(3;-2;3)$, $N(-1;2;1)$?
3. Відносно якої з координатних осей точка $A(-2;3;-1)$ симетрична точці $B(-2;-3;1)$?
4. Відносно якої з координатних площин точка $M(3;-2;-1)$ симетрична точці $N(3;-2;-1)$?
5. Укажіть координати точки, яка є центром симетрії точок $K(-1;3;-2)$ і $P(1;-3;2)$.
6. Паралельне перенесення задано формулами: $x_1 = x+1$, $y_1 = y-2$, $z_1 = z+3$. У яку точку в результаті цього паралельного перенесення переходить точка $A(-5;1;-3)$?

Виконання письмових вправ

1. Знайдіть координати точки, яка лежить у площині xz і рівновіддалена від трьох точок: $A(3;-2;1)$, $B(0;-1;2)$, $C(1;4;0)$.
2. Точки $A(2;0;-3)$, $C(-6;0;-1)$, $D(5;5;2)$ є вершинами паралелограма $ABCD$. Знайдіть координати вершини B.
3. Знайдіть довжину медіани AM трикутника ABC, якщо $A(0;-1;1)$, $B(0;-1;3)$, $C(-2;-1;-1)$.
4. Знайдіть точку, симетричну середині відрізка MN відносно початку координат, якщо $M(-2;4;1)$, $N(4;2;-1)$.
5. Доведіть, що точки $A(-4;2;3)$ і $B(2;-6;-5)$ симетричні відносно точки $C(-1;-2;-1)$.
6. Чи існує паралельне перенесення, у результаті якого точка $A(-3;4;6)$ переходить у точку $A_1(1;0;3)$, а точка $B(-2;3;8)$ — у точку $B_1(2;-1;-5)$? Відповідь обґрунтуйте.

VII. Підсумки уроку

Підсумком уроку може бути повідомлення результатів виконання тестової роботи.

Тестові завдання

Варіант 1

1. Яка з наведених точок лежить на осі абсцис?
А) $A_1(-1;0;2)$; Б) $A_2(0;-3;2)$; В) $A_3(5;0;0)$; Г) $A_4(0;0;1)$.
2. Яка з наведених точок віддалена від початку координат на відстань 3?
А) $A_1(1;-1;1)$; Б) $A_2(0;1;2)$; В) $A_3(-1;2;-2)$; Г) $A_4(1;2;1)$.

3. Яка з наведених точок симетрична точці $A(5;-2;3)$ відносно площини xy?
А) $A_1(5;2;3)$; Б) $A_2(-5;2;3)$; В) $A_3(-5;-2;-3)$; Г) $A_4(5;-2;-3)$.
4. У результаті паралельного перенесення точка $A(4;2;3)$ переходить у точку $A_1(7;5;5)$. У яку точку в результаті цього паралельного перенесення перейде точка $B(-1;-2;2)$?
А) $B_1(2;1;4)$; Б) $B_2(-4;-5;-0)$; В) $B_3(2;3;-1)$; Г) $B_4(1;0;3)$.

Варіант 2

1. Яка з наведених точок лежить на осі аплікат?
А) $A_1(2;-3;0)$; Б) $A_2(0;0;5)$; В) $A_3(-2;0;-1)$; Г) $A_4(0;1;-1)$.
2. Яка з наведених точок віддалена від початку координат на відстань 5?
А) $A_1(1;3;1)$; Б) $A_2(-3;4;1)$; В) $A_3(0;-4;3)$; Г) $A_3(3;3;-1)$.
3. Яка з наведених точок симетрична точці $A(-6;-4;2)$ відносно площини xz?
А) $A_1(6;-4;-2)$; Б) $A_2(6;4;-2)$; В) $A_3(-6;4;2)$; Г) $A_4(6;4;-2)$.
4. У результаті паралельного перенесення точка $A(5;-2;2)$ переходить у точку $A_1(7;2;4)$. У яку точку в результаті цього паралельного перенесення перейде точка $B(-1;1;-3)$?
А) $B_1(1;5;-1)$; Б) $B_2(-3;-3;-5)$; В) $B_3(1;3;-1)$; Г) $B_4(1;2;-2)$.

VIII. Домашнє завдання

Повторити будову прямокутної системи координат у просторі, означення переміщення та його види.

Виконати домашню самостійну роботу.

Домашня самостійна робота

1. Обчисліть відстань від середини відрізка AB до точки M, якщо $A(-3;2;1)$, $B(-1;4;3)$, $M(1;0;-1)$.
2. Знайдіть координати точки, яка лежить на осі ординат і рівновіддалена від точок $A(1;2;-3)$ і $B(-2;1;5)$.
3. Обчисліть довжину медіани BM трикутника ABC, якщо $A(4;0;-8)$, $B(2;0;3)$, $C(16;2;8)$.
4. Точки $B(-5;7;4)$, $C(1;5;2)$, $D(9;-3;-4)$ є вершинами паралелограма $ABCD$. Знайдіть координати вершини A.
5. Доведіть, що у результаті паралельного перенесення паралелограм переходить у рівний йому паралелограм.

6. Знайдіть координати точки, у яку перейде точка $B(1;-2;3)$ у результаті послідовного виконання симетрії відносно початку координат та паралельного перенесення, яке переводить точку $A(-4;5;6)$ у точку $A_1(-7;2;9)$.

Повторити означення:
- ✓ вектора на площині;
- ✓ координат вектора;
- ✓ рівних векторів;
- ✓ довжини (модуля) вектора;
- ✓ колінеарних векторів.

УРОК № 8
ВЕКТОРИ У ПРОСТОРІ

Мета: сформувати поняття:
- ✓ вектора в просторі;
- ✓ рівних векторів;
- ✓ колінеарних векторів;
- ✓ координат вектора.

Домогтися засвоєння формули для обчислення довжини (модуля) вектора; сформувати вміння відтворювати зазначені твердження і використовувати їх для обґрунтування міркувань під час розв'язування задач.

Тип уроку: засвоєння знань, формування вмінь.

Наочність та обладнання: конспект «Вектори у просторі».

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

З метою перевірки якості виконання домашньої самостійної роботи вчитель збирає зошити учнів на перевірку.

III. Формулювання мети й завдань уроку

На цьому етапі уроку вчителеві доречно нагадати учням, що їм відомо поняття вектора на площині. Вектор — це величина, що характеризується не тільки числовим значенням, а й напрямом. Можна запропонувати учням навести приклади таких величин (сила, швидкість, прискорення тощо). Зрозуміло, що ці величини існують не тільки на площині, а й у просторі. Завдяки вивченню векторів учні зможуть краще зрозуміти деякі процеси, що відбуваються в техніці, в природі. Тому мета уроку — вивчити означення вектора в просторі, засвоїти поняття рівних векторів, колінеарних векторів, навчитися знаходити координати вектора, якщо відомі координати його початку та кінця; навчитися обчислювати довжину (модуль) вектора за його координатами.

IV. Актуалізація опорних знань

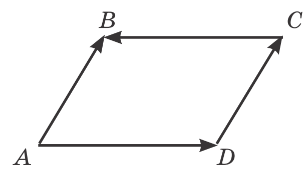
Фронтальне опитування

1. Сформулюйте означення вектора на площині.
2. Які вектори називають рівними?
3. Які вектори називають співнапрямленими? Які вектори називають протилежно напрямленими?
4. Який вектор називають нульовим?
5. Які вектори називають колінеарними?
6. Як знайти координати вектора?
7. Чи правильно, що вектори рівні, якщо вони мають однакові координати?
8. Чи правильне обернене твердження?
9. Наведіть формулу для знаходження довжини (модуля) вектора.

Виконання усних вправ

1. На *рисунку* зображено паралелограм $ABCD$.

   а) Назвіть усі вектори, зображені на рисунку.
   б) Укажіть початок і кінець кожного з векторів.
   в) Які вектори є співнапрямленими?
   г) Які вектори є протилежно напрямлені?
   д) Які вектори рівні?



2. Вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ мають однакову довжину і протилежно напрямлені. Чи рівні ці вектори?
3. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $A(3;1)$, $B(5;3)$.
4. Задано точки $A(1;2)$, $B(4;6)$, $C(4;8)$, $D(1;4)$. Чи рівні вектори: а) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$?
5. Знайдіть довжину вектора $\vec{a}(-3;4)$.
6. Знайдіть довжину вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $A(1;3)$, $B(-5;-5)$.

V. Засвоєння знань

План вивчення теми

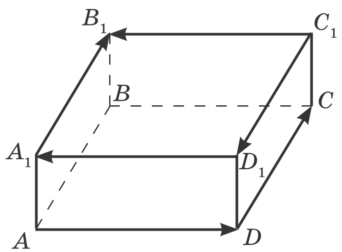
1. Означення вектора в просторі.
2. Позначення векторів.
3. Означення нульового вектора.
4. Означення координат вектора.
5. Означення рівних векторів.
6. Основні властивості й ознаки рівних векторів.
7. Формула для обчислення довжини (модуля) вектора.
8. Означення колінеарних векторів.
9. Означення співнапрямлених та протилежно напрямлених векторів.
10. Означення протилежних векторів.

Оскільки переважна більшість понять і тверджень щодо векторів безпосередньо переноситься в стереометрію з планіметрії, то вивчення нового матеріалу можна організувати у вигляді розповіді вчителя або самостійного опрацювання учнями тексту підручника. Залежно від рівня підготовленості учнів та вміння працювати з навчальною літературою можна надати учням план вивчення теми або запропонувати скласти такий план самостійно. Відповіді на питання, внесені до плану, можна надавати в письмовій (конспектування відповідного пункту підручника) або в усній формах. У будь-якому випадку необхідно провести фронтальне обговорення теми, дати відповіді на запитання учнів, за потреби, привернути увагу до тих моментів, які в стереометрії виглядають інакше, ніж у планіметрії (координати, довжина вектора).

VI. Формування вмінь

Виконання усних вправ

1. З-поміж векторів, позначених на зображенні прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, укажіть:
а) співнапрямлені;
б) протилежно напрямлені;
в) рівні;
г) протилежні.



2. Нехай α і β — дві напівплощини зі спільною межею, $\overrightarrow{AB}$ — вектор, початок якого належить α, а кінець — β. Від точки C, що належить α, відкладено вектор $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$. Чи належить кінець вектора $\overrightarrow{CD}$ напівплощині β?
3. Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$, якщо $A(3;4;5)$, $B(2;1;2)$.
4. Чому дорівнює довжина вектора $\vec{a}(-6;0;8)$?

Конспект 7

Вектори у просторі

1. Вектором у просторі називають напрямлений відрізок.

2. Напрям вектора (від початку до кінця) на рисунках позначають стрілкою.

3. Нульовим вектором називають вектор, початок і кінець якого збігаються.

4. Координатами вектора $\overrightarrow{AB}$ з початком $A(x_1;y_1;z_1)$ і кінцем $B(x_2;y_2;z_2)$ називають числа $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$, $a_3 = z_2 - z_1$.

5. Рівними називають вектори, які суміщаються паралельним перенесенням.

6. Основні властивості й ознаки рівних векторів:

- рівні вектори співнапрямлені та мають рівні довжини;
- якщо вектори співнапрямлені і мають рівні довжини, то вони рівні;
- від будь-якої точки можна відкласти вектор, що дорівнює поданому, і до того ж тільки один;
- рівні вектори мають рівні координати, і навпаки: якщо у векторів відповідні координати рівні, то ці вектори рівні.

7. Довжину (модуль) вектора $\overrightarrow{AB}(a_1;a_2;a_3)$ обчислюють за формулою

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}.$$

8. Колінеарними називають ненульові вектори, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

Нульовий вектор вважають колінеарним будь-якому вектору.

9. Ненульові вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ називають співнапрямленими, якщо промені AB і CD співнапрямлені.

Ненульові вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ називають протилежно напрямленими, якщо промені AB і CD протилежно напрямлені.

10. Протилежними векторами називають протилежно напрямлені вектори, довжини яких рівні

Виконання письмових вправ

1. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{AO}$, якщо $A(-2;3;4)$, точка O — початок координат.
2. Знайдіть координати початку вектора $\vec{a}(-2;3;-1)$, якщо його кінець збігається з точкою $B(4;2;0)$.
3. Відомо, що $A(3;-1;4)$, $B(8;-2;2)$, $C(1;-3;5)$, $D(x;y;z)$. Знайдіть x, y, z, якщо $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.
4. Задано дві координати вектора $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$: $a_1=4$, $a_2=-12$. Знайдіть його третю координату a_3, якщо $|\vec{a}|=13$.
5. Доведіть за допомогою векторів, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, якщо $A(2;4;3)$, $B(1;3;5)$, $C(2;2;5)$, $D(3;3;3)$.

Запропоновані вправи сприяють засвоєнню поняття вектора в просторі, означення рівних векторів, формул для знаходження координат вектора та його довжини. Крім того, усна задача № 2 сприяє розвитку просторової уяви. Оскільки формули для знаходження координат та довжини вектора в просторі аналогічні вже відомим учням планіметричним формулам, то для «прямого» застосування цих формул можна запропонувати усні вправи. У запропонованих письмових задачах передбачено використання цих формул у незвичних ситуаціях.

Задачі, аналогічні письмовій задачі № 5, уже були розв'язані раніше іншими способами. Доцільно показати учням розв'язання цієї задачі за допомогою векторів із використанням формули для знаходження координат векторів, означення й ознаки рівних векторів, а також ознаки паралелограма.

VII. Підсумки уроку

Контрольні запитання

1. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не є колінеарними. Чи можуть вони бути співнапрямленими; протилежно напрямленими?
2. Чи можуть бути рівними вектори зі спільним початком?

VIII. Домашнє завдання

Засвоїти поняття, які були розглянуті на уроці.

Виконати вправи.

1. Знайдіть довжину вектора $\overrightarrow{AO}$, де $A(-3;2;-1)$, точка O — початок координат.

2. Задано точки $A(-3;5;-2)$, $B(1;-1;6)$, точка K — середина відрізка AB. Знайдіть:
   а) координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BK}$; б) довжину вектора $\overrightarrow{AK}$.
3. Задано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{AB_1}$ і CD_1, якщо $A(0;0;0)$, $B(-3;0;0)$, $D(0;3;0)$, $A_1(0;0;3)$.
4. Доведіть за допомогою векторів, що чотирикутник $ABCD$ — ромб, якщо $A(2;1;-8)$, $B(1;-5;0)$, $C(8;1;-4)$, $D(9;7;-12)$.

Повторити означення та властивості додавання, віднімання та множення вектора на число на площині.

УРОК № 9
ОПЕРАЦІЇ НАД ВЕКТОРАМИ В ПРОСТОРІ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Мета: сформувати поняття:
- ✓ суми векторів;
- ✓ різниці векторів;
- ✓ множення вектора на число в просторі.

Домогтися засвоєння:
- ✓ властивостей операцій над векторами в просторі;
- ✓ умову колінеарності векторів у просторі.

Сформувати вміння виконувати додавання, віднімання векторів, множення вектора на число у випадках, якщо вектори задані геометрично та координатами; сформувати вміння застосовувати умову колінеарності векторів до розв'язування задач.

Тип уроку: засвоєння знань, формування вмінь.

Наочність та обладнання: конспект «Операції над векторами та їх властивості».

Хід уроку

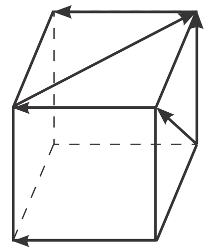
I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Виконання тестових завдань

Варіант 1



1. Скільки різних векторів зображено на *рисунку*?

А) П'ять; Б) чотири; В) три; Г) два.

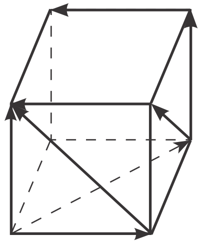
2. Задано точки $M(4;2;3)$, $N(1;-1;0)$. Якому з векторів дорівнює вектор $\overline{MN}$?

А) $\vec{m}(-1;-3;1)$; Б) $\vec{n}(-3;-3;-3)$; В) $\vec{k}(1;3;-1)$; Г) $\vec{p}(3;3;3)$.

3. Знайдіть довжину вектора $\overline{AB}$, якщо $A(1;1;1)$, $B(-1;-1;1)$.

А) 8; Б) $\sqrt{2}$; В) $2\sqrt{2}$; Г) $3\sqrt{2}$.

Варіант 2



1. Скільки різних векторів зображено на *рисунку*?

А) Шість; Б) п'ять; В) чотири; Г) три.

2. Задано точки $A(2;3;1)$, $B(1;0;2)$. Якому з векторів дорівнює вектор $\overline{AB}$?

А) $\vec{a}(-1;-3;1)$; Б) $\vec{b}(-3;-3;-3)$;

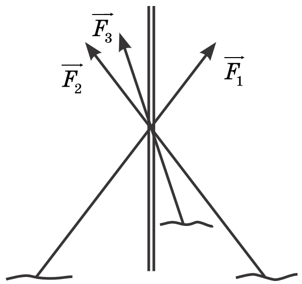
В) $\vec{c}(1;3;-1)$; Г) $\vec{d}(3;3;3)$.

3. Знайдіть довжину вектора $\overrightarrow{MN}$, якщо $M(-1;1;-1)$, $N(1;-1;-1)$.

А) 8; Б) $\sqrt{2}$; В) $2\sqrt{2}$; Г) $3\sqrt{2}$.

III. Формулювання мети й завдань уроку

Створенню прикладної мотивації навчальної діяльності може сприяти прикладна задача.



Задача. Для встановлення телевізійної антени необхідно три розтяжки, у яких виникають сили пружності $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$ (*див. рисунок*). За умови рівноваги сума цих сил (результуюча сила) повинна бути спрямована вздовж антени. Знайдіть результуючу силу. Чи виконується умова рівноваги?

Після обговорення змісту задачі учні доходять висновку, що у просторі, як і на площині, необхідно вміти виконувати операції над векторами. Отже, основна мета уроку — вивчення означення та властивостей операцій додавання, віднімання, множення вектора на число в просторі.

IV. Актуалізація опорних знань

З метою підготовки учнів до сприйняття нового матеріалу доцільно запропонувати для виконання усні та графічні вправи на повторення означення та властивостей операцій над векторами на площині. Під час виконання вправ бажано вимагати від учнів пояснень, а саме формулювання відповідних означень, властивостей, правил.

Виконання усних вправ

1. Знайдіть суму векторів $\vec{a}(2;-3)$ і $\vec{b}(1;4)$.
2. Знайдіть різницю векторів $\vec{a}(-2;4)$ і $\vec{b}(-1;-3)$.
3. Чому дорівнює добуток вектора $\vec{a}(-1;3)$ на число 5?
4. Задано ненульовий вектор $\vec{a}$. Визначте знак числа k, якщо вектори $\vec{a}$ і $k\vec{a}$:
   а) співнапрямлені; б) протилежно напрямлені.
5. Серед векторів $\vec{a}(-3;4)$, $\vec{b}(10;-8)$, $\vec{c}(-5;4)$, $\vec{d}(6;-8)$ назвіть пари колінеарних векторів. Які з цих векторів співнапрямлені, а які — протилежно напрямлені?

Виконання графічних вправ

Побудуйте паралелограм $ABCD$. Побудуйте вектор, що дорівнює: а) $\overline{AB}+\overline{AD}$; б) $\overline{AB}+\overline{BC}$; в) $\overline{AC}-\overline{AB}$; г) $2\overline{CD}$; д) $-3\overline{AB}$.

V. Засвоєння знань

План вивчення теми

1. Означення суми та різниці векторів, заданих координатами.
2. Властивості суми та різниці векторів, заданих координатами.
3. Додавання та віднімання векторів, заданих геометрично. Правила трикутника, паралелограма, паралелепіпеда.
4. Означення добутку вектора на число.
5. Властивості добутку вектора на число.
6. Умова колінеарності векторів.

Конспект 8

Операції над векторами та їх властивості

1. Сумою векторів $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ і $\vec{b}(b_1;b_2;b_3)$ називають вектор $\vec{c}(a_1+b_1;a_2+b_2;a_3+b_3)$.

Різницею векторів $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ і $\vec{b}(b_1;b_2;b_3)$ називають вектор $\vec{c}(a_1-b_1;a_2-b_2;a_3-b_3)$.

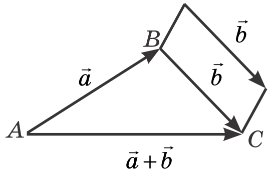
2. Для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ виконуються рівності:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$; 2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$; 3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$; 4) $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

3. Правила додавання векторів, заданих геометрично:

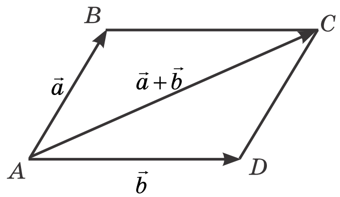
а) правило трикутника

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$



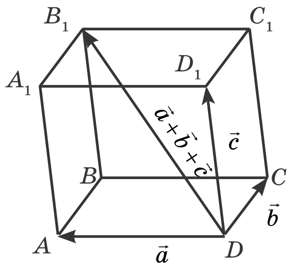
б) правило паралелограма

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$$



в) правило паралелепіпеда

$$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{DB_1}$$



4. Добутком вектора $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ на число k (або добутком числа k на вектор $\vec{a}$) називають вектор $\vec{c}(ka_1;ka_2;ka_3)$.

Якщо $\vec{a}\neq\vec{0}$, то при $k>0$ $k\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{a}$; при $k<0$ $k\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{a}$.

При будь-якому значенні k $|k\vec{a}|=|k||\vec{a}|$.

5. Для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ та чисел k і m виконуються рівності:

1) $k\vec{a}=\vec{a}k$; 2) $(km)\vec{a}=k(m\vec{a})$; 3) $k\vec{0}=0\vec{a}=\vec{0}$;

4) $(k+m)\vec{a}=k\vec{a}+m\vec{a}$; 5) $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$.

6. Вектор $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ колінеарний ненульовому вектору $\vec{b}(b_1;b_2;b_3)$ тоді й тільки тоді, коли координати вектора $\vec{a}$ пропорційні координатам вектора $\vec{b}$, тобто якщо існує таке число λ, що $a_1=\lambda b_1$, $a_2=\lambda b_2$, $a_3=\lambda b_3$

Вивчення нового матеріалу можна провести так само, як і на попередньому уроці: розповідь учителя або самостійне опрацювання учнями тексту підручника. Необхідно звернути особливу увагу на ті моменти, які не розглядаються під час вивчення аналогічної теми планіметрії (додавання векторів за допомогою правила паралелепіпеда).

VI. Формування вмінь

Виконання усних вправ

1. Чи може довжина суми двох векторів:
   а) бути меншою від довжини кожного з доданків;
   б) дорівнювати сумі довжин доданків?
2. Задано вектори $\vec{a}(2;-1;3)$ і $\vec{b}(-3;-2;1)$. Знайдіть координати вектора $\vec{c}$, якщо:
   а) $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{c}=\vec{b}-\vec{a}$.
3. Знайдіть координати вектора $\vec{c}=0{,}5\vec{a}$, якщо:
   а) $\vec{a}(2;-4;-2)$; б) $\vec{a}(-6;5;8)$.
4. Чи колінеарні вектори:
   а) $\vec{a}(6;-8;4)$ і $\vec{b}(-3;-4;2)$; б) $\vec{a}(1;2;3)$ і $b(-5;-10;-15)$?
5. Чи паралельні прямі m і n, якщо вектори $\vec{a}(0{,}3;-0{,}4;0{,}6)$ і $\vec{b}(-3;4;-6)$ лежать відповідно на цих прямих?

Виконання графічних вправ

1. Зобразіть тетраедр $ABCD$ і побудуйте вектор, що дорівнює:
   а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$; в) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$; г) $-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.
2. Зобразіть паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доведіть, що
   $$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{D_1C_1}+\overrightarrow{AD}.$$
3. Зобразіть пряму трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$. Знайдіть довжину вектора $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1C_1}$, якщо довжина кожного ребра призми дорівнює a.

Виконання письмових вправ

1. Знайдіть довжину вектора $2\vec{a}+3\vec{b}$, якщо $\vec{a}(2;0;-3)$, $\vec{b}(-1;1;4)$.
2. Перевірте колінеарність векторів $\vec{a}(3;-1;2)$ і $b(-9;3;-6)$. Установіть, який із них довший від іншого і в скільки разів, як вони напрямлені: однаково чи протилежно?
3. При яких значеннях m і n вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, якщо $\vec{a}(9;m;1)$, $\vec{b}(-18;6;n)$?

VII. Підсумки уроку

Підсумком уроку може бути виділення учнями основних видів задач на застосування вивчених означень і властивостей.

VIII. Домашнє завдання

Засвоїти зміст понять, розглянутих на уроці.
Виконати вправи.

1. Задано вектори $\vec{a}(-2;6;-4)$, $b(3;-2;5)$. Знайдіть координати вектора $\vec{c}$, якщо:

   а) $\vec{c}=2\vec{a}+b$; б) $\vec{c}=-\vec{a}+3\vec{b}$; в) $\vec{c}=\frac{1}{2}\vec{a}-2\vec{b}$.
2. Знайдіть довжину вектора $2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{DC}$, якщо $A(1;4;3)$, $B(-1;2;5)$, $C(-4;0;5)$, $D(-2;-3;1)$.
3. Зобразіть тетраедр $ABCD$. Побудуйте вектор, що дорівнює:

   а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}$; б) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}\right)$.
4. При яких значеннях m і n вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ колінеарні, якщо $A(1;0;2)$, $B(3;n;5)$, $C(2;2;0)$, $D(14;4;m)$?

Повторити означення та властивості скалярного добутку векторів на площині.

УРОК № 10
СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ У ПРОСТОРІ

Мета: сформувати поняття:

✓ скалярного добутку векторів;
✓ кута між векторами у просторі.

Домогтися засвоєння:

✓ властивостей скалярного добутку векторів;
✓ формули для обчислення скалярного добутку векторів і кута між векторами;
✓ умови перпендикулярності векторів.

Сформувати вміння відтворювати вивчені твердження, а також використовувати їх для розв'язування задач на обчислення скалярного добутку векторів, визначення кута між векторами та доведення перпендикулярності векторів.

Тип уроку: засвоєння знань, формування вмінь.

Наочність та обладнання: конспект «Скалярний добуток векторів».

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Правильність виконання письмових вправ домашнього завдання учні перевіряють самостійно за зразками розв'язання.

Перевірити рівень засвоєння учнями матеріалу, вивченого на попередньому уроці можна за допомогою математичного диктанту.

Математичний диктант

1. Знайдіть суму векторів $\vec{a}(-2;4;1)$ і $\vec{b}(3;-5;0)$.
2. Знайдіть різницю векторів $\vec{a}(3;-7;4)$ і $\vec{b}(0;-5;2)$.
3. Знайдіть різницю векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, якщо $B(5;4;-2)$, $C(2;7;-3)$, A — довільна точка простору.
4. Зобразіть три неколінеарних вектори, що не лежать в одній площині. Побудуйте вектор, який дорівнює їх сумі.
5. Знайдіть добуток вектора $\vec{a}(-2;3;-4)$ на число 5.
6. Знайдіть координати вектора $\vec{c}=\vec{a}-0{,}5\vec{b}$, якщо
$$\vec{a}(7;3;-1),\ \vec{b}(-4;2;-6).$$
7. Зобразіть ненульовий вектор $\overrightarrow{AB}$. Побудуйте вектор $-3\overrightarrow{AB}$.
8. Довжина вектора $\vec{a}$ дорівнює 7. Чому дорівнює довжина вектора $-2\vec{a}$?
9. При якому значенні n вектори $\vec{a}(-8;12;-20)$ і $\vec{b}(4;n;10)$ колінеарні?

III. Формулювання мети й завдань уроку

На цьому етапі уроку вчителеві доречно пояснити учням значення слова «скаляр». Скаляр, або скалярна величина, — це величина, кожне значення якої може бути виражене одним дійсним числом. Тобто можна сказати, що скаляр — це число. Після цього можна розглянути приклад із механіки.

Нехай під дією сили $\vec{F}$ фізичне тіло здійснило переміщення $\vec{s}$. Позначимо кут між напрямом сили і напрямом переміщення через α. (Поняття кута між векторами відоме учням із курсу планіметрії, тому вони зможуть зрозуміти, про що йдеться). Для обчислення роботи, яку виконала сила $\vec{F}$, користуються формулою $A=\vec{F}\cdot\vec{s}=Fs\cos\alpha$, де F і s — відповідно числові значення сили $\vec{F}$ і переміщення $\vec{s}$. З наведеної формули випливає, що робота A сили $\vec{F}$ є скалярною величиною, що залежить від двох векторних величин $\vec{F}$ і $\vec{s}$. Розглянутий приклад допоможе учням усвідомити доцільність вивчення скалярного добутку векторів, що і є основною метою уроку.

IV. Актуалізація опорних знань. Засвоєння нових знань

Оскільки означення та властивості скалярного добутку векторів відомі учням із курсу планіметрії, доцільно об'єднати етапи актуалізації опорних знань і засвоєння нових знань і провести вивчення нового матеріалу, використовуючи аналогію між векторами на площині та в просторі. Спочатку можна повторити теоретичні відомості з теми шляхом фронтального опитування.

Фронтальне опитування

1. Сформулюйте означення скалярного добутку векторів на площині. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}(2;3)$ і $\vec{b}(4;-1)$.
2. Які властивості має скалярний добуток векторів?
3. Сформулюйте означення кута між векторами. Чому дорівнює кут між:
   а) співнапрямленими векторами;
   б) протилежно напрямленими векторами?
4. Сформулюйте теорему про скалярний добуток векторів. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, а кут між ними дорівнює $60°$.
5. Як знайти косинус кута між векторами? Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{a}(-2;3)$ і $\vec{b}(1;2)$.
6. Чому дорівнює скалярний добуток перпендикулярних векторів?
7. Яке взаємне розміщення двох векторів, скалярний добуток яких дорівнює нулю?

Після цього можна надати учням план вивчення теми, і запропонувати, скориставшись планом, скласти опорний конспект у вигляді порівняльної таблиці (див. конспект 9). Залежно від рівня підготовленості учнів вони можуть виконати цю роботу повністю самостійно або заповнити таблицю, надану вчителем, скориставшися текстом підручника.

План вивчення теми

1. Означення скалярного добутку векторів.
2. Властивості скалярного добутку векторів.
3. Означення кута між векторами.
4. Теорема про скалярний добуток векторів.
5. Знаходження косинуса кута між векторами.
6. Умова перпендикулярності двох векторів.

Конспект 9

Скалярний добуток векторів

На площині	У просторі
1. Скалярний добуток двох векторів дорівнює сумі добутків їх відповідних координат:	
$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y$	$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$
2. Властивості скалярного множення векторів. Для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і числа k: 1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$; 2) $(k\vec{a})\vec{b}=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$; 3) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$	
3. Кутом між ненульовими векторами $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$ називають кут BAC, а кутом між довільними ненульовими векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — кут між векторами, що дорівнюють поданим векторам і мають спільний початок	
4. Скалярний добуток двох векторів дорівнює добутку їх довжин на косинус кута між ними: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cos(\vec{a};\vec{b})$	
5. Косинус кута між двома векторами дорівнює їх скалярному добутку, поділеному на добуток довжин цих векторів	
$\cos\alpha=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2}}$	$\cos\alpha=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$
6. Скалярний добуток двох перпендикулярних векторів дорівнює нулю:	
$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y=0$	$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$

VI. Формування вмінь

Виконання усних вправ

1. Знайдіть скалярний добуток векторів:
   а) $\vec{a}(1;-2;5)$ і $\vec{b}(-1;3;0)$; б) $\vec{a}\left(1,2;-2;\frac{2}{3}\right)$ і $\vec{b}(-10;2;3)$.
2. Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює $120°$. Чому дорівнює кут між векторами $2\vec{a}$ і $\frac{1}{4}\vec{b}$?
3. При якому значенні n вектори $\vec{a}(4;5;-9)$ і $\vec{b}(7;-2;n)$ перпендикулярні?
4. Визначте вид кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:
   а) $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$; б) $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$.

Виконання письмових вправ

1. У прямокутному трикутнику ABC $(\angle C = 90°)$ $AB = 6$ см, $BC = 3$ см. Знайдіть скалярний добуток векторів:
   а) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{BA}$; в) $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{CB}$.
2. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює 1 см. Знайдіть скалярний добуток векторів:
   а) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{A_1C_1}$ і $\overrightarrow{A_1C}$; в) $\overrightarrow{D_1B_1}$ і $\overrightarrow{C_1B}$.
3. Знайдіть кут між вектором $\vec{a}(1;0;-1)$ і віссю Ox.
4. Знайдіть косинус кута між векторами $\overline{MK}$ і $\overline{NL}$, якщо $M(1;2;0)$, $N(-1;3;4)$, $K(4;3;2)$, $L(-2;1;1)$.
5. Доведіть, що трикутник ABC прямокутний, якщо $A(-3;2;1)$, $B(1;1;2)$, $C(7;20;-3)$.

Під час формування вміння обчислювати скалярний добуток векторів у просторі важливо навчити учнів застосовувати не тільки означення скалярного добутку векторів, а й теорему про скалярний добуток векторів. Цьому сприяють письмові вправи № 1 і № 2. Крім того, виконання вправи № 2 дозволяє відпрацювати поняття кута між векторами в просторі, а також розвивати просторову уяву учнів. Під час розв'язування задач із метою кращого засвоєння змісту вивчених тверджень бажано вимагати від учнів їх точного відтворення. Оскільки теоретичний матеріал уроку є досить великий за обсягом, то, можливо, учні не встигнуть виконати всі запропоновані вправи. У такому випадку виконання частини вправ можна відкласти до уроку, відведеного на розв'язування задач.

VII. Підсумки уроку

Заповніть пропуски так, щоб твердження стали правильними.

1. $\vec{a}(2;3;-1)\cdot\vec{b}(\ldots;\ldots;\ldots;) = 2\cdot4+3\cdot8+1\cdot3=\ldots$
2. $\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot3-4\cdot\ldots+4\cdot1=2$.
3. $\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)=\dfrac{-3\cdot1+\ldots\cdot4+2\cdot\ldots}{\sqrt{\ldots^2+1^2+\ldots^2}\cdot\sqrt{\ldots^2+\ldots^2+5^2}}=\ldots$
4. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні, то
   $$-1\cdot\ldots+2\cdot3+3\cdot(-4)=\ldots$$

VIII. Домашнє завдання

Вивчити зміст понять, розглянутих на уроці.

Виконати вправи.

1. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}(-2;3;1)$ і $\vec{b}(1;-3;4)$.
2. Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{a}(2;-6;-3)$ і $\vec{b}(5;-10;10)$.
3. При яких значеннях n кут між векторами $\vec{a}(12;-2;n)$ і $\vec{b}(4;6;3)$ буде тупим?
4. Знайдіть косинус кута A трикутника ABC, якщо $A(-1;2;1)$, $B(3;7;4)$, $C(2;-1;1)$.
5. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює 1 см. Знайдіть скалярний добуток векторів $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AB_1}$.
6. При яких значеннях m і n вектор $\vec{c}(m;1;n)$ буде перпендикулярним кожному з векторів $\vec{a}(-3;4;6)$ і $\vec{b}(-5;-7;2)$?

УРОК № 11
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Мета: працювати над засвоєнням учнями змісту понять векторів у просторі, координат і довжини вектора, означень і властивостей суми й різниці векторів, множення вектора на число, колінеарних векторів, скалярного добутку векторів, кута між векторами, способів побудови суми й різниці векторів; продовжити роботу з формування вмінь відтворювати набуті знання та використовувати їх під час розв'язування задач.

Тип уроку: застосування знань, формування вмінь та навичок.

Наочність та обладнання: конспекти 7–9.

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Виконання тестових завдань

Варіант 1

1. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}(1;-2;4)$ і $\vec{b}(2;-3;1)$.
   А) 0; Б) 12; В) 10; Г) –6.
2. Ребро правильного тетраедра $DABC$ дорівнює 2. Чому дорівнює скалярний добуток векторів $\overrightarrow{DA}$ і $\overrightarrow{DB}$?
   А) 4; Б) $\sqrt{3}$; В) 1; Г) 2.

3. Чому дорівнює кут між векторами $\vec{a}(-1;0;1)$ і $\vec{b}(-1;1;0)$?

А) 45°; Б) 60°; В) 120°; Г) 135°.

4. Який із наведених векторів перпендикулярний вектору $\vec{a}(-1;1;-1)$?

А) $\vec{k}(0;-1;1)$; Б) $\vec{l}(2;1;-1)$; В) $\vec{m}(1;-1;1)$; Г) $\vec{n}(1;0;1)$.

Варіант 2

1. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}(-2;4;1)$ і $\vec{b}(-1;2;-1)$.

А) 9; Б) 7; В) -5; Г) 0.

2. Ребро правильного тетраедра $DABC$ дорівнює 4. Чому дорівнює скалярний добуток векторів $\overrightarrow{DB}$ і $\overrightarrow{DC}$?

А) 4; Б) 8; В) 2; Г) $2\sqrt{3}$.

3. Чому дорівнює кут між векторами $\vec{a}(0;-1;1)$ і $\vec{b}(1;0;-1)$?

А) 45°; Б) 60°; В) 120°; Г) 135°.

4. Який із наведених векторів перпендикулярний вектору $\vec{a}(1;-1;1)$?

А) $\vec{k}(-1;1;0)$; Б) $\vec{l}(-2;2;2)$; В) $\vec{m}(2;0;-2)$; Г) $\vec{n}(0;1;0)$.

III. Формулювання мети й завдань уроку

Головна мета уроку зумовлена його місцем у розділі й полягає в тому, щоб, закріпивши знання означення вектора в просторі, формул для обчислення його координат і довжини, означень та властивостей операцій над векторами, сформувати сталі вміння та навички роботи з цими твердженнями під час розв'язування задач.

IV. Відтворення та систематизація опорних знань і вмінь

Пропонуємо учням самостійно повторити зміст матеріалу, вивченого на попередніх уроках, за конспектами 7–9.

V. Формування вмінь і навичок

Виконання усних вправ

1. При яких значеннях x, y, z вектори $\vec{a}(x;y;3)$ і $\vec{b}(-1;2;z)$ рівні?

2. Знайдіть довжину вектора $\vec{a}\left(-3;1;\sqrt{6}\right)$.

3. Знайдіть координати вектора $\vec{m}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$, якщо $\vec{a}(-4;6;2)$, $\vec{b}(2;-4;-2)$, $\vec{c}(-1;3;5)$.

4. При якому значенні n вектори $\vec{a}(-2;4;n)$ і $\vec{b}(1;-2;3)$ колінеарні?

Виконання графічних вправ

1. Зобразіть довільний вектор $\vec{a}$. Побудуйте вектор:

а) $2\vec{a}$; б) $\frac{1}{2}\vec{a}$; в) $-3\vec{a}$.

2. Зобразіть паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте вектор, що дорівнює:

а) $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1B}+\overrightarrow{BD}$; б) $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{DC}$; в) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{D_1C_1}+\overrightarrow{BB_1}$.

Виконання письмових вправ

1. Точки $A(3;0;0)$, $B(0;0;0)$, $C(0;3;0)$, $B_1(0;0;3)$ є вершинами куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть координати:

а) точок C_1 і D_1; б) векторів $\overrightarrow{CD_1}$, $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{C_1D}-2\overrightarrow{A_1C}$.

2. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ довжина ребра дорівнює $\sqrt{2}$. Обчисліть скалярний добуток векторів:

а) $\overrightarrow{CD_1}$ і $\overrightarrow{C_1A_1}$; б) $\overrightarrow{DB_1}$ і $\overrightarrow{A_1C_1}$.

3. Точки $A(14;-8;-1)$, $B(7;3;-1)$, $C(-6;4;-1)$, $D(1;-7;-1)$ є вершинами ромба. Знайдіть косинус тупого кута ромба.

4. Обчисліть скалярний добуток векторів $\vec{a}=3\vec{p}-4\vec{q}$ і $\vec{b}=\vec{p}+\vec{q}$, якщо $\vec{p}(2;-1;0)$ і $\vec{q}(-1;2;3)$.

5. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ попарно перпендикулярні. Обчисліть скалярний добуток $\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)\left(2\vec{a}+0{,}5\vec{c}\right)$, якщо $\left|\vec{a}\right|=m$.

Задачі, що запропоновані для розв'язування на уроці, передбачають вільне володіння означенням вектора в просторі, формулами для обчислення координат і довжини вектора, означеннями та властивостями операцій над векторами, заданими за допомогою координат і геометрично, означенням та властивостями скалярного добутку векторів. Усі задачі відтворюють ситуації, що були розглянуті в задачах попередніх уроків (деякі — на більш високому рівні). Щоб попередити можливі труднощі в розумінні змісту та способу розв'язання запропонованих задач, перед їх розв'язуванням бажано ще раз обговорити типову ситуацію, що відповідає умові задачі, а потім спонукати учнів до аналізу ситуації, описаної в задачі, на предмет її можливої відмінності від найпростішої.

VII. Підсумки уроку

Підсумком уроку може бути виділення учнями основних видів задач на застосування вивчених означень і властивостей.

VIII. Домашнє завдання

Повторити зміст понять, вивчених на уроках 8–10 (*див. конспекти 7–9*).

Виконати домашню самостійну роботу.

Варіант 1

1. Задано три точки: $A(1;0;1)$, $B(-1;1;2)$, $C(0;2;-1)$. Знайдіть точку $D(x;y;z)$, якщо вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ рівні.
2. Знайдіть координати вектора $\vec{c}=2\vec{a}+0{,}5\vec{b}$, якщо $\vec{a}(-1;2;-3)$, $\vec{b}(-4;0;2)$.
3. Обчисліть скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$, якщо $A(-2;0;4)$, $B(5;-2;1)$, $C(2;-4;0)$, $D(7;5;-1)$.
4. Обчисліть кут між векторами $\vec{a}(-1;2;-2)$ і $\vec{b}(6;3;-6)$.
5. При якому значенні n вектори $\vec{a}(n;-2;1)$ і $\vec{b}(n;2n;4)$ перпендикулярні?

Варіант 2

1. Задано три точки: $A(-2;1;0)$, $B(1;-2;1)$, $C(-2;-1;2)$. Знайдіть точку $D(x;y;z)$, якщо вектори $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{DC}$ рівні.
2. Знайдіть координати вектора $\vec{c}=-\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$, якщо $\vec{a}(5;-4;2)$, $\vec{b}(-3;3;0)$.
3. Обчисліть скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$, якщо $A(3;1;-4)$, $B(-2;3;10)$, $C(3;-1;2)$, $D(6;-3;-2)$.
4. Обчисліть кут між векторами $\vec{a}(6;-2;-3)$ і $\vec{b}(5;0;0)$.
5. При якому значенні n вектори $\vec{a}(4;2n;-1)$ і $\vec{b}(-1;1;n)$ перпендикулярні?

УРОК № 12
КОМПЛАНАРНІСТЬ ВЕКТОРІВ [РОЗКЛАДАННЯ ВЕКТОРІВ ЗА ТРЬОМА НЕКОМПЛАНАРНИМИ ВЕКТОРАМИ]

Мета: сформувати поняття компланарних векторів; домогтися засвоєння ознаки компланарності векторів [теореми про розкладання вектора за трьома некомпланарними векторами]; сформувати вміння розв'язувати задачі на використання поняття компланарності векторів.

Тип уроку: засвоєння знань, формування вмінь.

Наочність та обладнання: конспект «Компланарність векторів».

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Зібрати зошити з виконаною домашньою самостійною роботою. За необхідності правильні розв'язання роздати учням для самостійного опрацювання вдома.

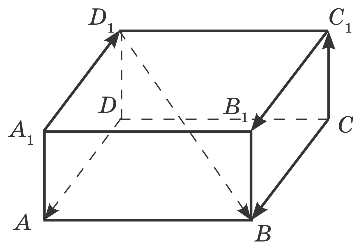
III. Формулювання мети й завдань уроку

На цьому етапі уроку доцільно провести з учнями бесіду про те, що зазначена тема має широке практичне застосування. Зокрема, через розкладання сили тяжіння на три складові, що проходять через точки опори, розраховують стійкість мостів, дахів будівель та інших споруд. Також доречно пояснити учням зміст слова «компланарність». Компланарний — від латинського «ком» — разом і «планум» — площина — розміщений в одній площині. Тож за аналогією з векторами на площині, що лежать на паралельних прямих, — тобто колінеарними векторами, у просторі важливу роль відіграють вектори, які за умови відкладання їх від однієї точки лежать в одній площині, — тобто компланарні вектори. Отже, компланарні вектори є предметом вивчення на цьому уроці.

IV. Актуалізація опорних знань

Виконання вправ

Використовуючи зображення прямокутного паралелепіпеда, вкажіть:



а) вектори, що лежать в одній площині з вектором $\overrightarrow{CC_1}$;

б) вектори, що лежать у паралельних площинах;

в) трійки векторів, що не лежать в одній площині;

г) вектор, що дорівнює

$$\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{C_1B_1}.$$

V. Засвоєння знань

План вивчення теми

1. Означення компланарних векторів.
2. Ознака компланарності трьох векторів.

[3. Теорема про розкладання вектора за трьома некомпланарними векторами.]

[4. Розкладання вектора за одиничними векторами.]

Із запропонованого теоретичного матеріалу обов'язковим для вивчення в 11 класі є означення та ознака компланарних векторів. Тому вчитель сам вирішує, чи вивчати цей матеріал у повному обсязі, чи зекономити навчальний час для подальшого вдосконалення вмінь учнів виконувати операції над векторами.

У разі, якщо математична підготовка учнів та їх пізнавальна активність є достатньо високими для формування цілісних знань про вектори в просторі, то бажано викласти весь матеріал, зазначений у плані вивчення нового матеріалу. В іншому випадку можна два останні питання плану запропонувати учням вивчити самостійно, скориставшись відповідним текстом підручника та опорним конспектом. При цьому бажано зосередити увагу учнів на таких моментах:

1) напрямлені відрізки, які зображають компланарні вектори, лежать в одній площині або на паралельних площинах;
2) із означення компланарних векторів випливає, що компланарними є:
   - ✓ будь-які два вектори;
   - ✓ три вектори, серед яких хоча б один нульовий;
   - ✓ три вектори, серед яких хоча б два колінеарні;
3) якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні, то будь-який вектор $\vec{c}$, компланарний із векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, можна подати у вигляді $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, де x, y — єдина пара чисел;
4) теорема про розкладання вектора за трьома некомпланарними векторами має безпосередній зв'язок із правилом паралелепіпеда додавання векторів.

Стисло навчальний матеріал можна подати учням у вигляді конспекту 10.

VI. Формування вмінь

Виконання усних вправ

1. $DABC$ — тетраедр (зображений на дошці). Назвіть ребро тетраедра, яке зображає вектор $\vec{x}$, якщо вектори $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ і $\vec{x}$ компланарні, але жодні два з них неколінеарні.

Конспект 10

Компланарність векторів

Означення компланарних векторів

Вектори називають компланарними, якщо у разі відкладання від однієї точки вони лежать в одній площині.

Ознака компланарності трьох векторів

Якщо вектор можна подати у вигляді $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, де x і y — деякі числа, то вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні.

Теорема про розкладання вектора за трьома некомпланарними векторами

Якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ некомпланарні, то будь-який вектор $\vec{d}$ можна подати у вигляді $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$, де x, y і z — деякі числа, причому таке розкладання єдине.

Означення координатних векторів (ортів)

Одиничні вектори $\overrightarrow{e_1}(1;0;0)$, $\overrightarrow{e_2}(0;1;0)$, $\overrightarrow{e_3}(0;0;1)$, співнапрямлені з осями координат, називають координатними векторами, або ортами.

Розкладання вектора $\vec{a}$ за координатними векторами

Будь-який вектор $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ можна подати у вигляді

$$\vec{a} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$$

2. З вершин тетраедра $DABC$ складіть:
   а) три впорядковані пари точок, які задають компланарні вектори;
   б) три впорядковані пари точок, які задають некомпланарні вектори.
3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — паралелепіпед (зображений на дошці). Чи компланарні вектори:
   а) $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$; б) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$;
   в) $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DD_1}$; г) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$?

Виконання графічних вправ

1. Зобразіть чотирикутну піраміду $SABCD$. Побудуйте трійки некомпланарних векторів, початки й кінці яких збігаються з вершинами піраміди. Поясніть свій вибір.
2. Зобразіть прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте трійки некомпланарних векторів, початки й кінці яких збігаються з вершинами піраміди. Поясніть свій вибір.

Виконання письмових вправ

1. Доведіть, що якщо M — точка перетину медіан трикутника ABC і O — довільна точка простору, то виконується рівність:
$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right).$$
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — паралелепіпед, точки M і N — середини ребер BC і C_1D_1 відповідно. Розкладіть вектор $\overrightarrow{MN}$ за векторами $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$.
(*Відповідь.* $\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$.)
3. Назвіть координати векторів:
а) $\vec{a}=-2\vec{e_1}-3\vec{e_2}+\vec{e_3}$; б) $\vec{b}=\vec{e_1}+5\vec{e_3}$; в) $\vec{c}=4\vec{e_2}$; г) $\vec{d}=-5\vec{e_1}+2\vec{e_2}$.
4. При якому значенні α вектори
$$\vec{a}=3\vec{e_1}-5\vec{e_2}+\alpha\vec{e_3} \text{ і } \vec{b}=-4\vec{e_1}-2\vec{e_2}+\vec{e_3}$$
перпендикулярні?

Вправи на повторення

1. Знайдіть кут між стороною AC і медіаною BM трикутника ABC, якщо $A(3;-5;1)$, $B(-4;-1;-2)$, $C(-3;3;1)$.
2. Знайдіть довжину діагоналі AC паралелограма $ABCD$, якщо $A(2;-6;0)$, $B(-4;8;2)$, $D(0;-12;0)$.
3. Обчисліть площу паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}(3;0;-4)$ і $\overrightarrow{AD}(0;5;0)$.

Зрозуміло, що всі запропоновані вправи неможливо розв'язати впродовж одного уроку. Учитель вибирає, які задачі розв'язувати на уроці, залежно від того, які питання теорії було опрацьовано. У випадку, якщо було розглянуто всі пункти плану вивчення нового матеріалу, доцільно зосередитися на розв'язуванні усних та письмових вправ. В решті випадків можна розв'язати усні вправи та письмову вправу № 1, а потім запропонувати учням вправи для повторення. Решту письмових вправ можна використати для індивідуальних завдань учням із високим рівнем навчальних досягнень.

VII. Підсумки уроку

Контрольні запитання

1. Чи правильно, що:
а) будь-які два вектори компланарні; б) будь-які три вектори некомпланарні?
2. Чи правильно, що будь-які три вектори, з яких хоча б один нульовий, є компланарними?
3. Чи можна три компланарні вектори зобразити відрізками, які лежать на трьох прямих, що перетинаються?
4. Чи може один із трьох компланарних векторів перетинати площину, що містить решту векторів?
5. Чи можуть компланарні вектори лежати на прямих, що не мають спільних точок?

VIII. Домашнє завдання

Вивчити означення понять, що розглядалися на уроці.
Виконати вправи.

1. Точки M і N — середини відрізків AC і BD відповідно. Доведіть, що $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)$. Чи будуть прямі AB, CD і MN паралельними одній площині?
2. При яких значеннях α і β вектори
$$\vec{a}=3\vec{e_1}+6\vec{e_2}-\beta\vec{e_3} \text{ і } \vec{b}=-2\vec{e_1}+\alpha\vec{e_2}+3\vec{e_3}$$
колінеарні?
3. Задано три точки: $A(2;-3;1)$, $B(-1;-;5;0)$, $C(4;-1;3)$. Знайдіть координати точки $D(x;y;z)$, якщо відомо, що $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$.
4. Знайдіть площу чотирикутника $ABCD$, якщо $A(1;0;0)$, $B(0;0;1)$, $C(0;1;1)$, $D(1;1;0)$.

Повторити рівняння прямої в декартових координатах, розміщення прямої відносно системи координат.

УРОК № 13
[РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ]

Мета: домогтися засвоєння рівняння площини в прямокутній системі координат; розглянути окремі випадки розміщення площини в системі координат і взаємного розміщення двох площин у просторі; сформувати вміння розв'язувати задачі на застосування рівняння площини.

Тип уроку: засвоєння знань, формування вмінь.

Наочність та обладнання: конспект «Рівняння площини».

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Правильність виконання письмових вправ домашнього завдання учні перевіряють самостійно за зразками розв'язання. Перевірити рівень розуміння учнями вивченого на попередньому уроці матеріалу можна за допомогою математичного диктанту.

Математичний диктант

1. Чи можна три некомпланарних вектори зобразити відрізками, які лежать на трьох прямих, що перетинаються?
2. Чи правильно, що будь-які три вектори, з яких два є колінеарними, компланарні?
3. Чи може один із трьох некомпланарних векторів бути паралельним площині, яка містить решту векторів?
4. Чи можуть некомпланарні вектори лежати на прямих, перпендикулярних до однієї площини?
5. Чи правильно, що розкладання вектора $\vec{a}(7;3;-6)$ за координатними векторами має вигляд $\vec{a}=7\vec{e_1}+3\vec{e_2}-6\vec{e_3}$?
6. Чи правильно, що якщо $\vec{a}=-\vec{e_2}+4\vec{e_3}$, то $\vec{a}(0;-1;4)$?

III. Формулювання мети й завдань уроку

На цьому етапі уроку вчителеві доречно нагадати учням про те, що впродовж вивчення теми постійно використовується аналогія між координатами та векторами на площині й у просторі. Учням відоме рівняння прямої в координатній площині, тож цілком природно, що в рамках цієї теми вивчається рівняння площини в прямокутній системі координат у просторі.

IV. Актуалізація опорних знань

Фронтальна робота

1. Який вид має рівняння прямої в декартових координатах?
2. Чи може одне й те саме рівняння задавати різні прямі?
3. Чи може одна й та сама пряма мати різні рівняння?
4. Як знайти координати точки перетину двох прямих?
5. Як пряма $ax+by+c=0$ розміщена відносно системи координат, якщо:
   а) $a=0$, $b\neq 0$; б) $a\neq 0$, $b=0$; в) $c=0$?
6. Сформулюйте умову паралельності двох прямих. Чи паралельні прямі $4x-2y+6=0$ і $y=2x+3$?

V. Засвоєння знань

План вивчення теми

1. Означення вектора нормалі до площини.

2. Рівняння площини в просторі (теорема).
3. Особливості розміщення площини в системі координат.
4. Окремі випадки взаємного розміщення двох площин у просторі.

Конспект 11

Рівняння площини

1. Ненульовий вектор $\vec{n}(a,b,c)$, перпендикулярний до площини α (тобто належить прямій, перпендикулярній до α), називають вектором нормалі, або нормаллю до площини α.

2. У прямокутній системі координат рівняння площини має вигляд $ax+by+cz+d=0$, де a, b, c і d — деякі числа, причому a, b і c одночасно не дорівнюють нулю.

3. Особливості розміщення площини в системі координат визначають значення коефіцієнтів a, b, c і d.

Значення коефіцієнтів a, b, c і d	**Розміщення площини в системі координат**	**Приклад**
$a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$, $d=0$	Проходить через початок координат	$2x-3y+5z=0$
Один із коефіцієнтів a, b і c дорівнює нулю, а $d\neq 0$	Паралельна одній із координатних осей	$a=0$: площина $2y+3z-4=0$ паралельна осі Ox
Два з коефіцієнтів a, b і c дорівнюють нулю, а $d\neq 0$	Паралельна одній із координатних площин	$a=0$ і $b=0$: площина $5z+2=0$ паралельна площині xy
Два з коефіцієнтів a, b і c дорівнюють нулю і $d=0$	Збігається з однією з координатних площин	$a\neq 0$, $b=c=d=0$: $ax=0$ або $x=0$ — рівняння площини yz

4. Окремі випадки взаємного розміщення двох площин $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ і $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ у просторі:

✓ якщо координати a_2, b_2, c_2, d_2 ненульові й $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{d_1}{d_2}$, то площини збігаються;

✓ якщо координати a_2, b_2, c_2, d_2 ненульові й $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}\neq\frac{d_1}{d_2}$, то площини паралельні.

У решті випадків площини перетинаються

Для виведення рівняння площини в прямокутній системі координат необхідно визначити властивість, за допомогою якої можна описати належність довільної точки поданій площині. Для цього необхідно ввести поняття нормалі до площини — вектора $\vec{n}$. При цьому використовуємо означення прямої, перпендикулярної до площини. (За необхідності вчителеві краще самому нагадати це означення.) Нехай точка M_1 належить поданій площині, а точка M — довільна точка площини. Оскільки вектор $\vec{n}$ перпендикулярний до площини, то він перпендикулярний до будь-якого вектора, що лежить у цій площині, у тому числі й до вектора $\overrightarrow{MM_1}$, тобто рівняння $\vec{n}\cdot\overrightarrow{MM_1}=0$ є критерієм належності точки M заданій площині. На підставі цього критерію можна вивести рівняння площини в просторі.
Оскільки зазначена тема не є обов'язковою для вивчення, то залежно від рівня підготовленості учнів класу вчитель на власний розсуд вирішує, у якому обсязі та в якій формі викладати поданий матеріал. У випадку, якщо рівень підготовленості учнів недостатньо високий, викладення нового матеріалу можна провести у формі бесіди, використовуючи аналогії між рівнянням прямої та рівнянням площини, обмежитися тільки формулюванням теореми про рівняння площини в просторі (без доведення).

VI. Формування вмінь

Виконання усних вправ

1. Чи належить площині $2x+y-3z+5=0$ точка:
   а) $A(-2;1;1)$; б) $B(1;2;3)$?
2. Визначте розміщення в системі координат площини, заданої рівнянням:
   а) $2y-z+5=0$; б) $3x-2y-3=0$; в) $2x+5y+z=0$; г) $3x+4=0$.
3. Визначте взаємне розміщення двох площин, заданих рівняннями:
   а) $2x-3y+5z-4=0$ і $4x-4y+10z-8=0$;
   б) $3x-2y-z+4=0$ і $6x-4y-2z+2=0$.

Виконання письмових вправ

1. Знайдіть точки перетину площини $2x-5y+3z-30=0$ з осями координат.

2. Складіть рівняння площини, яка проходить через точку $A(1;1;-2)$ перпендикулярно до вектора $\vec{a}(1;-3;4)$.
3. Складіть рівняння площини, яка проходить через точку $P(2;-1;3)$ перпендикулярно до осі аплікат.
4. Доведіть, що площини $2x-3y+5z-6=0$ і $3x+2y-7=0$ перпендикулярні.
5. Доведіть, що відстань від точки $A(x_1;y_1;z_1)$ до площини $ax+by+cz+d=0$ обчислюють за формулою
$$\rho=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$
6. Скориставшися формулою $\rho=\dfrac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, що виражає відстань від точки $A(x_1;y_1;z_1)$ до площини $ax+by+cz+d=0$, обчисліть відстань від точки $B(1;0;-2)$ до площини
$$3x+2y+10=0.$$

Запропоновані вправи спрямовані за засвоєння рівняння площини в прямокутній системі координат, на розуміння випадків розміщення площини відносно системи координат та взаємного розміщення площин. Під час розв'язування письмових задач № 2–4 використовують поняття нормалі до площини. Задачу № 5 можна пропонувати учням із високим рівнем навчальних досягнень. Якщо зазначену задачу було розв'язано в класі, то під час формулювання умови задачі № 6 можна не наводити формулу відстані від точки до площини.

VII. Підсумки уроку

Контрольні запитання

1. Наведіть рівняння площини.
2. Наведіть приклад площини, яка паралельна:
   а) осі ординат; б) площині xz.
3. Наведіть приклад паралельних площин.

VIII. Домашнє завдання

Засвоїти поняття, розглянуті на уроці.
Виконати вправи.

1. Знайдіть довжини відрізків, які відсікає площина $5x-2y-4z-20=0$ від координатних осей.

2. Складіть рівняння площини, яка проходить через точку $M(4;-3;1)$ перпендикулярно до вектора $\vec{a}(-2;0;3)$.
3. Складіть рівняння площини, яка проходить через середину відрізка AB перпендикулярно до нього, якщо $A(3;-4;7)$, $B(1;0;-1)$.
4. Доведіть, що площини $4x-y+5z-13=0$ і $5x-4z=0$ перпендикулярні.

УРОК № 14 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Мета: працювати над засвоєнням учнями змісту понять векторів на площині та дій над векторами, компланарних векторів; сформувати уявлення учнів про зміст поняття «векторний метод розв'язування задач» та вміння розв'язувати найпростіші типові задачі векторним методом*; сформувати навички використання вивчених тверджень для розв'язування задач.

Тип уроку: застосування знань, засвоєння вмінь та навичок.

Наочність та обладнання: конспект «Розв'язування задач векторним методом*».

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Перевірку якості виконання домашнього завдання проводимо за готовими стислими записами розв'язань. Перевірку засвоєння учнями змісту нового матеріалу попереднього уроку можна провести у формі тестових завдань. Після виконання тестових завдань оголошуємо та обговорюємо правильні відповіді до запропонованих завдань.

Тестові завдання

Варіант 1

1. При якому значенні d точка $A(-1;2;1)$ належить площині $2x+y-z+d=0$?
   А) $d=1$; Б) $d=0$; В) $d=-1$; Г) $d=2$.
2. У якій точці площина $x-y+3z=1$ перетинає вісь Oy?
   А) $A(0;-1;0)$; Б) $B(0;-1;-3)$; В) $C(-1;-1;0)$; Г) $D(0;1;0)$.

3. Яку фігуру в просторі задає рівняння $2x=4$?
   А) Точку; Б) пряму; В) площину; Г) визначити неможливо.
4. Яке взаємне розміщення площин
   $$x-2y+z-1=0 \text{ і } -2x+4y+2z=2?$$
   А) Збігаються; Б) паралельні; В) перпендикулярні; Г) перетинаються, але не перпендикулярні.

Варіант 2

1. При якому значенні d точка $A(2;-5;0)$ належить площині
   $$x-y+2z+d=0?$$
   А) $d=1$; Б) $d=7$; В) $d=0$; Г) $d=-7$.
2. У якій точці площина $2x-3y+2z=2$ перетинає вісь Oz?
   А) $A(1;0;0)$; Б) $B(0;0;1)$; В) $C(0;0;-1)$; Г) $D(0;1,5;0)$.
3. Яку фігуру в просторі задає рівняння $x-2y=1$?
   А) Точку; Б) пряму; В) площину; Г) визначити неможливо.
4. Яке взаємне розміщення площин
   $$x+y-z-1=0 \text{ і } 2x+2y-2z-1=0?$$
   А) Збігаються; Б) паралельні; В) перпендикулярні; Г) перетинаються, але не перпендикулярні.

III. Формулювання мети й завдань уроку

Мета та подальша робота на цьому уроці безпосередньо пов'язані з рівнем знань та вмінь учнів, а також із рівнем розуміння учнями основних понять векторної алгебри. Тому, на розсуд учителя, учні на цьому уроці або продовжують засвоювати вивчений на попередніх уроках матеріал та формують уміння застосовувати його до розв'язування задач (*див. попередні уроки*), або ознайомлюються з одним із загальних методів розв'язання задач — векторним методом, та формують уміння розв'язувати типові задачі цим методом. Учитель може нагадати учням, що вони на інтуїтивному рівні вже використовували цей метод, наприклад під час доведення, що чотирикутник із заданими координатами вершин є паралелограмом або ромбом (*див. урок № 8*), або під час доведення рівності

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right),$$

де M — точка перетину медіан трикутника ABC, O — довільна точка простору (*див. урок № 12*).

IV. Відтворення та систематизація опорних знань, умінь

Пропонуємо учням самостійно повторити зміст матеріалу, вивченого на попередніх уроках за матеріалами конспектів 7–11.

V*. Доповнення знань

Якщо було прийнято рішення на користь ознайомлення учнів із векторним методом розв'язання задач, то після повторення основних понять теми вчитель формує уявлення про векторний метод розв'язання задач. Потім ознайомлює учнів з основними етапами розв'язування задач цим методом, також розглядає узагальнену таблицю, яка допоможе учням перекласти геометричну умову задачі векторною мовою, і навпаки (відповідно до схеми розв'язування задач векторним медотом). Роботу учнів на цьому етапі організувати як роботу з таблицею (*див. конспект 12*).

Конспект 12

Розв'язування задач векторним методом

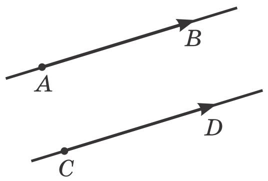
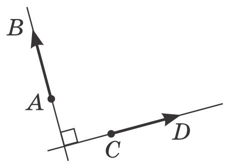
1. Схема розв'язування задач векторним методом

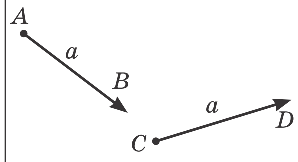
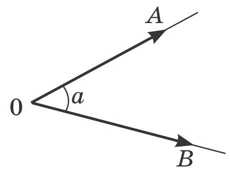
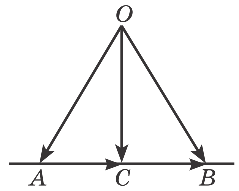
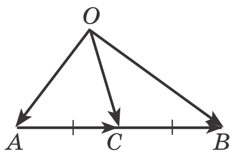
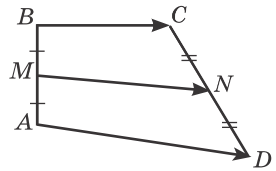
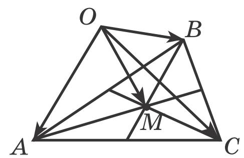
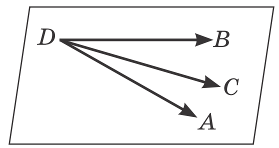
1) Сформулювати задачу мовою векторів, скласти векторні рівності відповідно до умови задачі.

2) Перетворити складені векторні рівності, використавши відомі означення, властивості дій над векторами.

3) Перекласти здобуті результати мовою геометрії.

Основні геометричні факти мовою векторів

№	Рисунок	Твердження мовою геометрії	Твердження мовою векторів
1		Точки A і B збігаються	$\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ або $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}$, де O — деяка точка простору
2		Прямі AB і CD паралельні	$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$, $k\neq 0$ (прямі AB і CD не збігаються)
3		$AB\perp CD$	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$

№	Рисунок	Твердження мовою геометрії	Твердження мовою векторів
4		$AB=CD=a$	$\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{CD}^2=a^2$
5		$\angle AOB=\alpha$	$\cos\alpha=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{\lvert\overrightarrow{OA}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{OB}\rvert}$
6		Точка C лежить на прямій AB	$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$ або $\overrightarrow{OC}=p\overrightarrow{OA}+(1-p)\overrightarrow{OB}$, де O — деяка точка простору
7		$C\in AB$, C — середина AB	$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$ або $\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$, де O — деяка точка простору
8		M — середина AB, N — середина CD	$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$
9		M — точка перетину медіан (центроїд трикутника ABC)	$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$, де O — деяка точка простору
10		Точка D лежить у площині ABC	$\overrightarrow{DC}=m\overrightarrow{DA}+n\overrightarrow{DB}$

VI. Засвоєння знань, формування навичок

Виконання письмових вправ

1. Медіани AA_1 і BB_1 трикутника ABC рівні. Доведіть, що трикутник рівнобедрений.

Доведення. За умовою $AA_1 = BB_1$. Тоді

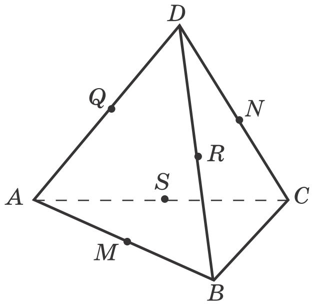
$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} - CB.$$

$$\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}\right|^2 = \left|\frac{1}{2}\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}\right|^2,\ 3\overrightarrow{CA}^2 = 3\overrightarrow{CB}^2,$$

отже, $CA = CB$, тобто трикутник ABC рівнобедрений.

2. Доведіть, що відрізки, які сполучають середини протилежних ребер тетраедра, перетинаються в одній точці і діляться нею навпіл.

Доведення. Нехай точки M, N, Q, R, S, P — середини ребер тетраедра, точки O_1, O_2, O_3 — середини відрізків MN, PQ, RS відповідно. Тоді



$$2\overrightarrow{OO_1} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right);$$

$$2\overrightarrow{OO_2} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right);$$

$$2\overrightarrow{OO_3} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OS} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right).$$

Очевидно, що

$$O_1 \equiv O_2 \equiv O_3 \equiv O \text{ і } MO : ON = PO : OQ = RO : OS = 1.$$

3. Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ лежать у різних площинах. Доведіть, що три прямі, проведені відповідно через середини трьох пар відрізків AB_1 і A_1B, BC_1 і B_1C, CA_1 і AC_1, паралельні деякій площині.

Доведення. Доведемо, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, які визначаються відповідно серединами поданих відрізків, компланарні. Дійсно,

$$2\vec{a} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OB},\ 2\vec{b} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OC},$$

$$2\vec{c} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{OA},$$

а сума $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

Додаткові задачі (на використання означень та властивостей дій над векторами)

1. Обчисліть скалярний добуток векторів $\vec{a} = 2\vec{p} - \vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} + \vec{q}$, якщо $\vec{p}(2;1;-3)$, $\vec{q}(-1;7;-2)$.

2. У трикутнику ABC $A(2;1;3)$, $B(1;1;4)$, $C(0;1;3)$. Чи перпендикулярні вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CM}$, де точка M — середина відрізка AB?

3. Обчисліть: $\left|\vec{a} - \vec{b}\right|$, якщо $\left|\vec{a}\right| = 13$, $\left|\vec{b}\right| = 19$, $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = 24$.

VII. Підсумки уроку

Підсумком уроку може бути виділення учнями основних типів задач на застосування векторів у просторі.

VIII. Домашнє завдання

Повторити зміст вивченого теоретичного матеріалу.

Виконати домашню самостійну роботу.

Варіант 1

1. Обчисліть: $\left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2$, якщо $\vec{a}(4;-2;-4)$, $\vec{b}(6;-3;2)$.

2. Чи лежать на одній прямій точки

$$A(3;-7;8),\ B(-5;4;1),\ C(27;-40;29)?$$

3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — паралелограм. Укажіть вектор, що дорівнює сумі $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{DA_1} + \overrightarrow{B_1B}$.

4. Точки M і N — середини паралельних сторін AB і CD трапеції $ABCD$. Точка O не належить площині ABC. Виразіть вектор $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}$ через вектори $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{BC}$.

Варіант 2

1. Обчисліть: $\left|2\vec{a} - \vec{b}\right|$, якщо $\vec{a}(4;-2;-4)$, $\vec{b}(6;-3;2)$.

2. Чи лежать на одній прямій точки

$$A(-5;7;12),\ B(4;-8;3) \text{ і } C(13;-23;-6)?$$

3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — паралелограм. Укажіть вектор, що дорівнює сумі $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{A_1D_1} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$.

4. Точка M — середина сторони AB паралелограма $ABCD$. Виразіть вектор $\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PD}$ через вектор $\overrightarrow{BM}$, де P — довільна точка простору.

УРОК № 15
КООРДИНАТИ ТА ВЕКТОРИ У ПРОСТОРІ. ПІДСУМКОВИЙ УРОК

Мета: повторити, систематизувати та узагальнити знання учнів щодо:

означень:
- ✓ прямокутної системи координат у просторі;
- ✓ руху (переміщення) в просторі (та його властивостей);
- ✓ симетрії в просторі (та її властивостей);
- ✓ точок і геометричних фігур простору, симетричних відносно точки, прямої та площини;
- ✓ паралельного перенесення в просторі (та його властивостей);
- ✓ вектора в просторі, рівних векторів, координат вектора;
- ✓ операцій додавання, віднімання векторів, множення вектора на число в просторі (та їх властивостей);
- ✓ скалярного добутку векторів (та його властивостей);
- ✓ колінеарних і компланарних векторів;

формул для обчислення:
- ✓ відстані між двома точками простору;
- ✓ координат середини відрізка;
- ✓ довжини (модуля) вектора;
- ✓ скалярного добутку векторів і кута між векторами,

а також умови перпендикулярності і колінеарності векторів.

Тип уроку: узагальнення й систематизація знань, умінь.

Наочність та обладнання: конспекти 1–12.

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Зібрати зошити з виконаною домашньою самостійною роботою. За необхідності правильні розв'язання роздати учням для самостійного опрацювання вдома.

III. Формулювання мети й завдань уроку

Основна мета уроку випливає з його місця в темі. Оскільки урок є підсумковим, то виникає необхідність повторення, узагальнення та систематизації знань і вмінь, набутих учнями під час вивчення теми «Координати та вектори у просторі». Таке формулювання мети створює відповідну мотивацію діяльності учнів.

IV. Повторення та систематизація знань

Роботу учнів на уроках систематизації та узагальнення знань і вмінь організовуємо з урахуванням рівня сформованості навичок самостійної роботи учнів. Можна запропонувати учням самостійну роботу з теоретичним матеріалом (наприклад, за конспектом або підручником повторити зміст основних понять теми). Можна провести фронтальне опитування за основними питаннями теми, запропонувати учням виконати тестову роботу за теоретичними питаннями або поєднати ці та інші форми роботи.

Контрольні запитання

1. Опишіть будову прямокутної системи координат у просторі. Яку назву мають координатні осі? Чому дорівнюють ордината та апліката точки, яка лежить на осі абсцис? Чому дорівнює абсциса точки, яка лежить у площині yz?
2. Наведіть формулу, за якою знаходять відстань між двома точками у просторі, якщо відомі їх координати.
3. Наведіть формулу, за якою знаходять координати середини відрізка, якщо відомі координати його кінців.
4. Сформулюйте означення переміщення (руху). Сформулюйте властивості переміщення.
5. Які точки і які фігури називають симетричними відносно: а) точки; б) прямої; в) площини? Наведіть приклади таких фігур.
6. Сформулюйте означення паралельного перенесення. Сформулюйте властивості паралельного перенесення. Наведіть формули, які задають паралельне перенесення точки $A(x;y;z)$ у точку $A_1(x_1;y_1;z_1)$.
7. Сформулюйте означення вектора. Як знайти координати вектора, якщо відомі його початок і кінець?
8. Який вектор називають нульовим?
9. Як обчислити довжину (модуль) вектора, якщо відомі його координати?
10. Сформулюйте правило, за яким знаходять суму й різницю векторів, заданих геометрично та координатами. Які властивості мають операції додавання та віднімання векторів?
11. Що називають добутком вектора на число? Які властивості має операція множення вектора на число?
12. Які вектори називають колінеарними? однаково напрямленими? протилежно напрямленими? рівними? Чи можуть протилежно напрямлені вектори бути неколінеарними? Сформулюйте умову колінеарності векторів.

13. Що називають скалярним добутком векторів? Які властивості має скалярний добуток векторів?

14. Наведіть формулу для знаходження скалярного добутку векторів. Як, скориставшися цією формулою, знайти кут між векторами?

15. Сформулюйте умову перпендикулярності векторів.

16. Які вектори називають компланарними? Наведіть приклади компланарних векторів, користуючись моделлю куба.

V. Повторення та систематизація вмінь

Цей етап уроку можна провести у формі групової роботи, мета якої полягає в тому, щоб учні самостійно сформулювали та випробували узагальнену схему дій, якої вони мають дотримуватися під час розв'язування типових завдань, подібні до яких будуть винесені на контроль.

Основні види задач із теми «Координати та вектори у просторі»:

- ✓ знаходження довжини відрізка та координат середини відрізка за відомими координатами його кінців;
- ✓ знаходження координат точок, отриманих у результаті паралельного перенесення та симетрії відносно початку координат, координатних осей, координатних площин поданої точки;
- ✓ знаходження координат вектора за відомими координатами його початку й кінця і довжини вектора за його координатами;
- ✓ знаходження координат вектора, що дорівнює сумі, різниці двох векторів і добутку вектора на число;
- ✓ встановлення колінеарності двох векторів;
- ✓ знаходження скалярного добутку двох векторів і кута між векторами за їх координатами.

Після складання списку основних видів завдань учитель створює робочі групи учнів (за кількістю видів завдань). Завдання для кожної з груп формулюється так: «Скласти алгоритм розв'язання завдання...» (індивідуального для кожної групи). На складання алгоритму кожній із груп відводиться певний час, за який учасники групи мають: скласти алгоритм, записати його у вигляді послідовних кроків, підготувати презентацію своєї роботи. По закінченні відбувається презентація виконаної роботи кожною з груп. Після презентації — обов'язкове випробування алгоритмів. Враховуючи нерівноцінність за складністю завдань, бажано, щоб групи обмінялись алгоритмами й перевірили їх застосування не на одному, а на кількох завданнях. Після випробування доцільно провести корекцію та підбити підсумки.

VI. Підсумки уроку

Підсумком уроку узагальнення й систематизації знань і вмінь учнів є, по-перше, складені самими учнями узагальнені схеми дій під час розв'язування типових завдань, по-друге, здійснення учнями необхідної частини свідомої розумової діяльності (рефлексії), усвідомлення кожним учнем особистих успіхів та, найголовніше, — проблем, над якими слід ще попрацювати.

VII. Домашнє завдання

Повторити зміст вивчених у ході засвоєння теми «Координати та вектори у просторі» понять.

Вивчити складені на уроці алгоритми.

Розв'язати задачі домашньої контрольної роботи.

Домашня контрольна робота

1. На осі Ox знайдіть точку, рівновіддалену від точок $A(1;2;2)$ і $B(-2;1;4)$.

2. Під час паралельного перенесення точка $A(5;2;-3)$ переходить у точку $A_1(1;-3;2)$. У яку точку переходить точка B, що симетрична точці A відносно початку координат?

3. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{AM}$, якщо AM — медіана трикутника ABC, у якому $A(2;1;3)$, $B(2;1;5)$, $C(0;1;1)$.

4. При яких значеннях m і n вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ колінеарні, якщо

$$A(1;0;2),\ B(3;n;5),\ C(2;2;0),\ D(5;4;m)?$$

5. Знайдіть довжину вектора $\vec{c}=2\vec{a}+4\vec{b}$, якщо $\vec{a}(1;2;-4)$, $\vec{b}(-2;1;2)$.

6. Обчисліть площу паралелограма $ABCD$, якщо

$$\overrightarrow{AB}(8;4;1),\ \overrightarrow{AD}(2;-2;1).$$

УРОК № 16
КООРДИНАТИ ТА ВЕКТОРИ У ПРОСТОРІ. КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 1

Мета: перевірити рівень засвоєння учнями знань і вмінь щодо змісту основних понять теми «Координати та вектори у просторі» відповідно до програмових вимог, якість сформованих умінь розв'язувати задачі на використання:

- ✓ основних формул координатного методу;
- ✓ понять перетворення в просторі та основних його видів;
- ✓ означення та властивостей векторів, координат, довжини вектора та дій із векторами.

Тип уроку: контроль знань і вмінь.

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Зібрати зошити з виконаною домашньою контрольною роботою № 1. Оцінки за роботу врахувати під час виставлення тематичного бала.

III. Формулювання мети й завдань уроку

Метою контрольної роботи є демонстрація учнями своїх навчальних досягнень, тобто знання змісту основних понять теми та володіння прийомами їх застосування під час розв'язування задач.

IV. Текст контрольної роботи № 1

Варіант 1

1. На осі абсцис знайдіть точку, відстань від якої до точки $M(3;-3;0)$ дорівнює 5.
2. Під час паралельного перенесення точка $A(2;-1;3)$ переходить у точку $A_1(3;-2;1)$. У яку точку переходить точка B, що симетрична точці A відносно осі абсцис?
3. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{BD}$, якщо BD — діагональ паралелограма $ABCD$, у якому $A(1;-3;0)$, $B(-2;4;1)$, $C(-3;1;1)$.
4. Знайдіть значення m і n, при яких вектори $\vec{a}(15;m;1)$ і $\vec{b}(18;12;n)$ колінеарні.
5. Знайдіть $|\vec{c}|$, якщо $\vec{c}=\frac{1}{2}\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{a}(4;-2;0)$, $\vec{b}(-1;3;6)$.
6. Обчисліть площу паралелограма $ABCD$, якщо $\overrightarrow{AB}(6;0;12)$, $\overrightarrow{AD}(-8;0;4)$.

Варіант 2

1. На осі ординат знайдіть точку, відстань від якої до точки $M(4;3;0)$ дорівнює 5.
2. Під час паралельного перенесення точка $A(-2;3;-1)$ переходить у точку $A_1(1;-2;3)$. У яку точку переходить точка B, що симетрична точці A відносно площини xz?

3. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{AC}$, якщо AC — діагональ паралелограма $ABCD$, у якому $A(2;-6;0)$, $B(-4;8;2)$, $D(0;-12;0)$.
4. Знайдіть значення m і n, при яких вектори $\vec{a}(m;0,4;-1)$ і $\vec{b}(-0,5;n;5)$ колінеарні.
5. Знайдіть $|\vec{c}|$, якщо $\vec{c}=3\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{a}(-4;2;-1)$, $\vec{b}(0;-3;3)$.
6. Обчисліть площу паралелограма $ABCD$, якщо $\overrightarrow{AB}(-12;0;8)$, $\overrightarrow{AD}(4;0;6)$.

V. Підсумки уроку

На цьому етапі уроку, після того як будуть зібрані зошити, можна дати відповіді на запитання учнів, що виникли в процесі виконання контрольної роботи, і роздати для опрацювання вдома зразки правильних розв'язань завдань контрольної роботи (заготовлених учителем заздалегідь).

VI. Домашнє завдання

Виконати аналіз контрольної роботи (за розданими розв'язаннями).

ТЕМА 2. МНОГОГРАННИКИ (16 ГОДИН)

УРОК № 17
ДВОГРАННІ КУТИ. ЛІНІЙНИЙ КУТ ДВОГРАННОГО КУТА. МНОГОГРАННІ КУТИ

Мета: сформувати поняття:

- ✓ двогранного кута;
- ✓ лінійного кута двогранного кута;
- ✓ тригранного та многогранного кутів.

Сформувати вміння розв'язувати задачі, що передбачають використання цих понять.

Тип уроку: засвоєння знань, формування вмінь.

Наочність та обладнання: конспект «Двогранні кути. Лінійний кут двогранного кута. Многогранні кути».

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Учитель проводить бесіду, у ході якої має з'ясувати результати проведеного вдома аналізу контрольної роботи (наприклад, хто з учнів потребує додаткового опрацювання вивченого раніше матеріалу; типи задач, на які слід ще раз звернути увагу, тощо).

III. Формулювання мети й завдань уроку

Оскільки на цьому уроці розпочинаємо вивчення нової теми «Многогранники», то необхідно надати учням інформацію про:

- ✓ орієнтовний план вивчення теми;
- ✓ кількість навчальних годин, відведених на вивчення теми;
- ✓ зміст матеріалу, що вивчається;
- ✓ основні вимоги до знань та вмінь учнів;
- ✓ орієнтовний зміст завдань, що будуть винесені на контрольну роботу.

Доречно також провести бесіду з метою нагадати учням, що вони вже мають уявлення про основні види многогранників із власного досвіду та курсу геометрії 9 класу. Мета вивчення цієї теми

в 11 класі — вивчення означень та властивостей основних видів многогранників на більш високому науковому рівні.

У курсі геометрії 10 класу було розглянуто взаємне розташування (паралельність, перпендикулярність, відстані, кути) основних фігур у просторі: точок, прямих і площин. Тепер переходимо до вивчення більш складних просторових фігур, які складаються з частин основних. Аналогічно тому, як у планіметрії розглядалися кути — фігури, утворені двома півпрямими, у стереометрії розглядають кути, утворені півплощинами. Вивчення означення та властивостей таких кутів є основною метою уроку.

IV. Актуалізація опорних знань

Якість засвоєння теми залежить від того, як учні володіють матеріалом, вивченим у попередніх класах, а саме: означеннями та ознаками перпендикулярних прямої і площини, перпендикулярних площин, означеннями перпендикуляра і похилих до площини, теоремою про три перпендикуляри.

Крім того, під час розв'язування задач на знаходження величини лінійного кута двогранного кута використовують співвідношення між сторонами та кутами в прямокутному трикутнику. Ці означення, ознаки та співвідношення вони будуть використовувати протягом вивчення всього подальшого курсу геометрії в 11 класі. Залежно від рівня підготовленості учнів учитель на власний розсуд вибирає форму проведення цього етапу уроку. Можна, наприклад, подати необхідні відомості у вигляді таблиці, яку учні зможуть використовувати протягом цього та подальших уроків, та (або) провести фронтальне опитування, а потім розв'язати декілька задач на застосування зазначених означень, ознак та співвідношень.

V. Засвоєння знань

План вивчення теми

1. Означення двогранного кута та його елементів.
2. Означення лінійного кута двогранного кута. Міра двогранного кута.
3. Теорема про незалежність міри двогранного кута від вибору лінійного кута.
4. Способи побудови лінійного кута двогранного кута.
5. Означення тригранного та многогранного кутів і їх елементів.

Конспект 13

Двогранні кути. Лінійний кут двогранного кута. Многогранні кути

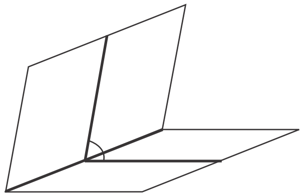
1. Двогранним кутом називають фігуру, утворену двома півплощинами зі спільною прямою, що їх обмежує. Півплощини називають гранями, а пряму, що їх обмежує, — ребром двогранного кута.

2. Площина, перпендикулярна до ребра двогранного кута, перетинає його грані по двох півпрямих. Кут, утворений цими півпрямими, називають лінійним кутом двогранного кута. За міру двогранного кута приймають міру відповідного йому лінійного кута.

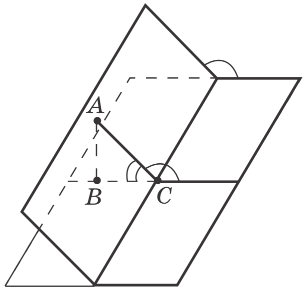
3. Міра двогранного кута не залежить від вибору лінійного кута.

4. Способи побудови лінійного кута двогранного кута:

1) Спосіб, описаний в означенні лінійного кута двогранного кута.



2) На ребрі кута позначаємо точку; через неї в гранях кута проводимо дві півпрямі, перпендикулярні до ребра кута. Кут, утворений цими півпрями (*див. рисунок*), — лінійний кут поданого двогранного кута (для обґрунтування скористатися ознакою перпендикулярності прямої та площини).



3) На одній із граней кута позначаємо точку A і через неї проводимо перпендикуляри AB до площини іншої грані та AC до ребра кута. Тоді кут ACB (або суміжний із ним, *див. рисунок*) є лінійним кутом поданого двогранного кута (це випливає з теореми про три перпендикуляри).

Зауваження. Цей спосіб неприйнятний у випадку, якщо двогранний кут прямий.

5. Тригранним кутом називають фігуру, яка складається з трьох плоских кутів зі спільною вершиною і попарно спільними сторонами, що не лежать в одній площині.

Многогранним кутом називають фігуру, яка складається з n $(n \geq 3)$ плоских кутів зі спільною вершиною і попарно спільними сторонами, що не лежать в одній площині.

Плоскі кути називають гранями многогранного кута, їх сторони — ребрами многогранного кута; спільну вершину плоских кутів — вершиною многогранного кута

Зважаючи на складність і важливість навчального матеріалу, вивчення нового матеріалу можна провести у формі лекції за

поданим планом. Навчальний матеріал учитель викладає близько до тексту підручника, супроводжуючи виконанням на дошці необхідних записів та рисунків. Учні конспектують основні моменти матеріалу.

VI. Формування вмінь

Виконання усних вправ

1. Основою піраміди $PABC$ є правильний трикутник ABC. Який із позначених кутів є лінійним кутом двогранного кута з ребром AC, якщо:
   а) пряма PB перпендикулярна до площини ABC, точка D — середина відрізка AC (*рис. 1*);
   б) пряма PO перпендикулярна до площини ABC, точка M — середина відрізка AC і $ON \parallel BM$ (*рис. 2*)?
2. $PABC$ — піраміда, точка D — середина відрізка AC, пряма PB перпендикулярна до площини ABC (*рис. 3*). Яким має бути трикутник ABC, щоб лінійним кутом двогранного кута з ребром AC був:
   а) $\angle PDB$; б) $\angle PAB$; в) $\angle PKB$?

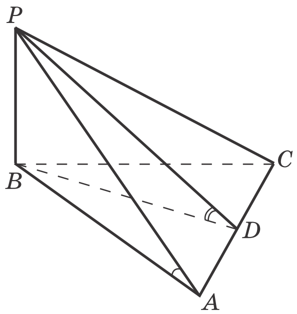


Рис. 1

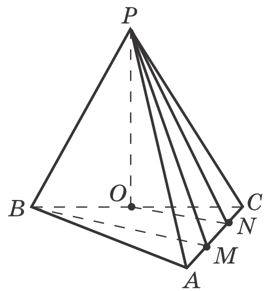


Рис. 2

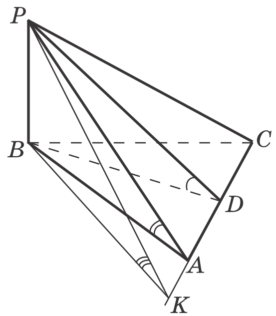


Рис. 3

Виконання письмових вправ

1. Основою піраміди $PABC$ є прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90°$). Доведіть, що кут PCB — лінійний кут двогранного кута з ребром AC, якщо $PB \perp (ABC)$.
2. Точка P лежить поза площиною прямокутника $ABCD$. Побудуйте лінійний кут двогранного кута з ребром DC, якщо:
   а) пряма PB перпендикулярна до площини ABC;
   б) точка O належить відрізку AB, пряма PO перпендикулярна до площини ABC;

в) O — точка перетину діагоналей прямокутника, пряма PO перпендикулярна до площини ABC.

3. Точка K лежить поза площиною прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$). Знайдіть величину двогранного кута з ребром AC, якщо пряма KB перпендикулярна до площини ABC, $BC = KB = 4$ см.
4. Пряма KC перпендикулярна до площини ромба $ABCD$, $BD = 4$ см, $KC = 3\sqrt{3}$ см. Обчисліть площу ромба, якщо двогранний кут із ребром BD дорівнює $60°$.

Однією з причин утруднень, які виникають в учнів під час розв'язування стереометричних задач, є відсутність навичок зображення лінійних кутів. Запропоновані завдання спрямовані на усунення формалізму в засвоєнні поняття двогранного кута. Ці завдання можна умовно розділити на чотири групи: розпізнавання лінійного кута серед декількох виділених на рисунку кутів (усні вправи); доведення того, що позначений на рисунку кут є лінійним кутом поданого двогранного кута (письмова вправа № 1); побудова лінійного кута поданого двогранного кута (письмова вправа № 2); обчислювальні задачі (письмові вправи № 3 і № 4). У процесі розв'язування цих задач учні не тільки формують навички побудови лінійних кутів поданих двогранних кутів, але й повторюють прийоми розв'язування прямокутних трикутників, обчислення площ фігур, правила зображення фігур на рисунках.

VII. Підсумки уроку

Фронтальна бесіда

1. Наведіть приклади двогранних кутів з навколишнього середовища або скориставшися моделями геометричних тіл. Укажіть лінійний кут кожного з наведених двогранних кутів.
2. Наведіть приклади тригранних і многогранних кутів з навколишнього середовища або скориставшися моделями геометричних тіл. Укажіть кількість граней кожного з наведених кутів.

VIII. Домашнє завдання

Вивчити зміст понять, розглянутих на уроці.

Виконати вправи.

1. Основою піраміди $KABCD$ є трапеція $ABCD$ ($AB \parallel DC$), BM — висота трапеції, бічне ребро KB перпендикулярне до площини основи. Доведіть, що кут BMK — лінійний кут двогранного кута з ребром CD.
2. Точка P лежить поза площиною рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$), пряма PB перпендикулярна до площини трикутника ABC. Побудуйте лінійний кут двогранного кута з ребром AC.
3. Точка M лежить поза площиною правильного трикутника ABC зі стороною 6 см, O — точка перетину медіан трикутника ABC, пряма MO перпендикулярна до площини ABC, $MO = 1$ см. Знайдіть величину двогранного кута з ребром AB.
4. У паралелограмі $ABCD$ $\angle ADC = 120°$, $DC = 6$ см, пряма PC перпендикулярна до площини ABC, $PC = 9$ см. Знайдіть величину двогранного кута з ребром AD.

УРОК № 18
МНОГОГРАННИК ТА ЙОГО ЕЛЕМЕНТИ. ОПУКЛІ МНОГОГРАННИКИ

Мета: сформувати поняття:

- ✓ многогранника, а також вершин, ребер граней, двогранних кутів многогранника;
- ✓ опуклого многогранника.

Сформувати вміння розв'язувати задачі, що передбачають використання цих понять.

Тип уроку: засвоєння знань, формування вмінь.

Наочність та обладнання: конспект «Многогранник та його елементи. Опуклі многогранники», моделі многогранників.

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Проведення цього етапу уроку залежить від рівня знань та вмінь учнів: це може бути самостійна робота учнів із перевірки домашнього завдання за зразком або фронтальна робота з коментуванням розв'язань, заздалегідь записаних на дошці, або самостійна робота з виконання вправ, аналогічних за змістом до вправ домашньої роботи, з подальшою перевіркою та обговоренням.

Самостійна робота

Варіант 1

1. Точка P лежить поза площиною правильного трикутника ABC, O — точка перетину бісектрис трикутника, пряма PO перпендикулярна до площини ABC. Побудуйте лінійний кут двогранного кута з ребром BC.

2. $ABCD$ — прямокутник, $BD = 4\sqrt{3}$ см, пряма PB перпендикулярна до площини ABC, $PB = 6$ см, двогранний кут із ребром DC дорівнює $60°$. Знайдіть площу прямокутника.

Варіант 2

1. Точка P лежить поза площиною правильного трикутника ABC, точка O — середина відрізка AB, пряма PO перпендикулярна до площини ABC. Побудуйте лінійний кут двогранного кута з ребром AC.
2. $ABCD$ — прямокутник, його площа дорівнює 48 см^2, $DC = 4$ см, O — точка перетину діагоналей прямокутника, пряма PO перпендикулярна до площини ABC, $PO = 6$ см. Знайдіть величину двогранного кута з ребром DC.

III. Формулювання мети й завдань уроку

На цьому етапі уроку вчитель може провести бесіду про те, що у стереометрії вивчають фігури у просторі, які називають геометричними тілами. Просторовими аналогами многокутників є многогранники. Многогранники зустрічаються в навколишньому середовищі і нерідко мають складну будову. Цегла, будинки (у тому числі й недобудовані), столи, шафи, різноманітні кристали — все це моделі многогранників. Знання властивостей многогранників стають у пригоді багатьом спеціалістам. Із курсів математики попередніх класів учні мають уявлення про окремі види многогранників: паралелепіпед, куб, призму, піраміду. Метою уроку є засвоєння означень многогранника та його елементів.

IV. Актуалізація опорних знань

Фронтальне опитування

1. Сформулюйте означення многокутника, його вершин, сторін і кутів.
2. Які види многокутників ви знаєте?
3. Які многокутники називають опуклими?
4. Які многокутники називають правильними?

V. Засвоєння знань

План вивчення теми

1. Означення многогранника.
2. Означення граней, ребер, вершин, діагоналей многогранника.
3. Означення опуклого многогранника.
4. Означення двогранного кута опуклого многогранника.
5. Означення розгортки многогранника.

6. Означення площі повної поверхні многогранника.
7. Означення січної площини та перерізу многогранника.

Сформулювати означення многогранника, яке поєднувало б у собі строгість і простоту в його розумінні й використанні, нелегко. У різних підручниках можна знайти зовсім різні означення многогранника. У наведеному означенні (зустрічається у більшості сучасних підручників) фігурує поняття «геометричне тіло», яке учні сприймають на інтуїтивному рівні, без строгого означення. Для того щоб ввести строге означення цього поняття, необхідно ввести низку допоміжних понять, що виходить за рамки чинної програми з математики.

Конспект 14

Многогранник та його елементи. Опуклі многогранники

1. Многогранником називають геометричне тіло, поверхня якого складається зі скінченної кількості плоских многокутників.

2. Плоскі многокутники, з яких складається поверхня многогранника, називають гранями многогранника, їх сторони — ребрами многогранника, а вершини — вершинами многогранника. Відрізок, що сполучає дві вершини многогранника, які не лежать в одній грані, називають діагоналлю многогранника.

Грані, які мають спільне ребро, називають сусідніми гранями.

Зауваження. Жодні дві сусідні грані многогранника не лежать в одній площині.

3. Опуклим многогранником називають многогранник, який лежить по один бік від площини кожної його грані.

4. Двогранний кут, утворений площинами сусідніх граней опуклого многогранника, називають двогранним кутом опуклого многогранника, якщо поданий многогранник лежить у внутрішній області цього двогранного кута.

5. Розгорткою многогранника називають многокутник, який є об'єднанням інших многокутників, що дорівнюють граням многогранника і для яких може бути вказаний порядок їх з'єднання за сторонами і вершинами для того, щоб дістати поданий многогранник. Многогранник може мати більше ніж одну розгортку.

6. Площею повної поверхні многогранника називають суму площ усіх його граней. (Площею повної поверхні многогранника є площа його розгортки.)

7. Якщо хоча б дві точки многогранника лежать по різні боки від площини, то кажуть, що площина перетинає многогранник. Таку площину називають січною площиною.

Геометричну фігуру, що складається з усіх точок, спільних для многогранника і січної площини, називають перерізом многогранника поданою площиною. Кожний переріз опуклого многогранника — це опуклий многокутник

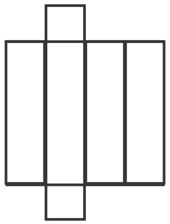
Залежно від рівня підготовленості учнів учитель або викладає новий матеріал лекційним способом, або пропонує учням скласти конспект, скориставшися наведеним учителем планом та текстом підручника, або самостійно опрацювати текст підручника, скласти план відповідного параграфа та дати відповіді (усно або письмово) на питання цього плану.

VI. Формування вмінь

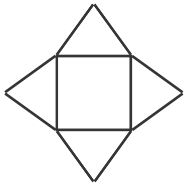
Виконання усних вправ

1. Яке мінімальне число ребер може мати многогранник?
2. Визначте, скільки вершин, ребер і граней має многогранник, розгортку якого зображено на *рисунку*.

а)



б)



3. Скільки ребер може сходитися в одній вершині многогранника?

Виконання графічних вправ

1. Зобразіть многогранник, у якому шість вершин і п'ять граней.
2. Зобразіть многогранник, у якому однакове число вершин і число граней.

Виконання письмових вправ

1. Знайдіть площу повної поверхні многогранника, що складається з чотирьох рівних граней, кожна з яких є правильним трикутником з висотою 4 см.
2. Знайдіть площу повної поверхні многогранника, що складається з шести рівних граней, кожна з яких є квадратом із діагоналлю $2\sqrt{2}$ см.
3. Дві суміжні грані AA_1B_1B і AA_1C_1C п'ятигранника $ABCA_1B_1C_1$ — прямокутники, площини яких перпендикулярні. Знайдіть площу повної поверхні п'ятигранника, якщо $AB=6$ см, $AC=8$ см, $AA_1=5$ см.
4. Грань $ABCD$ п'ятигранника $ABCDF$ — квадрат, площа якого дорівнює 64 см^2, а решта граней — правильні трикутники. Знайдіть двогранний кут із ребром BC поданого п'ятигранника.
5. Грань $ABCD$ п'ятигранника $ABCDF$ — квадрат, а решта граней — рівні рівнобедрені трикутники, бічні сторони яких дорівнюють 6 см. Знайдіть площу перерізу многогранника площиною, що проходить через вершини A, C, F, якщо

$$\angle AFC = 90°.$$

Запропоновані вправи спрямовані на засвоєння поняття многогранника та його елементів Хоча мова не йде про конкретні види многогранників, зрозуміло, що під час виконання письмових вправ учні дістають або піраміди (вправи № 1, № 4 і № 5), або куб (вправа № 2), або призму (вправа № 3). Учителеві не слід акцентувати увагу на тому, який саме многогранник отримано під час розв'язування тієї чи іншої задачі; основною метою виконання цих завдань є відпрацьовування понять елементів многогранників.

VII. Підсумки уроку

Контрольні запитання

1. Наведіть приклади многогранників із навколишнього середовища, які є:
   а) опуклими; б) неопуклими.
2. Користуючись моделлю многогранника, укажіть його вершини, ребра, грані. Якими геометричними фігурами є вершини многогранника; ребра многогранника? Якими геометричними фігурами є грані поданого многогранника? Чи у будь-якого многогранника грані є саме такими геометричними фігурами?

VIII. Домашнє завдання

Вивчити означення, які були розглянуті на уроці.

Виконати вправи.

1. Зобразіть многогранник, у якому число вершин і число граней однакове.
2. Знайдіть площу повної поверхні многогранника, у якому одна грань — квадрат зі стороною 4 см, а інші чотири грані — правильні трикутники.
3. Дві суміжні грані AA_1B_1B і AA_1C_1C п'ятигранника $ABCA_1B_1C_1$ — квадрати зі стороною 8 см. Знайдіть площу повної поверхні п'ятигранника, якщо двогранний кут при ребрі AA_1 дорівнює $30°$.
4. Усі грані шестигранника $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — квадрати зі стороною 4 см. Знайдіть площу перерізу поданого многогранника, площиною, що проходить через ребра AB і C_1D_1.

УРОК № 19
ПРИЗМА. ПРЯМА І ПРАВИЛЬНА ПРИЗМИ

Мета: сформувати поняття:

✓ призми та її елементів (основ, бічних граней, бічних ребер, висоти, діагоналі, діагонального перерізу);
✓ прямої та похилої призми;
✓ правильної призми.

Домогтися засвоєння властивостей призми та прямої призми. Сформувати вміння розв'язувати задачі, що передбачають використання цих понять і властивостей.

Тип уроку: засвоєння знань, формування вмінь.

Наочність та обладнання: конспект «Призма. Пряма і правильна призми», моделі прямої, похилої та правильної призм.

Хід уроку

І. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

ІІ. Перевірка домашнього завдання

Перевірку якості виконання письмових вправ домашнього завдання здійснюємо за готовими рисунками з короткими записами розв'язань. Ці розв'язання виконані учнями на дошці або вчителем на картках для індивідуальної роботи учнів. Вибір форми перевірки домашнього завдання залежить від рівня математичної підготовки учнів.

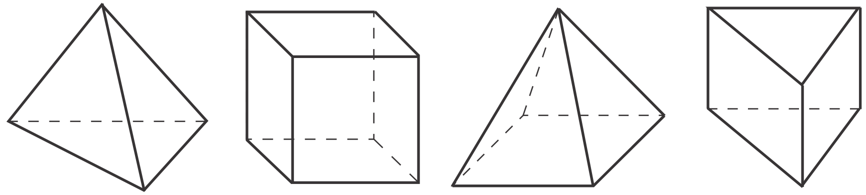
Перевірку засвоєння учнями теоретичного матеріалу можна провести за допомогою математичного диктанту.

Математичний диктант

1. Продовжте речення:
а) Многогранником називають...
б) Діагоналлю многогранника називають...
в) Многогранник називають опуклим, якщо...
г) Розгорткою многогранника називають...
д) Площею повної поверхні многогранника називають...
е) Кожний переріз опуклого многогранника є...

2. З-поміж многогранників (зображених на дошці) укажіть номер того, у якому:
а) чотири вершини;
б) шість граней;
в) один чотиригранний кут;
г) дев'ять ребер.

№ 1 № 2 № 3 № 4



ІІІ. Формулювання мети й завдань уроку

На цьому етапі уроку вчитель може запропонувати учням логічну вправу: Виключити зайве слово із запропонованої низки слів: призма, паралелепіпед, піраміда, куб, куля. Користуючись знаннями, набутими раніше, та власним досвідом, учні роблять висновок, що зайвим є слово «куля», оскільки решта слів означають назви многогранників. Після цього вчитель повідомляє, що протягом найближчих уроків учні опанують означення та властивості окремих видів многогранників, і звертає увагу на те, що на практиці (у побуті, архітектурі, техніці) найчастіше зустрічається призма. Отже, мета уроку — вивчення означення призми, її видів і властивостей.

IV. Актуалізація опорних знань

З метою уникнення формалізму в сприйнятті нового матеріалу на цьому етапі уроку доречно повторити такі відомості з планіметрії: означення, властивості й ознаки паралелограма, означення правильного многокутника, а також зі стереометрії: означення паралельних і перпендикулярних площин, перпендикуляра до площини, відстані між паралельними площинами.

Фронтальна робота

1. Сформулюйте означення, властивості й ознаки паралелограма.
2. Знайдіть периметр паралелограма $ABCD$, якщо $AB = 4$ см, $BC = 5$ см.
3. Один із кутів паралелограма дорівнює $50°$. Знайдіть решту кутів цього паралелограма.
4. Сформулюйте означення правильного многокутника.
5. Чи правильно, що правильний многокутник є вписаним у коло і описаним навколо кола?
6. Як називається правильний чотирикутник?
7. Сформулюйте означення паралельних площин. Наведіть приклади паралельних площин із навколишнього середовища.

8. Сформулюйте означення перпендикуляра до площини.
9. $ABCD$ — паралелограм, BE і DF — перпендикуляри до площини ABC. Доведіть, що площини ABE і DFC паралельні.
10. Сформулюйте означення відстані між паралельними площинами. Чи правильно, що висота кімнати є відстанню між площиною підлоги і площиною стелі?
11. Сформулюйте означення перпендикулярних площин. Наведіть приклади перпендикулярних площин із навколишнього середовища.
12. Відомо, що площина α перпендикулярна до площини γ і площина β перпендикулярна до площини γ. Яке взаємне розміщення площин α і β?

V. Засвоєння знань

План вивчення теми

1. Означення призми та її елементів (основ, бічних граней, бічних ребер висоти, діагоналі).
2. Види призм.
3. Властивості призми.

Конспект 15

Призма. Пряма і правильна призми

1. Призмою називають многогранник, який складається із двох плоских многокутників, що лежать у різних площинах і суміщаються паралельним перенесенням, і всіх відрізків, які сполучають відповідні точки цих многокутників.

Многокутники називають основами призми, інші грані — бічними гранями призми, відрізки, що сполучають відповідні вершини основ — бічними ребрами призми.

Призму з n-кутником в основі називають n-кутною.

Висотою призми називають перпендикуляр, проведений із будь-якої точки однієї основи до площини другої основи.

Діагоналлю призми називають відрізок, який сполучає дві вершини, що не належать одній грані.

Діагональним перерізом призми називають переріз площиною, що проходить через два бічних ребра, що не належать одній грані.

2. Види призм

Призма
- пряма
  - правильна
  - неправильна
- похила

Прямою призмою називають призму, бічні ребра якої перпендикулярні до площин основ.

Призму, яка не є прямою, називають похилою.

Правильною призмою називають пряму призму, основи якої — правильні многокутники.

3. Властивості призми

Властивості призми		
Похилої	Прямої	Правильної
1. Основи призми паралельні й рівні		
2. Бічні грані є паралелограмами	2. Бічні грані є прямокутниками	Бічні грані є рівними прямокутниками
3. Бічні ребра паралельні й рівні		
	4. Бічні ребра є висотами	

З поняттям призми та її властивостями учні оглядово були ознайомлені в курсі геометрії 9 класу. На цьому уроці слід приділити увагу сторогому означенню призми та математичним обґрунтуванням її властивостей. Бажано звернути увагу учнів на слова в означенні призми «сполучають відповідні точки цих многокутників» і пояснити, що «відповідними» тут називають розглянуті точки, які переходять одна в одну в результаті паралельного перенесення.

Як і на попередніх уроках, учитель обирає форму викладення нового матеріалу залежно від рівня підготовленості учнів: або лекційним способом, або пропонує учням скласти конспект, скориставшися наведеним учителем планом та текстом підручника, або самостійно опрацювати текст підручника, скласти план відповідного параграфа та дати відповіді (усно або письмово) на питання цього плану.

Зауважимо, що наведений підхід до означення призми є, так би мовити, традиційним і його дотримується більшість авторів, хоча в сучасних підручниках існує декілька підходів до введення поняття призми (наприклад, «Призмою називають циліндр, в основі якого лежить многокутник», Афанасьєва О. М., Бродський Я. С., Павлов О. Л., Сліпенко А. К. Геометрія. 10–11 класи).

VI. Формування вмінь

Виконання усних вправ

1. Чи правильно, що у кожній призмі число ребер завжди кратне трьом?
2. Чи існує призма, в якій немає жодної діагоналі?

3. Призма має 14 граней. Який многокутник лежить в її основі?
4. Якою фігурою є переріз правильної чотирикутної призми площиною, що проходить через середини бічних ребер призми?
5. Скільки в правильній трикутній призмі площин симетрії? Проілюструйте відповідь на моделі.

Виконання письмових вправ

1. Доведіть, що якщо одне з бічних ребер призми перпендикулярне до її основи, то призма — пряма.
2. Відомо, що всі три бічні грані призми — квадрати зі стороною 2 см. Обчисліть площу однієї з основ призми.
3. Висота призми дорівнює 5 см, а бічне ребро нахилене до площини основи під кутом $30°$. Знайдіть довжину бічного ребра призми.
4. Сторона основи правильної призми дорівнює 3 см, а діагональ бічної грані — 5 см. Знайдіть висоту призми.

Запропоновані вправи спрямовані на засвоєння означення та властивостей призми і її елементів. Оскільки на вивчення цього матеріалу відведено два уроки, то через великий обсяг матеріалу, що розглядається на цьому уроці, питання про правила зображення призми можна розглянути на наступному уроці. Розв'язання запропонованих задач не вимагають побудови призми.

VII. Підсумки уроку

Контрольні запитання

Чи правильно, що:

а) основи будь-якої призми лежать у паралельних площинах;
б) бічні ребра будь-якої призми рівні;
в) якщо основою призми є правильний многокутник, то вона обов'язково правильна;
г) у будь-якій призмі довжина бічного ребра дорівнює висоті;
д) бічні грані будь-якої прямої призми є рівними прямокутниками;
е) бічні грані призми можуть бути ромбами?

VIII. Домашнє завдання

Вивчити зміст понять, розглянутих на уроці.
Виконати вправи.

1. Доведіть, що в прямій призмі бічне ребро перпендикулярне до діагоналей основи.
2. Усі бічні грані чотирикутної призми — ромби зі стороною 5 см. Чому дорівнює периметр основи призми?
3. Бічне ребро призми дорівнює $2\sqrt{3}$ см і нахилене до площини основи під кутом $60°$. Знайдіть висоту призми.

4. Висота правильної чотирикутної призми дорівнює 8 см, а діагональ бічної грані — 10 см. Знайдіть площу однієї з основ призми.

УРОК № 20
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Мета: працювати над засвоєнням учнями означення та властивостей призми та її елементів, прямої та правильної призми; доповнити знання учнів правилами зображення призми; формувати навички розв'язування задач на знаходження невідомих елементів призми.

Тип уроку: комбінований.

Наочність та обладнання: конспект «Правила зображення призми».

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Оскільки задачі домашньої роботи є досить простими і відтворюють ситуації, що були розглянуті на уроці, то ретельно перевірити домашнє завдання можна тільки в учнів, які потребують додаткової педагогічної уваги. У решти учнів можна перевірити правильність виконання письмового завдання за готовими відповідями. Засвоєння теоретичного матеріалу можна перевірити за допомогою тестових завдань. Відповіді на запитання тестового завдання перевіряють і за необхідності коригують одразу після виконання роботи.

Тестові завдання

1. Яка з наведених геометричних фігур не може бути бічною гранню призми?
   А) Паралелограм; Б) квадрат; В) трикутник; Г) ромб.
2. Яка з наведених фігур може бути основою правильної призми?
   А) Квадрат; Б) рівнобедрений трикутник;
   В) ромб; Г) рівнобічна трапеція.
3. За якої з наведених умов чотирикутна призма є правильною?
   А) В основі призми лежить квадрат;
   Б) усі бічні ребра призми перпендикулярні до її основи;
   В) усі бічні грані призми — рівні прямокутники;
   Г) за будь-якої умови.

III. Формулювання мети й завдань уроку

Мета уроку безпосередньо випливає з його теми. Мотивацією до вивчення правила зображення призми може бути проблемна ситуація: виконати зображення: а) похилої призми, в основі якої лежить прямокутний трикутник; б) правильної чотирикутної призми; в) прямої призми, в основі якої лежить прямокутник, тощо.

IV. Відтворення опорних знань і вмінь

Учням пропонується самостійно за опорним конспектом 15 повторити зміст матеріалу, вивченого на попередньому уроці.

V. Доповнення знань

Конспект 16

Правила зображення призми

1. Зобразити одну з основ призми.

2. Зобразити бічні ребра призми у вигляді паралельних рівних відрізків (у випадку прямої призми — вертикальних рівних відрізків).

3. Послідовно сполучити вільні кінці цих відрізків.

Зауваження

1. Невидимі ребра призми зображають пунктирними лініями.

2. Висоту похилої призми зображають у вигляді вертикального відрізка

Зазвичай зображення многогранників викликає в учнів чималі труднощі. Тому доцільно приділити час для відпрацьовування навичок побудови призми. За необхідності можна нагадати учням вивчені в 10 класі правила зображення многокутників:

- ✓ зображенням трикутника (рівностороннього, рівнобедреного, прямокутного) є довільний трикутник;
- ✓ зображенням паралелограма (прямокутника, ромба, квадрата) є довільний паралелограм;
- ✓ зображенням трапеції (рівнобічної, прямокутної) є трапеція, у якій відношення довжин основ дорівнює відношенню довжин основ поданої трапеції;
- ✓ зображенням довільного чотирикутника (не паралелограма і не трапеції) є довільний чотирикутник;
- ✓ зображенням правильного шестикутника є шестикутник, у якому три пари протилежних сторін попарно рівні.

VI. Формування вмінь, навичок

Виконання графічних вправ

1. Побудуйте пряму чотирикутну призму, основою якої є прямокутник. Проведіть діагональ призми.

2. Побудуйте похилу трикутну призму. Проведіть висоту призми.
3. Побудуйте пряму чотирикутну призму, в основі якої лежить рівнобічна трапеція з основами 2 см і 5 см. Побудуйте діагональний переріз цієї призми.
4. Побудуйте трикутну призму, у якій одна з вершин верхньої основи проектується в центр кола, описаного навколо нижньої основи.

Виконання письмових вправ

1. Основою призми $ABCA_1B_1C_1$ є рівнобедрений прямокутний трикутник $(\angle C = 90°)$ з катетами 10 см. Вершина C_1 проектується в центр кола, описаного навколо трикутника ABC. Знайдіть довжину бічного ребра призми, якщо висота призми дорівнює 5 см.
2. Основою призми $ABCA_1B_1C_1$ є правильний трикутник зі стороною 12 см, вершина A_1 проектується на площину ABC у центр основи призми, бічне ребро призми утворює з площиною основи кут $60°$. Знайдіть висоту призми.
3. Основою прямої призми є ромб зі стороною 12 см і гострим кутом $60°$. Кут між більшою діагоналлю призми і площиною основи дорівнює $30°$. Знайдіть довжини діагоналей призми.
4. Основою прямої призми є ромб із тупим кутом $120°$. Більша діагональ призми дорівнює 8 см і утворює кут $60°$ із бічним ребром. Знайдіть довжини сторони ромба і меншої діагоналі призми.
5. Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює d і утворює з площиною основи кут α. Знайдіть площу діагонального перерізу призми.
6. Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник із кутом α при вершині і радіусом описаного кола R. Діагональ бічної грані, що містить основу цього трикутника, утворює з площиною основи призми кут β. Обчисліть висоту призми.

Виконання графічних та письмових вправ, що винесені на урок (а також усних вправ, що розглядаються на етапі підбиття підсумків уроку), має на меті:

- ✓ сформувати вміння виконувати рисунки із зображенням призм;
- ✓ закріпити поняття призми та її елементів, прямої та правильної призми, властивостей призм.

Також під час розв'язування цих вправ учні використовують знання, набуті в попередніх класах, а саме: розв'язування трикутників (як прямокутних, так і довільних), обчислення площ та периметрів фігур. Крім того, такі вправи можна розглядати як підготовчі до розв'язування задач на обчислення площі поверхні та об'єму призми.

VII. Підсумки уроку

Виконання усних вправ

1. Бічна грань правильної шестикутної призми — квадрат, площа якого дорівнює 36 см^2. Обчисліть периметр основи призми.
2. Діагональний переріз правильної чотирикутної призми — квадрат, площа якого дорівнює 18 см^2. Обчисліть площу основи призми.
3. Площа бічної грані правильної трикутної призми дорівнює 24 см^2, а периметр основи — 9 см. Знайдіть бічне ребро призми.
4. Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник з основою 6 см і проведеною до неї висотою 4 см. Обчисліть діагоналі рівних бічних граней, якщо висота призми дорівнює 12 см.

VIII. Домашнє завдання

Повторити означення та властивості призми і її елементів, правила зображення призми (конспекти 15 і 16).

Виконати домашню самостійну роботу.

Домашня самостійна робота

Варіант 1

1. Основою прямої призми є ромб із діагоналями 10 см і 24 см. Знайдіть висоту призми, якщо менша діагональ призми дорівнює 26 см.
2. Знайдіть площу основи і висоту правильної чотирикутної призми, діагональ якої дорівнює $12\sqrt{3}$ см і нахилена до площини основи під кутом $30°$.
3. Основою прямої призми є прямокутний трикутник із гіпотенузою c і гострим кутом α. Діагональ бічної грані, що містить катет, протилежний куту α, нахилена до площини основи під кутом β. Знайдіть висоту призми.
4. Основою похилої призми є квадрат, а бічні грані — ромби. Знайдіть периметр основи призми, якщо її висота дорівнює 5 см, а бічні ребра нахилені до площини основи під кутом $30°$.

Варіант 2

1. Основою прямої призми є ромб із діагоналями 16 см і 30 см. Знайдіть висоту призми, якщо більша діагональ призми дорівнює 50 см.

2. Знайдіть площу основи і висоту правильної чотирикутної призми, діагональ якої дорівнює $8\sqrt{2}$ см і нахилена до площини основи під кутом $45°$.
3. Основою прямої призми є прямокутний трикутник із катетом a і протилежним кутом α. Діагональ бічної грані, що містить гіпотенузу, нахилена до площини основи під кутом β. Знайдіть висоту призми.
4. Основою похилої призми є правильний трикутник, периметр якого дорівнює 18 см. Знайдіть висоту призми, якщо бічні ребра нахилені до площини основи під кутом $30°$, а бічні грані — ромби.

УРОК № 21
ПЛОЩІ БІЧНОЇ ТА ПОВНОЇ ПОВЕРХОНЬ ПРИЗМИ

Мета: сформувати поняття площ повної та бічної поверхонь призми; домогтися засвоєння формул для обчислення площі повної поверхні будь-якої призми та бічної поверхні прямої та похилої призми; сформувати вміння обчислювати площі бічної та повної поверхонь призми.

Тип уроку: засвоєння знань, формування вмінь.

Наочність та обладнання: конспект «Площі бічної та повної поверхонь призми».

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

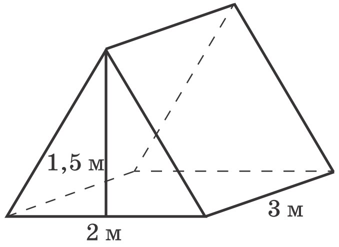
Учитель збирає на перевірку зошити з виконаною домашньою самостійною роботою. З метою надання учням можливості скоригувати свої знання та вміння вчитель роздає правильні розв'язання домашніх задач для самостійного опрацювання вдома.

III. Формулювання мети й завдань уроку

Створенню мотивації для вивчення нового матеріалу може сприяти обговорення практичної задачі.

Задача. Скільки квадратних метрів тканини необхідно для виготовлення туристського намету, розміри якого вказано на рисунку?

Після обговорення учні доходять висновку, що туристський намет має форму прямої трикутної призми і для відповіді на запитання задачі потрібно знайти суму площ усіх граней цієї призми, тобто площу повної поверхні призми. Отже, основною метою і завданням уроку є вивчення формул для обчислення площ повної та бічної поверхонь призми.



IV. Актуалізація опорних знань

Математичний диктант

Запишіть формулу для обчислення площі:

1) квадрата зі стороною a;
2) квадрата з діагоналлю d;
3) прямокутника зі сторонами a і b;
4) паралелограма зі стороною a і висотою h, проведеною до цієї сторони;
5) паралелограма зі сторонами a і b і кутом α між ними;
6) ромба із діагоналями d_1 і d_2;
7) трикутника зі стороною a і висотою h, проведеною до цієї сторони;
8) трикутника зі сторонами a і b і кутом α між ними;
9) трикутника зі сторонами a, b і c;
10) прямокутного трикутника з катетами a і b;
11) рівностороннього трикутника зі стороною a;
12) трапеції з основами a і b і висотою h.

V. Засвоєння знань

План вивчення теми

1. Означення площ повної і бічної поверхонь призми.
2. Формула для обчислення площі повної поверхні призми.
3. Формула для обчислення площі бічної поверхні прямої призми (теорема).

4*. Формула для обчислення площі бічної поверхні похилої призми (теорема).

Теоретичний матеріал, запланований для вивчення на уроці, є досить простим, тому можна надати учням план вивчення теми і запропонувати самостійно сформулювати відповіді на його запитання.

Адже, знаючи означення площі повної поверхні довільного многогранника, зовсім нескладно сформулювати означення площі повної та бічної поверхонь призми. Якщо виникнуть утруднення під час виведення формули для обчислення площі бічної поверхні прямої призми, можна запропонувати учням низку навідних запитань, а саме: які чотирикутники

Конспект 17

Площі бічної та повної поверхонь призми

1. Площею повної поверхні призми називають суму площ усіх її граней.

Площею бічної поверхні призми називають суму площ її бічних граней.

2. Формула для обчислення площі повної поверхні призми:

$$S_{\text{повн.}} = S_{\text{бічн.}} + 2S_{\text{осн.}}.$$

3. Формула для обчислення площі бічної поверхні прямої призми (теорема).

Площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра основи на висоту: $S_{\text{бічн.}} = P_{\text{осн.}} \cdot H$.

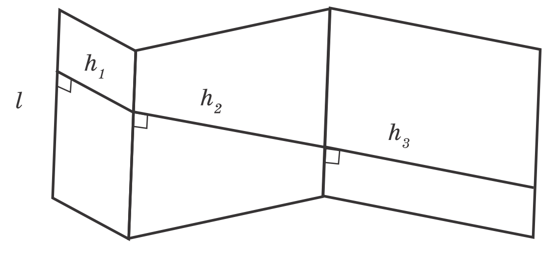
4*. Формула для обчислення площі бічної поверхні похилої призми (теорема).

Площа бічної поверхні похилої призми дорівнює добутку периметра перпендикулярного перерізу на бічне ребро: $S_{\text{бічн.}} = P_{\perp} \cdot l$.

(Перпендикулярний переріз — це переріз призми площиною, яка перетинає всі бічні ребра (або їх продовження) і перпендикулярна до них)

утворюють бічну поверхню прямої призми? чи мають ці прямокутники рівні елементи? як обчислити площу прямокутника? тощо. Під час виведення формули для обчислення площі бічної поверхні похилої призми можна запропонувати учням задачу, в якій міститься підказка: «У похилій призмі проведено переріз, що перетинає всі бічні ребра і перпендикулярний до бічних ребер. Знайдіть бічну поверхню призми, якщо периметр перерізу дорівнює p, а бічні ребра — l».

Можна під час обговорення запитання розглянути розгортку бічної поверхні похилої призми, яка є низкою паралелограмів, що сполучаються один з одним рівними сторонами — бічними ребрами. Для того щоб знайти площу розгортки, треба довжину бічного ребра помножити на суму висот паралелограмів (*див. рисунок*).

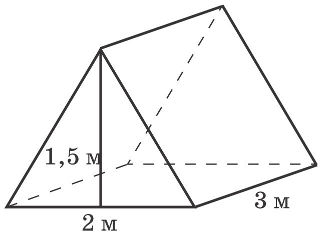


VI. Формування первинних умінь

Виконання усних вправ

1. Основою правильної призми є трикутник зі стороною 6 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо її бічне ребро дорівнює 10 см.
2. Площа основи правильної чотирикутної призми дорівнює 16 см^2. Знайдіть площу повної поверхні призми, якщо її висота дорівнює 5 см.
3. Основою прямої призми є прямокутний трикутник із катетами 3 см і 4 см. Знайдіть площу повної поверхні призми, якщо її висота дорівнює 6 см.

Виконання письмових вправ



1. Скільки квадратних метрів тканини необхідно для виготовлення туристського намету, розміри якого указано на *рисунку*?
2. Основою прямої призми є трикутник, сторони якого дорівнюють 5 см, 5 см і 6 см. Висота призми дорівнює більшій висоті цього трикутника. Знайдіть площу повної поверхні призми.
3. Основою прямої призми є ромб зі стороною 8 см і кутом $60°$. Більша діагональ призми утворює з площиною основи кут $30°$. Знайдіть площу повної поверхні призми.
4. Основою прямої призми є паралелограм зі сторонами 8 см і 10 см. Одна з діагоналей основи дорівнює 6 см. Обчисліть площу бічної поверхні призми, якщо площа її меншого діагонального перерізу дорівнює 36 см^2.

5*. Дві бічні грані похилої трикутної призми утворюють кут $60°$, відстані від їх спільного ребра до прямих, які містять два інших ребра, дорівнюють 5 см і 10 см, а бічне ребро призми дорівнює 8 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

Запропоновані завдання є типовими задачами на обчислення площ бічної та повної поверхонь призми. Слід зауважити, що сама термінологія, пов'язана з призмами: бічні ребра, бічні грані, бічна поверхня, — призводить до, так би мовити, зорового стереотипу: призма «стоїть» на основі, а бічні ребра і т. ін. розташовані «збоку». Такий стереотип варто зруйнувати. Наприклад, «покласти» призму на бічну грань і обговорити питання: що це за многогранник? де у цієї призми основи? бічні грані? бічна поверхня? тощо. Прикладом такого завдання є задача, запропонована для обговорення на етапі формулювання мети й завдань уроку і для розв'язування як письмова задача № 1.

VII. Підсумки уроку

Контрольні запитання

1. Чому дорівнює площа повної поверхні призми?
2. Як знайти площу бічної поверхні прямої призми?
3. Як знайти площу бічної поверхні похилої призми?
4. Що називають перпендикулярним перерізом призми?

VIII. Домашнє завдання

Вивчити формули для обчислення площ бічної та повної поверхонь призми.

Виконати вправи.

1. Обчисліть площу повної поверхні прямої трикутної призми, якщо її висота дорівнює 50 см, а сторони основ дорівнюють 40 см, 13 см і 37 см.
2. Основою прямої чотирикутної призми є паралелограм зі сторонами 4 см, 6 см і кутом $60°$. Знайдіть площу повної поверхні призми, якщо діагональ більшої її грані дорівнює 10 см.
3. Основою прямої призми є ромб із кутом $120°$. Більша діагональ призми дорівнює 8 см і утворює з бічним ребром кут $60°$. Обчисліть площу повної поверхні призми.
4. У похилої призми дві бічні грані взаємно перпендикулярні, їх спільне ребро дорівнює 40 см і віддалене від решти бічних ребер на відстані 20 см і 21 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

УРОК № 22
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Мета: працювати над засвоєнням учнями формул для обчислення площ бічної та повної поверхонь призми; формувати навички використання вивчених формул для розв'язування задач на обчислення площ бічної та повної поверхонь призми.

Тип уроку: застосування знань, засвоєння вмінь і навичок.

Наочність та обладнання: конспект «Площі бічної та повної поверхонь призми».

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Оскільки письмові вправи домашньої роботи відтворювали ситуації, аналогічні до розглянутих на попередньому уроці, то можна перевірити лише правильність виконання обчислень або провести перевірку домашнього завдання за записами, які виконали на дошці учні з високим рівнем навчальних досягнень, та під час фронтальної роботи прокоментувати розв'язання домашніх задач. З метою перевірки рівня засвоєння учнями вивчених формул можна провести математичний диктант, відповіді на запитання якого перевіряються та коригуються одразу після виконання роботи.

Математичний диктант

1. Бічне ребро прямої призми дорівнює 10 см, а основою є трикутник зі сторонами 13 см, 14 см, 15 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми.
2. Основою прямої призми є прямокутний трикутник із катетами 8 см і 6 см. Знайдіть площу повної поверхні призми, якщо її висота дорівнює 5 см.
3. Основою прямої призми є ромб із діагоналями 6 см і 8 см. Обчисліть площу бічної поверхні призми, якщо діагональ бічної грані дорівнює 13 см.
4. Бічне ребро правильної призми дорівнює b, а сторона основи — a. Чому дорівнює площа повної поверхні призми, якщо її основою є:
   а) трикутник;
   б) чотирикутник?

III. Формулювання мети й завдань уроку

Головна мета уроку зумовлена його темою і полягає в тому, щоб, закріпивши знання формул для обчислення площ бічної та повної поверхонь призми, сформувати в учнів сталі вміння та навички роботи з цими формулами під час розв'язування задач. Крім того, під час розв'язування обчислювальних задач учні повторюють чимало планіметричних формул, а саме: формули для обчислення площ фігур, співвідношення між сторонами та кутами прямокутного трикутника, розв'язування трикутників тощо.

IV. Відтворення та систематизація опорних знань і вмінь

Учням пропонуємо самостійно повторити зміст матеріалу, вивченого на попередньому уроці за конспектом № 17.

V. Формування вмінь, навичок

Виконання усних вправ

1. Основою прямої призми є трикутник зі сторонами 5 см, 5 см, 6 см; діагональ більшої бічної грані утворює з бічними ребром кут $45°$. Чому дорівнює площа бічної поверхні призми?
2. Площа найбільшого діагонального перерізу правильної шестикутної призми дорівнює 1 м^2. Чому дорівнює площа бічної поверхні призми?
3. У прямій трикутній призмі всі ребра рівні. Площа бічної поверхні призми дорівнює 12 см^2. Чому дорівнює висота призми?
4. Площа бічної поверхні правильної чотирикутної призми дорівнює 32 м^2, а площа повної поверхні — 48 м^2. Чому дорівнює висота призми?
5. Відстань між бічними ребрами похилої трикутної призми дорівнює 2 см, 3 см, 4 см, а площа бічної поверхні — 45 см^2. Чому дорівнює довжина бічного ребра?

Виконання письмових вправ

1. Знайдіть площу повної поверхні правильної чотирикутної призми, якщо її діагональ дорівнює 14 см, а діагональ бічної грані — 10 см.
2. Основою прямої призми є рівнобічна трапеція, основи якої дорівнюють 11 см і 21 см, а бічні сторони — 13 см. Обчисліть площу бічної поверхні цієї призми, якщо площа її діагонального перерізу дорівнює 180 см^2.
3. Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює l і утворює з площиною основи кут α. Обчисліть площу бічної поверхні призми.
4. Висота правильної чотирикутної призми дорівнює H. Діагональ призми утворює з бічним ребром кут α. Обчисліть площу бічної поверхні призми.
5. У похилої трикутної призми відстані між бічними ребрами дорівнюють 37 см, 15 см і 26 см, а бічна поверхня рівновелика перпендикулярному перерізу. Знайдіть довжину бічного ребра призми.
6. Основою прямої призми є трикутник зі сторонами 25 см, 29 см, 36 см; площа повної поверхні призми дорівнює 1 620 см^2. Обчисліть площу бічної поверхні та висоту призми.
7. У прямої трикутної призми сторони основи відносяться як 17 : 10 : 9, а бічне ребро дорівнює 16 см, площа повної поверхні призми — 1 440 см^2. Знайдіть довжини сторін основи.
8. Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник, у якого бічна сторона відноситься до основи як 5 : 6. Висота призми дорів-

нює висоті основи, проведеної до бічної сторони. Площа повної поверхні дорівнює 2 520 м^2. Обчисліть довжину ребер призми.

Запропоновані задачі сприяють формуванню сталих навичок використовувати формули для обчислення площ бічної та повної поверхонь призми. Зрозуміло, що протягом одного уроку учні не встигнуть розв'язати всі запропоновані задачі. Учитель на власний розсуд вибирає задачі для розв'язування залежно від рівня підготовленості учнів. Серед запропонованих є як стандартні задачі на обчислення площ бічної та повної поверхонь призми (усні вправи № 1 і 2, письмові вправи № 1–5), так і нестандартні, у яких за площею бічної або повної поверхні та деякими елементами призми потрібно знайти інші елементи. Такі задачі можна використовувати як індивідуальні завдання для учнів із достатнім та високим рівнями навчальних досягнень.

VII. Підсумки уроку

Підсумком уроку має бути усвідомлення учнями системи задач, які вони зможуть розв'язувати з використанням вивчених формул.

VIII. Домашнє завдання

Повторити вивчені формули (див. конспект 17).

Виконати домашню самостійну роботу.

Домашня самостійна робота

Варіант 1

1. Основою прямої призми є трикутник зі сторонами 8 см, 6 см, 10 см. Висота призми дорівнює середньому арифметичному сторін основи. Обчисліть площу повної поверхні призми.
2. Діагональ бічної грані правильної чотирикутної призми дорівнює l і утворює з площиною основи кут α. Знайдіть площу бічної поверхні призми.
3. Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник з бічною стороною 8 см і кутом при вершині $120°$. Кут між діагоналями рівних бічних граней, які проведено з однієї вершини верхньої основи, дорівнює $90°$. Обчисліть площу бічної поверхні призми.
4. Площі бічних граней правильної трикутної призми дорівнюють 13 см^2, 14 см^2, 15 см^2, а бічне ребро призми дорівнює l. Обчисліть площу повної поверхні призми.
5. Площа бічної поверхні правильної чотирикутної призми дорівнює 288 см^2. Обчисліть площу повної поверхні призми, якщо її бічне ребро удвічі більше за сторону основи.

Варіант 2

1. Основою прямої призми є трикутник зі сторонами 3 см, 4 см, 5 см. Висота призми дорівнює середньому арифметичному сторін основи. Обчисліть площу повної поверхні призми.
2. Діагональ бічної грані правильної трикутної призми дорівнює l і утворює з площиною основи кут α. Знайдіть площу бічної поверхні призми.
3. Основою прямої призми є рівнобедрений прямокутний трикутник, катет якого дорівнює $2\sqrt{2}$ см. Кут між діагоналями рівних бічних граней, які проведено з однієї вершини верхньої основи, дорівнює $60°$. Обчисліть площу бічної поверхні призми.
4. Площі бічних граней правильної трикутної призми дорівнюють 9 см^2, 10 см^2, 17 см^2, а бічне ребро призми дорівнює l. Обчисліть площу повної поверхні призми.
5. Площа бічної поверхні правильної трикутної призми дорівнює 324 см^2. Обчисліть площу повної поверхні призми, якщо сторона її основи втричі менша за бічне ребро.

УРОК № 23
ПАРАЛЕЛЕПІПЕД

Мета: домогтися засвоєння означень:

- ✓ паралелепіпеда;
- ✓ прямого і похилого паралелепіпеда; домогтися засвоєння властивостей паралелепіпеда. Сформувати вміння розв'язувати задачі на застосування цих понять та властивостей.

Тип уроку: засвоєння знань, формування вмінь.

Наочність та обладнання: конспект «Паралелепіпед», моделі паралелепіпедів.

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Учитель збирає на перевірку зошити із виконаною самостійною роботою. У разі необхідності учні отримують правильні розв'язання цих вправ для самостійного опрацювання вдома.

III. Формулювання мети й завдань уроку

Учитель пропонує учням назвати окремий вид призми, зауваживши, що цей многогранник добре відомий їм із курсу математики попередніх класів і є найпоширенішим із многогранників, які зустрічаються в навколишньому середовищі та побуті. Учні, скоріше за все, здогадаються, що мова йде про паралелепіпед (принаймні про прямокутний паралелепіпед). У разі, якщо виникнуть утруднення, можна показати учням модель паралелепіпеда. Тоді вчитель створює проблемну ситуацію: пропонує учням сформулювати строге означення паралелепіпеда та назвати всі його властивості, адже досі цей многогранник розглядався лише на підставі наочного уявлення. Після цього вчитель повідомляє, що вивчення означення паралелепіпеда та дослідження його властивостей є основним завданням уроку.

IV. Актуалізація опорних знань

Фронтальне опитування

1. Сформулюйте означення паралелограма.
2. Сформулюйте ознаку паралелограма.
3. Сформулюйте властивість діагоналей паралелограма.
4. Сформулюйте властивості протилежних сторін і кутів паралелограма.
5. Один із кутів паралелограма дорівнює $50°$. Знайдіть величини решти кутів паралелограма.
6. У паралелограмі $ABCD$ кут B — тупий. Яка з діагоналей паралелограма більша? Відповідь обґрунтуйте.
7. Наведіть формулу, яка пов’язує сторони і діагоналі паралелограма.
8. Сформулюйте ознаку паралельності площин.

V. Засвоєння знань

План вивчення теми

1. Означення паралелепіпеда. Види паралелепіпедів.
2. Властивості граней паралелепіпеда.
3. Властивості діагоналей паралелепіпеда. Центр симетрії паралелепіпеда.

Учителеві слід звернути увагу учнів на те, що властивості паралелепіпедів подібні до властивостей паралелограмів. Доведення теорем, які виражають властивості паралелепіпедів, можна запропонувати учням розглянути самостійно за підручником. Попередньо можна обговорити питання: для яких двох протилежних граней, про які йдеться в теоремі 1, факт їх рівності вже встановлено раніше? (Звичайно, для основ: для них твердження теореми випливає з означення призми).

Залишається розглянути дві пари протилежних бічних граней. Для доведення їх рівності традиційно використовують означення та властивості паралелограма, ознаку паралельності площин, означення паралельного перенесення.

Доведення твердження теореми 2 можна запропонувати учням як задачу: «Доведіть, що через середину однієї з діагоналей паралелепіпеда — точку O, проходить решта діагоналей паралелепіпеда і ділиться цією точкою навпіл». Для доведення використовують властивості діагоналей паралелограма.

Також доречно звернути увагу учнів на те, що 12 ребер паралелепіпеда розбиваються на четвірки паралельних між собою ребер однакової довжини і за основу паралелепіпеда можна вибрати будь-які протилежні грані. За такого вибору основ прямий паралелепіпед може стати похилим.

Конспект 18

Паралелепіпед

1. Паралелепіпедом називають призму, основою якої є паралелограм.

Паралелепіпед, бічні ребра якого перпендикулярні до площини основи, називають прямим паралелепіпедом.

Якщо бічні грані паралелепіпеда не перпендикулярні до площини основи, то паралелепіпед називають похилим.

Зверніть увагу!

Усі грані похилого паралелепіпеда — паралелограми (тому будь-яку грань паралелепіпеда можна вважати його основою).

Бічні грані прямого паралелепіпеда — прямокутники, а основи — паралелограми.

Грані паралелепіпеда, які не мають спільних вершин, називають протилежними.

2. Теорема 1. Протилежні грані паралелепіпеда паралельні й рівні.

3. Теорема 2. Діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці і точкою перетину діляться навпіл.

Наслідок. Точка перетину діагоналей паралелепіпеда є центром його симетрії

VI. Формування вмінь

Виконання усних вправ

1. Назвіть які-небудь предмети побуту, які мають форму похилого паралелепіпеда. Чому такі предмети зустрічаються рідко?

2. Чи можна, розглядаючи одну й ту саму модель паралелепіпеда, стверджувати, що він прямий і що він похилий? Проілюструйте відповідь на моделі паралелепіпеда.

Виконання графічних вправ

1. Точки M і N належать відповідно ребрам BB_1 і CC_1 паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте відрізок, симетричний відрізку MN відносно точки O — середини діагоналі BD_1.
2. Побудуйте кут, симетричний куту DAB паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ відносно точки O — середини діагоналі A_1C.

Виконання письмових вправ

1. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 3 см і 4 см і утворюють кут $120°$, більша діагональ паралелепіпеда дорівнює $\sqrt{65}$ см. Знайдіть довжини більшого бічного ребра і меншої діагоналі паралелепіпеда.
2. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 4 см і 6 см, а кут між ними — $60°$. Діагональ більшої бічної грані дорівнює 10 см. Обчисліть площу повної поверхні паралелепіпеда.
3. Основою прямого паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є паралелограм зі сторонами $AB = 3$ см, $BC = 2$ см і кутом B, що дорівнює $120°$. Знайдіть кут між діагоналями AC_1 і BD_1.
4. У прямому паралелепіпеді сторони основ дорівнюють $2\sqrt{2}$ см і 5 см і утворюють кут $45°$. Менша діагональ паралелепіпеда дорівнює 7 см. Обчисліть площу повної поверхні паралелепіпеда.
5. Доведіть, що у будь-якому паралелепіпеді сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів усіх його ребер.

Запропоновані завдання є типовими задачами для відпрацьовування означення та властивостей паралелепіпеда і його елементів. У письмових задачах № 1 і 4 мова йде про більшу або меншу діагональ паралелепіпеда. Слід звернути увагу учнів на те, що, по-перше, більшою діагоналлю прямого паралелепіпеда є та, яка проектується на більшу діагональ основи. По-друге, діагоналі паралелепіпеда, що проектуються на одну й ту саму діагональ паралелограма, рівні. Отже, чотири діагоналі прямого паралелепіпеда розбиваються на дві пари рівних діагоналей. Тому під час розв'язування задач № 1 і 4 необхідно перш за все з'ясувати, яка з діагоналей паралелепіпеда є більшою чи меншою.

Також під час розв'язування запропонованих задач використовується багато планіметричного матеріалу. Крім означення, ознаки та властивостей паралелепіпеда та його елементів, які були розглянуті на етапі актуалізації опорних знань і вмінь, це співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника, теорема косинусів, формули для обчислення площ паралелограма і прямокутника. Якщо є потреба, залежно від рівня підготовленості учнів учитель може включити ці питання для обговорення на етапі актуалізації опорних знань або безпосередньо перед розв'язуванням задач.

VII. Підсумки уроку

Контрольні запитання

1. Сформулюйте означення паралелепіпеда.
2. Сформулюйте основні властивості паралелепіпеда.
3. Який паралелепіпед називають похилим; прямим?
4. Укажіть, які з наведених тверджень правильні:

1) бічне ребро паралелепіпеда перпендикулярне до діагоналей основи;
2) у прямому паралелепіпеді бічне ребро перпендикулярне до сторін основи;
3) усі діагоналі прямого паралелепіпеда рівні.

VIII. Домашнє завдання

Вивчити зміст понять, розглянутих на уроці.

Виконати вправи.

1. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 3 см і 4 см і утворюють кут $120°$, бічне ребро дорівнює $2\sqrt{3}$ см. Знайдіть довжини діагоналей паралелепіпеда.
2. Основою прямого паралелепіпеда є ромб із гострим кутом $60°$ і більшою діагоналлю, що дорівнює $6\sqrt{3}$ см, менша діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут $45°$. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.
3. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 8 см і 10 см, одна з діагоналей основи дорівнює 6 см, площа меншого діагонального перерізу — 36 см^2. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.
4. Основою прямого паралелепіпеда є ромб із гострим кутом β. Діагональ бічної грані нахилена до площини основи під кутом α, а площа цієї грані дорівнює Q. Знайдіть площу повної поверхні паралелепіпеда.

УРОК № 24
ПРЯМОКУТНИЙ ПАРАЛЕЛЕПІПЕД. КУБ

Мета: сформувати поняття:
- ✓ прямокутного паралелепіпеда;
- ✓ лінійних вимірів прямокутного паралелепіпеда;
- ✓ куба.

Домогтися засвоєння властивостей діагоналей прямокутного паралелепіпеда. Сформувати вміння розв'язувати задачі на використання цих означень і властивостей.

Тип уроку: засвоєння знань, формування вмінь.

Наочність та обладнання: конспект «Прямокутний паралелепіпед. Куб», моделі прямокутних паралелепіпедів, куба.

Хід уроку

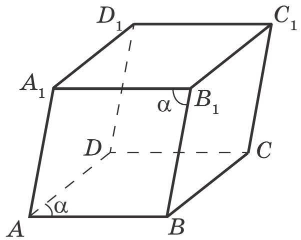
I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Перевірити правильність розв'язання домашніх завдань можна за зразками, заздалегідь заготовленими вчителем або виконаними учнями, які мають високий рівень навчальних досягнень. Рівень засвоєння теоретичного матеріалу можна перевірити шляхом виконання тестової роботи, яка перевіряється і обговорюється одразу після виконання.

Тестова робота



Усі грані похилого паралелепіпеда — рівні ромби зі стороною a і гострим кутом α.

1. Яке з наведених тверджень правильне?
   А) Плоскі кути кожного тригранного кута паралелепіпеда дорівнюють α;
   Б) усі двогранні кути, утворені гранями паралелепіпеда, рівні;
   В) усі бічні ребра утворюють рівні кути з площиною основи;
   Г) одне з бічних ребер утворює з площиною основи кут α.
2. Якій із наведених величин дорівнює площа бічної поверхні паралелепіпеда?
   А) $4a^2$; Б) $4a^2 \sin\alpha$; В) $4a^2 \cos\alpha$; Г) $6a^2 \sin\alpha$.
3. Якій із наведених величин дорівнює площа повної поверхні паралелепіпеда?
   А) $6a^2 \cos\alpha$; Б) $4a^2 \sin\alpha$; В) $6a^2 \sin\alpha$; Г) $6a^2$.

4. Яке з наведених тверджень неправильне?
   А) Трикутник BDA_1 — рівносторонній;
   Б) трикутник A_1BC_1 — рівносторонній;
   В) $AC^2 = 2a^2 + 2a^2 \cos\alpha$; Г) $BD^2 = 2a^2 - 2a^2 \cos\alpha$.

III. Формулювання мети й завдань уроку

Як і на попередньому уроці, можна звернутися до власного досвіду учнів і провести бесіду, в ході якої з'ясувати, що найпоширенішим з усіх видів паралелепіпедів є прямокутний паралелепіпед і його різновид — куб, про які учні мають наочне уявлення. Отже, вивчення строгих означень прямокутного паралелепіпеда і куба та дослідження їх властивостей є основним завданням уроку.

IV. Актуалізація опорних знань

Виконання усних вправ

1. Сторони прямокутника дорівнюють a і b. Чому дорівнює діагональ прямокутника?
2. Діагональ прямокутника дорівнює d, а одна зі сторін — a. Чому дорівнює друга сторона прямокутника?
3. Чому дорівнює діагональ квадрата зі стороною a?
4. Чому дорівнює сторона квадрата з діагоналлю d?

V. Засвоєння знань

План вивчення теми

1. Означення прямокутного паралелепіпеда.
2. Просторова теорема Піфагора (про квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда).
3. Означення куба.

Конспект 19

Прямокутний паралелепіпед. Куб

1. Прямий паралелепіпед, основою якого є прямокутник, називають прямокутним паралелепіпедом.

Усі грані прямокутного паралелепіпеда — прямокутники.

Усі діагоналі прямокутного паралелепіпеда рівні.

Довжини непаралельних ребер прямокутного паралелепіпеда називають його лінійними вимірами. У прямокутному паралелепіпеді три лінійних виміри.

2. Просторова теорема Піфагора. Квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів його вимірів.

3. Кубом називають прямокутний паралелепіпед, у якому всі ребра рівні

Учителеві слід звернути увагу учнів, що серед довільних паралелепіпедів прямокутні виділяються двома вимогами: 1) паралелепіпед має бути прямим; 2) його основою має бути прямокутник. За основу прямокутного паралелепіпеда можна взяти будь-яку його грань. Перш ніж доводити теорему про квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда, можна запропонувати учням обчислювальну задачу: «Знайдіть діагональ прямокутного паралелепіпеда, якщо його виміри дорівнюють 2 см, 3 см і 6 см». Розв'язання цієї задачі підкаже спосіб доведення теореми.

Оскільки теоретичний матеріал, що розглядається на уроці, не є складним, викладення нового матеріалу можна провести у вигляді фронтальної бесіди.

VI. Формування вмінь

Виконання усних вправ

1. Чи правильно що терміни «правильна чотирикутна призма» і «прямокутний паралелепіпед» означають одне й те саме?
2. Знайдіть діагональ прямокутного паралелепіпеда, якщо його виміри дорівнюють 6 см, 6 см, і 7 см.
3. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює 3 см, а два виміри дорівнюють 1 см і 2 см. Знайдіть третій вимір цього прямокутного паралелепіпеда.
4. Чи правильне означення: «Кубом називають правильну чотирикутну призму, висота якої дорівнює стороні основи»?
5. Не використовуючи рисунка, знайдіть:
   а) ребро куба, якщо його діагональ дорівнює 9 см;
   б) площу діагонального перерізу куба, якщо його ребро дорівнює 5 см;
   в) площу однієї грані куба, якщо його діагональ дорівнює 6 см;
   г) площу повної поверхні куба, якщо діагональ його грані дорівнює 4 см;
   д) діагональ грані куба, якщо площа повної поверхні куба дорівнює 3 см^2;
   е) площу повної поверхні куба, якщо його діагональ дорівнює 13 см.
6. Площа поверхні куба дорівнює 24 см^2. Чому дорівнює ребро цього куба?

Виконання письмових вправ

1. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 4 см і 6 см, а бічне ребро — 12 см. Знайдіть діагоналі паралелепіпеда і кут нахилу діагоналі до площини основи.

2. Знайдіть площу діагонального перерізу прямокутного паралелепіпеда, висота якого дорівнює 12 см, а сторони основи — 8 см і 6 см.
3. Знайдіть площу повної поверхні прямокутного паралелепіпеда, якщо його виміри дорівнюють 10 см, 22 см і 16 см.
4. Площа діагонального перерізу прямокутного паралелепіпеда дорівнює 35 см^2. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда, якщо сторони його основи дорівнюють 3 см і 4 см.
5. У прямокутному паралелепіпеді діагональ d утворює з площиною основи кут α. Кут між діагоналлю основи та її стороною дорівнює β. Обчисліть площу бічної поверхні паралелепіпеда.
6. Доведіть просторову теорему Піфагора, використовуючи метод координат.

Виконання усних та письмових вправ, що винесені на урок, має на меті:

- ✓ домогтися розуміння учнями вивчених на уроці понять прямокутного паралелепіпеда, куба та їх елементів;
- ✓ сформувати вміння застосовувати до розв'язування задач формули, що пов'язують діагональ прямокутного паралелепіпеда та його виміри, а також діагональ куба та його ребра;
- ✓ закріпити вміння обчислювати площі бічної та повної поверхонь призми, окремим видом якої є прямокутний паралелепіпед;
- ✓ повторити планіметричний матеріал, а саме: властивості прямокутника та квадрата, теорему Піфагора, співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника.

VII. Підсумки уроку

Виконання усних вправ

Виміри прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 8 см, 9 см і 12 см. Знайдіть:

а) довжину діагоналі паралелепіпеда;
б) довжину діагоналі найбільшої грані;
в) площу найменшої грані;
г) площу повної поверхні паралелепіпеда.

VIII. Домашнє завдання

Вивчити зміст понять, розглянутих на уроці.

Виконати вправи.

1. У прямокутному паралелепіпеді сторони основи дорівнюють 7 см і 24 см, а висота паралелепіпеда дорівнює 8 см. Знайдіть площу діагонального перерізу паралелепіпеда.

2. Ребра прямокутного паралелепіпеда відносяться як 3:7:8, площа повної поверхні дорівнює 808 $см^2$. Знайдіть довжину ребер.
3. У прямокутному паралелепіпеді бічне ребро дорівнює 5 см, площа діагонального перерізу — 205 $см^2$, а площа основи дорівнює 360 $см^2$. Знайдіть сторони основи.
4. У прямокутному паралелепіпеді діагональ d нахилена до площини основи під кутом α. Кут між діагоналями основи дорівнює β. Знайдіть площу бічної поверхні паралелограма.

УРОК № 25
ПІРАМІДА. ПЛОЩІ БІЧНОЇ ТА ПОВНОЇ ПОВЕРХОНЬ ПІРАМІДИ

Мета: сформувати поняття:
- ✓ піраміди;
- ✓ основи, вершини, бічних ребер, висоти піраміди;
- ✓ площі бічної та повної поверхонь піраміди.

Сформувати вміння:
- ✓ виконувати зображення піраміди;
- ✓ знаходити елементи піраміди;
- ✓ обчислювати площі бічної та повної поверхонь піраміди.

Тип уроку: засвоєння знань, формування вмінь.

Наочність та обладнання: конспект «Піраміда. Площі бічної та повної поверхонь піраміди», моделі пірамід.

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Учитель збирає зошити з метою перевірки якості виконання домашньої роботи. У разі необхідності учні отримують правильні розв'язання цих вправ для самостійного опрацювання вдома.

Якість засвоєння теоретичного матеріалу можна перевірити за результатами виконання тестової роботи, яка перевіряється і обговорюється одразу після виконання.

Тестова робота

1. Яка з наведених властивостей куба не є властивістю будь-якого прямокутного паралелепіпеда?
А) Діагоналі куба перетинаються в одній точці;
Б) точка перетину діагоналей куба є його центром симетрії;

В) усі ребра куба рівні;
Г) протилежні грані куба рівні.
2. Яка з наведених властивостей прямокутного паралелепіпеда не є властивістю будь-якого прямого паралелепіпеда?
А) Усі двогранні кути прямокутного паралелепіпеда рівні;
Б) протилежні грані прямокутного паралелепіпеда паралельні й рівні;
В) усі бічні грані прямокутного паралелепіпеда є прямокутниками;
Г) усі бічні ребра прямокутного паралелепіпеда перпендикулярні до площини основи.

III. Формулювання мети й завдань уроку

На цьому етапі уроку вчитель знову спирається на життєвий досвід учнів і пропонує пригадати, які ще види многогранників їм відомі, крім тих, означення та властивості яких вивчалися протягом декількох останніх уроків. Напевно, учні дадуть відповідь, що такими многогранниками є піраміди. У випадку, якщо учні не зможуть дати відповіді на це запитання, можна показати моделі пірамід або навести приклади предметів із навколишнього середовища, які мають форми пірамід. Потім учитель повідомляє, що метою уроку є вивчення означення піраміди та її елементів, а також формування вміння виконувати зображення піраміди.

IV. Актуалізація опорних знань

Фронтальне опитування

1. Як на площині зображують рівносторонній, рівнобедрений, прямокутний трикутники?
2. Що є зображенням паралелограма (прямокутника, ромба, квадрата)?
3. Що є зображенням трапеції (рівнобічної, прямокутної)?
4. Що є зображенням чотирикутника (не паралелограма і не трапеції)?
5. Що є зображенням правильного шестикутника?

V. Засвоєння знань

План вивчення теми

1. Означення піраміди, її основи і вершини.
2. Означення бічних граней, бічних ребер, висоти піраміди.
3. Означення діагонального перерізу піраміди.
4. Означення площі бічної та повної поверхонь піраміди.
5. Правила зображення піраміди.

Конспект 20

Піраміда. Площі бічної та повної поверхонь піраміди

1. Пірамідою називають многогранник, що складається з плоского многокутника (основи піраміди), точки, яка не лежить у площині основи (вершини піраміди), і всіх відрізків, що сполучають вершину піраміди з точками основи.

Піраміду, основою якої є n-кутник, називають n-кутною.

Трикутну піраміду інакше називають тетраедром.

2. Відрізки, які сполучають вершину піраміди з вершинами її основи, називають бічними ребрами піраміди.

Трикутники, вершинами яких є вершина піраміди й дві сусідні вершини її основи, називають бічними гранями.

Висотою піраміди називають перпендикуляр, проведений із вершини піраміди до площини її основи.

3. Переріз піраміди площиною, яка проходить через бічне ребро і діагональ основи піраміди, називають діагональним перерізом піраміди.

4. Площею бічної поверхні піраміди називають суму площ її бічних граней, а площею повної поверхні — суму площ основи й бічної поверхні: $S_{\text{повн.}} = S_{\text{осн.}} + S_{\text{бічн.}}$.

5. Правила зображення піраміди

1) Зобразити основу піраміди.

2) Зобразити висоту піраміди у вигляді вертикального відрізка. Кінець відрізка, що не належить основі піраміди, є висотою піраміди.

3) Сполучити відрізками (бічними ребрами) вершину піраміди з вершинами основи.

Зауваження. Невидимі ребра піраміди зображають пунктирними лініями

Зауважимо, що наведений підхід до означення піраміди є, так би мовити, традиційним і його дотримується більшість авторів, хоча в сучасних підручниках існує декілька підходів до введення поняття піраміди (наприклад, «Пірамідою називають конус, в основі якого лежить многокутник», Афанасьєва О. М., Бродський Я. С., Павлов О. Л., Сліпенко А. К. Геометрія. 10–11 класи).

Учитель може викласти матеріал уроку близько до тексту підручника або запропонувати учням самостійно опрацювати матеріал за поданим планом із подальшим складанням конспекту. У разі самостійного вивчення учнями нового матеріалу по закінченні роботи слід перевірити складені конспекти та за необхідності провести корекцію знань.

VI. Формування вмінь

Виконання усних вправ

1. Скільки n-кутна піраміда має:
а) граней; б) ребер?

2. Якою геометричною фігурою є кожний із діагональних перерізів піраміди?

3. Кожне ребро тетраедра дорівнює 4 см. Чому дорівнює площа повної поверхні тетраедра?

Виконання графічних вправ

1. Побудуйте зображення тетраедра.

2. Побудуйте зображення трикутної піраміди, основою якої є рівносторонній трикутник, а основою висоти — точка перетину його висот.

3. Побудуйте зображення трикутної піраміди, основою якої є прямокутний трикутник, а основою висоти — вершина прямого кута цього трикутника.

4. Побудуйте зображення трикутної піраміди, основою якої є прямокутний трикутник, а основою висоти — центр кола, описаного навколо цього трикутника.

5. Побудуйте зображення чотирикутної піраміди, основою якої є прямокутник, а основою її висоти — точка перетину діагоналей прямокутника.

6. Побудуйте зображення чотирикутної піраміди, основою якої є квадрат, а основою її висоти — одна з вершин основи.

7. Побудуйте зображення трикутної піраміди, основою якої є рівнобедрений трикутник із тупим кутом при вершині, а основою висоти піраміди — основа висоти, проведена до бічної сторони трикутника.

Виконання письмових вправ

1. Основою піраміди є прямокутник, одне з бічних ребер піраміди перпендикулярне до площини основи. Доведіть, що всі бічні грані піраміди є прямокутними трикутниками.

2. Основою чотирикутної піраміди є прямокутник зі сторонами 12 см і 30 см. Основою висоти піраміди є точка перетину діагоналей прямокутника. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо її висота дорівнює 8 см.

3. Основою піраміди є рівносторонній трикутник зі стороною 4 см. Одне з бічних ребер піраміди перпендикулярне до площини основи, а два інших — нахилені до площини основи під кутом $45°$. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

4. Основою піраміди $DABC$ є рівносторонній трикутник ABC. Грані DAC і DAB перпендикулярні до площини основи, а грань DBC нахилена до неї під кутом $30°$. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо її висота дорівнює 6 см.
5. Основою піраміди є квадрат зі стороною 10 см, дві бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи. Знайдіть площу повної поверхні піраміди, якщо грані, перпендикулярні до площини основи, є рівнобедреними трикутниками.

Виконання запропонованих вправ сприяє засвоєнню поняття піраміди та її елементів, а також обчислення площ бічної та повної поверхонь піраміди. Оскільки побудова зображення піраміди зазвичай викликає в учнів утруднення, то особливу увагу слід приділити задачам на побудову зображення пірамід. Можливо, учні не встигнуть виконати за урок усі запропоновані вправи. У цьому випадку частину вправ можна використати як індивідуальні завдання для учнів, що мають достатній і високий рівні навчальних досягнень.

VII. Підсумки уроку

Контрольні запитання

1. Сформулюйте означення піраміди (основи, вершини, бічних граней, ребер, висоти).
2. Чи існує піраміда, всі грані якої рівні?
3. Чи існує піраміда, яка не має жодного діагонального перерізу?
4. Чи існує піраміда, основа висоти якої розміщена поза площиною основи піраміди?

VIII. Домашнє завдання

Вивчити зміст понять, розглянутих на уроці.
Виконати вправи.

1. Основою піраміди є прямокутник, висота піраміди проходить через точку перетину діагоналей основи. Доведіть, що бічні ребра піраміди утворюють із площиною основи рівні кути.
2. Основою піраміди є квадрат зі стороною $6\sqrt{2}$ см, а основою висоти піраміди — точка перетину діагоналей квадрата. Знайдіть довжину бічних ребер піраміди, якщо її висота дорівнює 8 см.
3. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник, бічна сторона якого дорівнює 10 см, а основа — 12 см. Висоти всіх бічних граней дорівнюють 5 см. Обчисліть площу повної поверхні піраміди.
4. Основою піраміди є прямокутний трикутник із катетом a і прилеглим кутом α. Дві бічні грані, що містять катети цього трикутника, перпендикулярні до площини основи, а третя нахилена до неї під кутом β. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

УРОК № 26
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Мета: продовжити роботу над засвоєнням учнями поняття піраміди та її елементів, над формуванням уміння учнів обчислювати площі бічної та повної поверхонь піраміди; доповнити знання учнів через ознайомлення з окремими видами пірамід, а саме:

- ✓ пірамідами, в яких висота належить одній або двом бічним граням;
- ✓ пірамідами, в яких основою висоти є центр кола, описаного навколо основи піраміди;
- ✓ пірамідами, в яких основою висоти є центр кола, вписаного в основу піраміди.

Тип уроку: застосування знань, умінь, навичок.
Наочність та обладнання: конспект «Окремі види пірамід».

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Перевірку якості виконання письмових вправ домашнього завдання проводимо за короткими записами розв'язань. Залежно від рівня математичної підготовки учнів розв'язання записані на дошці учнями або виконані вчителем у формі роздавального матеріалу для індивідуальної роботи учнів.

Перевірку засвоєння учнями теоретичного матеріалу проводимо у формі фронтальної бесіди.

III. Формулювання мети й завдань уроку

Для створення відповідної мотивації роботи учнів можна запропонувати задачу.

Задача. Основою піраміди є прямокутник зі сторонами 6 см і 8 см. Кожне бічне ребро піраміди дорівнює 13 см. Обчисліть висоту піраміди.

Для того щоб знайти довжину висоти піраміди, необхідно її побудувати. Виникає питання: де лежить основа висоти піраміди? Отже, завданням уроку є вивчення окремих видів піраміди з метою визначення положення висоти (або основи висоти) піраміди.

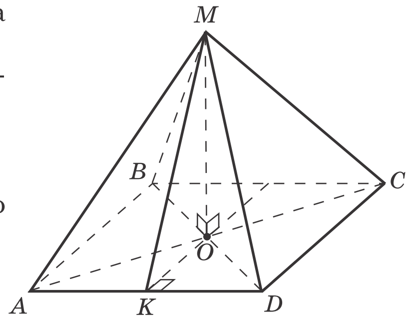
IV. Актуалізація опорних знань

Фронтальне опитування

1. Сформулюйте ознаки рівності прямокутних трикутників.
2. Сформулюйте теорему про три перпендикуляри.
3. Сформулюйте означення кута між прямою і площиною.
4. Сформулюйте означення кута між площинами.
5. Скориставшися *рисунком*, укажіть:

   а) кут між бічним ребром MC і площиною основи піраміди;

   б) кут між бічною гранню AMD і основою піраміди.



V. Доповнення знань

План вивчення теми

1. Піраміди, у яких висота належить одній або двом бічним граням.
2. Піраміди, у яких основою висоти є центр кола, описаного навколо основи піраміди.
3. Піраміди, у яких основою висоти є центр кола, вписаного в основу піраміди.

Розв'язування стереометричних задач на піраміди зазвичай розпочинається з побудови рисунка. У багатьох випадках для правильного відображення на рисунку положення висоти піраміди необхідно провести попередній аналіз умови задачі, з'ясувати, які властивості має піраміда. Властивості піраміди, від яких залежить положення її висоти, стисло описано в конспекті 21.

Конспект 21

Окремі види пірамід

1. Якщо в піраміді одна бічна грань перпендикулярна до площини основи, то висота піраміди належить площині цієї грані та є перпендикуляром, проведеним із вершини піраміди до прямої перетину площини цієї грані з площиною основи.

Зауваження. Основа висоти піраміди може лежати як на стороні основи піраміди, так і на її продовженні.

2. Якщо дві бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи, то пряма їх перетину містить висоту піраміди.

3. Якщо в піраміді виконується принаймні одна з умов:

1) усі бічні ребра рівні;

2) усі бічні ребра утворюють однакові кути з площиною основи;

3) усі бічні ребра утворюють однакові кути з висотою піраміди,

то основою висоти є центр кола, описаного навколо основи піраміди.

Зауваження. Має місце обернене твердження.

4. Якщо висота лежить усередині піраміди і виконується принаймні одна з умов:

1) усі двогранні кути при основі піраміди рівні;

2) усі висоти бічних граней, проведені з вершини піраміди, рівні;

3) усі висоти бічних граней, проведені з вершини піраміди, утворюють рівні кути з висотою піраміди;

4) висота піраміди утворює однакові кути з площинами всіх бічних граней,

то основою висоти піраміди є центр кола, вписаного в основу піраміди

Залежно від рівня підготовленості учнів новий матеріал можна викласти у формі лекції або фронтальної бесіди. Доцільно запропонувати учням самостійно довести зазначені твердження. Або довести по одному з тверджень, що наведені в пунктах 3 і 4 конспекту 21, а потім запропонувати учням самостійно з'ясувати, у яких ще випадках основа висоти піраміди є центром кола, описаного навколо основи, а в яких — центром кола, вписаного в основу.

VI. Формування вмінь

Виконання усних вправ

1. Висота піраміди дорівнює 6 см, а всі бічні ребра рівні й дорівнюють 10 см. Чому дорівнює радіус кола, описаного навколо основи піраміди?
2. Висота піраміди дорівнює 5 см, а всі бічні грані нахилені до площини основи під кутом $45°$. Чому дорівнює радіус кола, вписаного в піраміду?
3. Усі бічні ребра трикутної піраміди утворюють із площиною її основи рівні кути, а одна з бічних граней піраміди перпендикулярна до площини основи. Визначте вид трикутника, що лежить в основі піраміди.
4. Основою піраміди є прямокутник зі сторонами 6 см і 8 см. Кожне бічне ребро піраміди дорівнює 13 см. Обчисліть висоту піраміди.

Виконання письмових вправ

1. Основою трикутної піраміди є рівносторонній трикутник зі стороною 1 см. Одне з бічних ребер піраміди перпендикулярне до площини основи, а протилежна до цього ребра бічна грань утворює з площиною основи кут $60°$. Знайдіть висоту піраміди.
2. Основою піраміди є прямокутний трикутник із кутом $30°$ і протилежним йому катетом, що дорівнює 30 см. Усі бічні ребра нахилені до площини основи під кутом $60°$. Знайдіть висоту піраміди.
3. Основою піраміди є трикутник із кутом $150°$. Бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом $30°$, а висота піраміди дорівнює 6 см. Знайдіть сторону трикутника, що протилежна поданому куту.
4. Основою піраміди є рівнобічна трапеція, бічна сторона якої дорівнює меншій основі і дорівнює a. Кут при більшій основі трапеції дорівнює $60°$. Бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом $45°$. Знайдіть висоту піраміди.
5. Знайдіть висоту піраміди, в основі якої лежить трикутник, зі сторонами 5 см, 5 см, 6 см, а всі двогранні кут при основі дорівнюють по $60°$.
6. Основою чотирикутної піраміди є ромб зі стороною a. Бічні грані піраміди нахилені до площини основи під кутом α. Висота піраміди дорівнює H. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.
7. Основою піраміди є прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють $3a$ і $4a$; кожна бічна грань нахилена до площини основи під кутом $60°$. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.
8. Сторони основ трикутної піраміди дорівнюють 6 см, 10 см, 14 см. Бічні грані нахилені до площини основи під кутом $60°$. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

Вправи, призначені для усного розв'язування, бажано супроводжувати рисунками, виконаними на чернетках або на дошці. Усі запропоновані вправи сприяють формуванню вміння визначати положення висоти піраміди залежно від окремих властивостей піраміди, тому під час їх виконання бажано вимагати від учнів розгорнутих та послідовних пояснень із використанням тверджень, наведених у конспекті 21.

VII. Підсумки уроку

Контрольні запитання

1. Де розміщена основа висоти піраміди, якщо:
а) усі бічні ребра піраміди рівні або нахилені до площини основи під одним кутом;
б) усі бічні ребра утворюють однакові кути з висотою піраміди;
в) усі бічні грані нахилені до площини основи під одним кутом або висоти всіх бічних граней рівні;
г) висота піраміди утворює однакові кути з бічними гранями або висотами бічних граней, проведеними із вершини піраміди;
д) одна бічна грань перпендикулярна до площини основи;
е) дві суміжні бічні грані перпендикулярні?

VIII. Домашнє завдання

Вивчити матеріал, розглянутий на уроці.
Виконати вправи.

1. Основою трикутної піраміди є рівносторонній трикутник зі стороною 7 см. Одне з бічних ребер піраміди перпендикулярне до площини основи, а висота бічної грані, протилежної до цього ребра, дорівнює 4 см. Знайдіть висоту піраміди.
2. Основою піраміди є прямокутний трикутник із кутом $60°$. Бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом $45°$. Висота піраміди дорівнює 10 см. Знайдіть катет, протилежний поданому куту.
3. Основою піраміди є трикутник зі стороною a і протилежним кутом $135°$. Бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом $60°$. Знайдіть висоту піраміди.
4. Основою чотирикутної піраміди є ромб зі стороною a і гострим кутом α. Бічні грані піраміди нахилені до площини основи під кутом β. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.
5. Основою піраміди є рівнобічна трапеція, паралельні сторони якої дорівнюють a і $2a$. Бічні грані піраміди однаково нахилені до площини основи; висота піраміди дорівнює a. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
6. Основою піраміди є квадрат зі стороною a. Дві сусідні бічні грані перпендикулярні до площини основи, а решта дві нахилені до площини основи під кутом $60°$. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

УРОК № 27
ПРАВИЛЬНА ПІРАМІДА. ФОРМУЛА ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩІ БІЧНОЇ ПОВЕРХНІ ПРАВИЛЬНОЇ ПІРАМІДИ

Мета: сформувати поняття правильної піраміди, апофеми правильної піраміди; домогтися засвоєння властивостей правильної піраміди та формули для обчислення площі бічної поверхні правильної піраміди; сформувати вміння розв'язувати задачі на використання поняття правильної піраміди, знаходження її елементів і площ бічної та повної поверхонь.

Тип уроку: засвоєння знань, формування вмінь.

Наочність та обладнання: конспект «Правильна піраміда».

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Оскільки вправи домашньої роботи відтворювали ситуації, аналогічні до розглянутих на попередньому уроці, можна перевірити лише правильність виконання обчислень. Ретельно перевірити виконання домашнього завдання можна лише в учнів, які потребують додаткової педагогічної уваги.

З метою перевірки засвоєння учнями теоретичного матеріалу можна провести дидактичну гру «Вірю — не вірю».

Чи правильно, що:

1) якщо бічні ребра піраміди утворюють рівні кути з висотою піраміди, то основою висоти є центр кола, вписаного в піраміду;
2) якщо висоти всіх бічних граней, проведені з вершини піраміди, рівні, то основою висоти є центр кола, вписаного в піраміду;
3) якщо бічні ребра піраміди рівні і її основою є тупокутний трикутник, то основа висоти лежить поза основою піраміди;
4) якщо бічні ребра піраміди рівні і її основою є прямокутний трикутник, то основа висоти лежить усередині трикутника;
5) якщо бічні ребра піраміди рівні і її основою є прямокутний трикутник, то основою висоти є середина гіпотенузи трикутника;
6) у піраміди може бути дві бічні грані, які перпендикулярні до основи;
7) у піраміди може бути три бічні грані, які перпендикулярні до основи;
8) якщо одна з бічних граней піраміди перпендикулярна до площини основи, то висота піраміди збігається з висотою цієї грані;
9) якщо всі бічні ребра піраміди рівні, то основою висоти піраміди є центр кола, описаного навколо основи піраміди?

III. Формулювання мети й завдань уроку

Створити відповідну мотивацію можна за допомогою проблемної ситуації. Учитель пропонує учням пригадати означення правильної призми і за аналогією сформулювати означення правильної піраміди. Напевне, учні здогадаються,

що основою правильної піраміди є правильний многокутник. Учитель повідомляє, що, крім цієї умови, піраміда має задовольняти ще одну умову і тільки в тому випадку вона буде називатися правильною. Отже, метою уроку є засвоєння означення, властивостей та формули для обчислення площі бічної поверхні правильної піраміди.

IV. Актуалізація опорних знань

Фронтальне опитування

1. Сформулюйте означення правильного многокутника.
2. Що називають центром правильного многокутника?
3. Запишіть формули для обчислення радіусів вписаних і описаних кіл правильного многокутника, якщо таким многокутником є: а) трикутник; б) чотирикутник; в) шестикутник.
4. Як знайти периметр правильного многокутника?
5. Сторона правильного n-кутника дорівнює a. Запишіть формулу для обчислення його площі, якщо: а) $n=3$; б) $n=4$; в) $n=6$.

V. Засвоєння знань

План вивчення теми

1. Означення правильної піраміди.
2. Означення апофеми правильної піраміди.
3. Властивості правильної піраміди.
4. Формула для обчислення площі бічної поверхні правильної піраміди.

Конспект 22

Правильна піраміда

1. Правильною пірамідою називають піраміду, основою якої є правильний многокутник, а основа висоти піраміди є центром цього многокутника.

2. Апофемою бічної грані називають висоту бічної грані, що проведена з вершини піраміди.

3. Властивості правильної піраміди:

1) усі бічні ребра рівні;

2) усі бічні ребра однаково нахилені до площини основи;

3) усі бічні ребра утворюють однакові кути з висотою піраміди;

4) усі апофеми рівні;

5) усі бічні грані є рівними рівнобедреними трикутниками;

6) усі двогранні кути при основі рівні.

4. Площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює добутку півпериметра її основи на апофему: $S_{\text{біч.}} = \dfrac{1}{2}P_{\text{осн.}} \cdot l$

Вивчення нового матеріалу можна провести у формі фронтальної бесіди або запропонувати учням самостійно опрацювати відповідний параграф підручника з подальшим складанням конспекту.

У разі самостійного вивчення учнями нового матеріалу по закінченні роботи слід перевірити складені конспекти та за необхідності провести корекцію знань.

Доцільно обговорити з учнями поняття «центр правильного многокутника», оскільки це поняття надзвичайно важливе для розуміння означення правильної піраміди і до того ж на вивчення теми «Правильні многокутники» в 9 класі було відведено всього одну годину. Також бажано нагадати учням правила зображення пірамід (*див. конспект 20*) і ще раз звернути увагу, що основа висоти є центром її основи, тобто якщо піраміда чотирикутна, то це точка перетину діагоналей паралелограма, який на рисунку є зображенням квадрата; якщо піраміда трикутна, то це точка перетину медіан трикутника; якщо шестикутна, — точка перетину діагоналей шестикутника тощо.

VI. Формування вмінь

Виконання усних вправ

1. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро дорівнює a і утворює з площиною основи кут $45°$. Обчисліть:
   а) висоту піраміди; б) площу основи піраміди;
   в) радіус кола, вписаного в основу піраміди;
   г) радіус кола, описаного навколо основи піраміди;
   д) апофему піраміди.
2. Радіус кола, вписаного в основу правильної трикутної піраміди, дорівнює r, а апофема утворює з площиною основи кут $60°$. Обчисліть:
   а) висоту піраміди; б) апофему піраміди;
   в) радіус кола, вписаного в основу піраміди;
   г) бічне ребро піраміди; д) площу основи піраміди.

Виконання письмових вправ

1. Площа бічної грані правильної чотирикутної піраміди дорівнює 48 см^2, а периметр основи — 12 см. Обчисліть апофему піраміди.
2. Бічне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює l, а плоский кут при її вершині — α. Обчисліть площу основи піраміди.
3. Обчисліть площу бічної поверхні правильної трикутної піраміди, якщо її висота дорівнює 4 см, апофема — 8 см.

4. Радіус кола, вписаного в основу правильної чотирикутної піраміди, дорівнює 3 см, а кут між площиною основи і площиною бічної грані — $60°$. Обчисліть площу бічної поверхні піраміди.
5. Обчисліть площу повної поверхні правильної трикутної піраміди, висота основи якої дорівнює 6 см, а кут між площиною основи і площиною бічної грані — $60°$.
6. У правильній чотирикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює α. Обчисліть площу бічної поверхні піраміди, якщо радіус кола, описаного навколо бічної грані, дорівнює R.

Запропоновані вправи є типовими для формування поняття правильної піраміди та її елементів і засвоєння формули для обчислення площ бічної та повної поверхонь піраміди. Під час виконання усних вправ учні відпрацьовують поняття правильної піраміди, її елементів і співвідношень між ними, а також повторюють планіметричний матеріал: співвідношення між сторонами та кутами прямокутного трикутника, формули для радіусів вписаних та описаних кіл правильних многокутників, формули для обчислення площ квадрата та правильного трикутника. Виконання усних вправ є підготовкою до розв'язування більш складних письмових вправ.

VII. Підсумки уроку

Контрольні запитання

1. Яку піраміду називають неправильною?
2. Чи можна піраміду назвати правильною, якщо:
   а) її основою є квадрат, а основою висоти — вершина квадрата;
   б) її основою є прямокутник, а основою висоти — точка перетину діагоналей прямокутника;
   в) її основою є рівносторонній трикутник, а основою висоти — точка перетину медіан трикутника?
3. Запишіть співвідношення між бічним ребром b, апофемою l, радіусами r і R вписаного та описаного кіл основи правильної піраміди.

VIII. Домашнє завдання

Вивчити зміст понять, розглянутих на уроці.

Виконати вправи.

1. Бічною гранню правильної чотирикутної піраміди є правильний трикутник, периметр якого дорівнює 36 см. Обчисліть площу основи піраміди.
2. Кут між бічним ребром і висотою правильної чотирикутної піраміди дорівнює α. Обчисліть довжину бічного ребра, якщо висота піраміди дорівнює H.

3. Обчисліть площу бічної поверхні правильної трикутної піраміди, якщо сторона її основи дорівнює a, а бічне ребро утворює з площиною основи кут $45°$.
4. Обчисліть площу повної поверхні правильної чотирикутної піраміди, діагональ основи якої дорівнює 4 см, а кут між площиною основи і площиною бічної грані дорівнює $45°$.

УРОК № 28 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ (ЗРІЗАНА ПІРАМІДА*)

Мета: працювати над засвоєнням учнями змісту поняття правильної піраміди та її елементів, формули для обчислення площі бічної поверхні правильної піраміди; формувати вміння розв'язувати задачі, що передбачають використання цих понять та формули.

(Сформувати поняття зрізаної піраміди, правильної зрізаної піраміди, формули для обчислення площі бічної поверхні правильної зрізаної піраміди*.)

Тип уроку: застосування знань, засвоєння вмінь та навичок.

Наочність та обладнання: конспект 22, конспект «Зрізана піраміда»*.

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Перевірку якості виконання письмових вправ домашнього завдання проводимо за готовими стислими записами розв'язань. Перевірку засвоєння учнями змісту нового матеріалу попереднього уроку можна провести у формі тестових завдань. Після виконання тестових завдань оголошуємо та обговорюємо правильні відповіді до завдань.

Тестові завдання

Варіант 1

1. У правильній чотирикутній піраміді діагональ основи дорівнює $2\sqrt{2}$ см, а висота — $\sqrt{3}$ см. Чому дорівнює апофема піраміди?
   А) $\sqrt{3}$ см; Б) 2 см; В) $\sqrt{5}$ см; Г) 3 см.
2. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює 4 см і утворює з площиною основи кут $60°$. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
   А) $8\sqrt{15}$ см^2; Б) $10\sqrt{15}$ см^2; В) $12\sqrt{15}$ см^2; Г) $15\sqrt{15}$ см^2.

3. Апофема правильної трикутної піраміди дорівнює 6 см, а плоский кут при вершині — $90°$. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
   А) 96 см^2; Б) 112 см^2; В) 108 см^2; Г) 116 см^2.

Варіант 2

1. У правильній чотирикутній піраміді сторона основи дорівнює 2 см; апофема — $\sqrt{3}$ см. Чому дорівнює висота піраміди?
   А) 2 см; $\sqrt{2}$ см; В) $\sqrt{7}$ см; Г) 3 см.
2. Бічне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює 4 см і утворює з площиною основи кут $60°$. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
   А) 48 см^2; Б) 50 см^2; В) 52 см^2; Г) 54 см^2.
3. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 4 см, а плоский кут при вершині — $60°$. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
   А) $16\sqrt{3}$ см^2; Б) $\frac{16}{\sqrt{3}}$ см^2; В) $8\sqrt{3}$ см^2; Г) $32\sqrt{3}$ см^2.

III. Формулювання мети й завдань уроку

Робота на цьому уроці безпосередньо пов'язана з рівнем знань та вмінь, які учні продемонстрували під час виконання вправ домашнього завдання, виконання тестових завдань, а також — із рівнем підготовленості учнів. Тому на розсуд учителя учні на цьому уроці або продовжують засвоювати вивчений на попередньому уроці матеріал та формують уміння застосовувати його до розв'язування задач, або засвоюють поняття зрізаної піраміди, правильної зрізаної піраміди та формули для обчислення площі бічної поверхні правильної піраміди.

IV. Відтворення та систематизація знань і вмінь

Учням пропонуємо самостійно повторити зміст матеріалу, вивченого на попередньому уроці за змістом конспекту 22.

V. Доповнення знань*

Чинна програма з математики не передбачає вивчення поняття зрізаної піраміди. Але без цього поняття уявлення учнів про піраміду буде неповним. Тому якщо вчитель уважає за доцільне ознайомити учнів із поняттям зрізаної піраміди, то можна провести викладення цього матеріалу у формі лекції, або запропонувати учням опрацювати матеріал самостійно, або організувати вивчення цього матеріалу у вигляді індивідуальної роботи для учнів, які мають достатній та високий рівні навчальних досягнень. У разі самостійної (індивідуальної) роботи з вивчення нового матеріалу учням для опрацювання можна запропонувати опорний конспект.

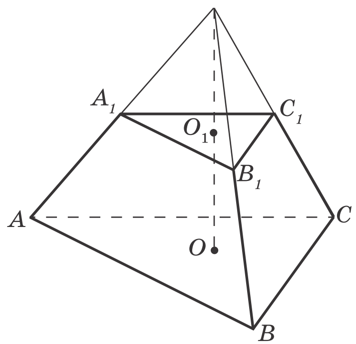
Конспект 23

Зрізана піраміда*

1. Зрізаною пірамідою називають частину піраміди, що міститься між її основою і січною площиною, яка паралельна основі.

Основи зрізаної піраміди — подібні многокутники. Бічні грані зрізаної піраміди — трапеції.

2. Висотою зрізаної піраміди називають перпендикуляр, проведений із якої-небудь точки однієї основи на площину другої основи.



3. Правильною зрізаною пірамідою називають зрізану піраміду, утворену з правильної піраміди січною площиною, проведеною паралельно основі.

4. Властивості правильної зрізаної піраміди:

1) усі бічні ребра рівні;

2) усі апофеми рівні;

3) усі бічні грані є рівними рівнобічними трапеціями;

4) усі двогранні кути при основі рівні.

5. Площу бічної поверхні правильної зрізаної піраміди обчислюють за формулою:

$$S_{\text{бічн.}} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)h,$$

де P_1, P_2 — периметри основ, h — апофема правильної зрізаної піраміди

VI. Формування вмінь, навичок

Виконання письмових вправ

1. Бічне ребро правильної піраміди нахилене до площини основи під кутом α. Відстань від основи висоти піраміди до бічного ребра дорівнює d. Знайдіть бічне ребро піраміди.
2. Відстань від центра основи правильної трикутної піраміди до її бічної грані дорівнює d, бічна грань нахилена до площини основи під кутом α. Знайдіть апофему піраміди.
3. Апофема правильної шестикутної піраміди дорівнює h, а двогранний кут при основі дорівнює $60°$. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

4. Знайдіть висоту правильної трикутної піраміди, якщо сторона її основи дорівнює a, а площа бічної поверхні удвічі більша від площі основи.
5. У правильній чотирикутній піраміді площа бічної поверхні дорівнює $14{,}76$ м^2, а площа повної поверхні — 18 м^2. Знайдіть сторону основи і висоту піраміди.
6. Діагональний переріз правильної чотирикутної піраміди рівновеликий її основі. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо сторона її основи дорівнює a.

7*. Висота правильної зрізаної чотирикутної піраміди дорівнює 7 см. Сторони основ дорівнюють 10 см і 2 см. Знайдіть бічне ребро піраміди.

8*. Знайдіть площу бічної поверхні правильної зрізаної піраміди: а) трикутної; б) чотирикутної; в) шестикутної, якщо бічне ребро дорівнює c, а сторони основ дорівнюють a і b.

9*. Сторони основ правильної трикутної зрізаної піраміди дорівнюють 6 см і 12 см, а висота дорівнює 1 см. Знайдіть площу бічної поверхні цієї зрізаної піраміди.

Для закріплення знань та відпрацювання навичок пропонуємо учням виконати вправи середнього та достатнього рівнів складності на знаходження невідомих елементів правильної піраміди (вправи № 1 і 2) та на обчислення площі поверхні правильної піраміди; причому як на пряме застосування формули для обчислення площі бічної поверхні правильної піраміди (вправа № 3), так і на застосування формул для обчислення площ бічної та повної поверхонь піраміди у зміненій ситуації (вправи № 4–6). Під час розв'язування вправи № 2 необхідно обґрунтувати відстань від центра основи піраміди до бічної грані. Зрозуміло, що можна було б провести перпендикуляр із центра основи до бічної грані, але така побудова не дозволяє визначити особливості розміщення цього перпендикуляра. Необхідно довести, що перпендикуляр до бічної грані правильної піраміди є водночас перпендикуляром до апофеми цієї грані.

Вправи № 7*–9* спрямовані на засвоєння поняття та властивостей зрізаної піраміди, а також на формування вміння обчислювати площу бічної поверхні правильної зрізаної піраміди. Ці вправи є обов'язковими для виконання тільки у тому випадку, якщо на уроці відбулося ознайомлення учнів із поняттям зрізаної піраміди (або для тих учнів, які опрацювали це поняття індивідуально).

VII. Підсумки уроку

Підсумком уроку може бути виділення учнями основних видів задач на застосування вивчених тверджень (класифікацію можна провести за різними критеріями).

VIII. Домашнє завдання

Повторити означення та властивості правильної піраміди, формулу для обчислення площі бічної поверхні правильної піраміди. (Засвоїти поняття зрізаної піраміди*.)

Виконати домашню самостійну роботу.

Умова домашньої самостійної роботи

1. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 3 см, апофема — 1 см. Знайдіть двогранний кут при основі піраміди.

2. Бічна грань правильної трикутної піраміди утворює з площиною основи кут $30°$. Радіус кола, описаного навколо основи піраміди, дорівнює 2 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

3. У правильній чотирикутній піраміді висота утворює з бічною гранню кут α. Відрізок, що сполучає основу висоти із серединою апофеми, дорівнює d. Обчисліть площу повної поверхні піраміди.

4. У правильній чотирикутній піраміді апофема утворює з висотою кут α. Серединний перпендикуляр, проведений до апофеми, перетинає висоту піраміди в точці, віддаленої від вершини піраміди на відстань l. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

5*. Сторони основ правильної трикутної зрізаної піраміди дорівнюють 4 см і 1 см, бічне ребро дорівнює 2 см. Знайдіть висоту піраміди.

6*. У правильній чотирикутній зрізаній піраміді висота дорівнює 2 см, а сторони основ дорівнюють 3 см і 5 см. Знайдіть діагональ цієї зрізаної піраміди.

7*. Сторони основ правильної шестикутної зрізаної піраміди дорівнюють 4 см і 2 см, а висота дорівнює 1 см. Знайдіть площу бічної поверхні цієї зрізаної піраміди.

УРОК № 29
ПРАВИЛЬНІ МНОГОГРАННИКИ

Мета: сформувати поняття:

- ✓ правильного многогранника;
- ✓ правильного тетраедра;
- ✓ правильного гексаедра (куба);
- ✓ правильного октаедра;

- ✓ правильного додекаедра;
- ✓ правильного ікосаедра.

Сформувати вміння розв'язувати задачі, що передбачають використання поняття правильних многогранників.

Тип уроку: засвоєння знань, формування вмінь.

Наочність та обладнання: конспект «Правильні многогранники», моделі правильних многогранників.

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Учитель збирає зошити учнів на перевірку й оцінює домашню самостійну роботу.

III. Формулювання мети й завдань уроку

З метою створення відповідної мотивації вчитель може провести бесіду, у якій розповість учням про історію дослідження правильних многогранників. Уперше п'ять правильних многогранників було побудовано у славнозвісній школі Піфагора. Причому піфагорійці побудували всі види: тетраедр, гексаедр (куб), октаедр, додекаедр, ікосаедр. Розв'язання цієї складної задачі справило сильне враження на тих, хто над нею працював, і тому в школі Піфагора зазначеним многогранникам було надано містичного значення. Вони вважалися «космічними фігурами» і кожній із них було присвоєне найменування однієї зі стихій, що складали, на думку греків, основу буття: вогню, повітря, води, землі й Усесвіту. Пізніше давньогрецький математик Платон досліджував властивості правильних многогранників. На його честь зазначені многогранники і сьогодні називають платоновими тілами. Отже, основною метою уроку є вивчення поняття правильного многогранника та видів правильних многогранників.

IV. Актуалізація опорних знань

Фронтальне опитування

1. Сформулюйте означення правильного многокутника.

2. Чому дорівнюють внутрішні кути правильного:
а) трикутника; б) чотирикутника; в) п'ятикутника?

3. Сформулюйте означення многогранного кута.

4. Сформулюйте означення опуклого многогранника.

V. Засвоєння знань

План вивчення теми

1. Означення правильного многогранника.
2. Види правильних многогранників:
1) правильний тетраедр;
2) правильний гексаедр (куб);
3) правильний октаедр;
4) правильний додекаедр;
5) правильний ікосаедр.
3. Властивості правильних многогранників.

Конспект 24

1. Опуклий многогранник називають правильним, якщо його грані є правильними многокутниками з однією й тією самою кількістю сторін, а в кожній вершині многогранника сходиться одне й те ж число ребер.

2. Існує п'ять видів правильних многогранників:

✓ правильний тетраедр — многогранник, поверхня якого складається з чотирьох рівносторонніх трикутників;

✓ правильний гексаедр (куб) — шестигранник, поверхня якого складається з шести квадратів;

✓ правильний октаедр — восьмигранник, гранями якого є рівносторонні трикутники;

✓ правильний додекаедр — многогранник, поверхня якого складається з дванадцяти правильних п'ятикутників;

✓ правильний ікосаедр — многогранник, поверхня якого складається з двадцяти рівносторонніх трикутників.

3. Властивості правильних многогранників

Вид правильного многогранника	Вид грані	Кількість		
		граней	вершин	ребер
Тетраедр	Рівносторонній трикутник	4	4	6
Гексаедр (куб)	Квадрат	6	8	12
Октаедр	Рівносторонній трикутник	8	6	12
Додекаедр	Правильний п'ятикутник	12	20	30
Ікосаедр	Рівносторонній трикутник	20	12	30

Залежно від рівня підготовленості учнів викладення нового матеріалу можна провести у формі лекції, близької до тексту підручника, або у формі фронтальної бесіди. Якщо вчитель обере формою викладення нового матеріалу фронтальну бесіду, то після того як сформульовано означення правильного многогранника, можна запитати учнів, скільки, на їх думку, існує видів правильних многогранників. (Необхідно зауважити, що подібні між собою многогранники однакові, мають один і той самий вид.) А потім разом з'ясувати, скільки однакових правильних многокутників може прилягати до однієї вершини правильного многогранника. Виявиться, що таких можливостей усього п'ять. Дійсно, число многокутників, прилеглих до однієї вершини, має бути не меншим, ніж три, але таким, щоб сума кутів, прилеглих до однієї вершини, була меншою від $360°$, інакше жодний многогранний кут із цих многокутників утворити неможливо. Кути правильного трикутника дорівнюють $60°$, тому число правильних трикутників, що сходяться в одній вершині може дорівнювати 3, 4 або 5 (тобто існує три можливості утворити многогранний кут, гранями якого є правильні трикутники). Кути правильного чотирикутника (квадрата) дорівнюють $90°$, тому число квадратів, що сходяться в одній вершині, може дорівнювати тільки трьом (ще одна можливість утворити многогранний кут, гранями якого є правильні многокутники). Кути правильного п'ятикутника дорівнюють $108°$, тому число п'ятикутників, що сходяться в одній вершині, також може дорівнювати тільки трьом (остання можливість утворити многогранний кут, гранями якого є правильні многокутники). Кути правильного шестикутника дорівнюють $120°$ і навіть три шестикутники не можуть утворювати тригранний кут. Так само, як і будь-які правильні n-кутники, де $n > 6$ (їхні кути більші від $120°$). Отже, дійшли висновку, що існує п'ять типів правильних многогранників. Після цього можна запропонувати учням заповнити таблицю (*див. конспект 24*). Потім, залежно від рівня підготовленості учнів та наявності часу, можна обговорити питання про елементи симетрії правильних многогранників.

VI. Формування вмінь

Виконання усних вправ

1. Площа однієї грані правильного тетраедра дорівнює 15 см^2. Чому дорівнює площа повної поверхні тетраедра?

2. Площа повної поверхні правильного додекаедра дорівнює 240 см^2. Знайдіть площу однієї грані.
3. Ребро куба дорівнює 4 см. Чому дорівнює відстань між протилежними гранями куба?
4. Знайдіть суму плоских кутів при вершині правильного октаедра.
5. Знайдіть суму всіх плоских кутів правильного ікосаедра.

Виконання письмових вправ

1. Ребро правильного многогранника дорівнює a. Знайдіть площу повної поверхні многогранника, якщо цей многогранник є: а) тетраедром; б) кубом; в) октаедром; г) додекаедром; д) ікосаедром.
2. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ із вершини D проведено діагоналі граней DA, DB і DC. Їхні кінці сполучено відрізками. Доведіть, що многогранник $DABC$ — правильний тетраедр.
3. Ребро правильного октаедра дорівнює 1 см. Знайдіть відстань між протилежними вершинами октаедра.
4. Ребро правильного тетраедра дорівнює a. Знайдіть відстань між центрами двох граней тетраедра.
5. Вершини октаедра розміщені у центрах граней куба. Знайдіть відношення площ поверхонь цих многогранників.

Запропоновані вправи сприяють засвоєнню поняття правильного многогранника та видів правильних многогранників. Крім того, виконання цих вправ дозволяє формувати просторову уяву учнів і вимагає застосовування знань із планіметрії. Під час виконання усних вправ і письмової вправи № 1 учні не користуються рисунками; під час обґрунтування відповідей спираються на означення та властивості відповідних правильних многогранників. (Якщо виникнуть утруднення, можна скористатися моделями многогранників.) Під час виконання письмових вправ № 2–4 бажано вимагати від учнів побудови чітких та наочних рисунків.

VII. Підсумки уроку

Виконання усних вправ

1. Чи можна правильну чотирикутну призму назвати правильним многогранником?
2. Чи можна стверджувати, що терміни «правильна трикутна піраміда» і «правильний тетраедр» означають одне й те саме?
3. Скільки п’ятигранних кутів має ікосаедр?
4. Скільки тригранних кутів має додекаедр?

5. Скільки ребер може виходити з однієї вершини правильного многогранника?

VIII. Домашнє завдання

Вивчити зміст понять, розглянутих на уроці.

Виконати вправи.

1. Доведіть, що в кожній вершині правильного октаедра сходяться дві пари перпендикулярних ребер.
2. Ребро правильного октаедра дорівнює a. Знайдіть відстань між центрами двох сусідніх граней октаедра.
3. Ребро правильного октаедра дорівнює 3 см. Знайдіть відстань між протилежними паралельними гранями октаедра.
4. Центри всіх граней правильного тетраедра є вершинами іншого тетраедра. Знайдіть відношення площ повних поверхонь цих тетраедрів.

УРОК № 30
ПІДСУМКОВИЙ УРОК ІЗ ТЕМИ «МНОГОГРАННИКИ»

Мета: повторити, систематизувати й узагальнити знання учнів щодо:

- ✓ поняття двогранного та многогранного кутів;
- ✓ поняття многогранника та його елементів;
- ✓ поняття призми, її елементів; видів призми;
- ✓ поняття паралелепіпеда, його елементів; видів паралелепіпеда;
- ✓ поняття піраміди, її елементів; видів піраміди;
- ✓ поняття правильних многогранників;
- ✓ площ бічної та повної поверхні многогранників.

Систематизувати вміння учнів застосовувати набуті знання до розв’язування задач, передбачених програмою.

Тип уроку: узагальнення і систематизація знань, умінь і навичок.

Наочність та обладнання: конспекти 13–24.

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Оскільки письмові вправи домашньої роботи відтворювали ситуації, аналогічні до розглянутих на попередньому уроці, то правильність розв'язання перевіряється за готовими рисунками у вигляді усних вправ (з усним обґрунтуванням).

З метою перевірки засвоєння теоретичного матеріалу можна провести тестову роботу з подальшою перевіркою та обговоренням.

Тестова робота

1. Яке з наведених тверджень стосовно правильних многогранників неправильне?
   А) Тільки у трьох правильних многогранників гранями є правильні трикутники.
   Б) Тільки в одного правильного многогранника гранями є квадрати.
   В) Тільки в одного правильного многогранника гранями є правильні шестикутники.
   Г) Тільки в одного правильного многогранника гранями є правильні п'ятикутники.
2. Який правильний многогранник має вісім граней?
   А) Куб; Б) октаедр; В) додекаедр; Г) ікосаедр.
3. Який правильний многогранник має шість ребер?
   А) Тетраедр; Б) октаедр; В) додекаедр; Г) ікосаедр.
4. Який правильний многогранник має 20 вершин?
   А) Тетраедр; Б) октаедр; В) додекаедр; Г) ікосаедр.
5. У якого правильного многогранника сума плоских кутів при одній вершині дорівнює $240°$?
   А) Куб; Б) октаедр; В) додекаедр; Г) ікосаедр.

III. Формулювання мети й завдань уроку

Основна дидактична мета і завдання на урок цілком логічно випливають із його місця в темі. Оскільки урок є останнім, підсумковим, то увагу приділяємо повторенню, узагальненню й систематизації знань і вмінь учнів, набутих під час вивчення теми. Таке формулювання мети створює відповідну мотивацію діяльності учнів.

IV. Повторення і систематизація знань

Залежно від рівня підготовки учнів учитель може організувати їхню роботу різними способами: або як самостійну роботу з довідковим матеріалом (наприклад, із конспектом або підручником), або учні мають самостійно повторити зміст основних понять теми, скласти схему, що відображає логічний зв'язок між основними поняттями теми, тощо. Можна розпочати урок з традиційного фронтального опитування за контрольними запитаннями до теми.

Контрольні запитання

1. Сформулюйте означення двогранного кута. Що таке лінійний кут двогранного кута?
2. Сформулюйте означення тригранного кута, його граней і ребер. Поясніть, що таке плоскі і двогранні кути тригранного кута.
3. Сформулюйте означення многогранника. Який многогранник називають опуклим? Що таке грань опуклого многогранника? ребро? вершина?
4. Сформулюйте означення призми. Покажіть на моделі вершини, грані, ребра призми.
5. Які види призм ви знаєте? Яку призму називають прямою? похилою? правильною?
6. Як обчислити площу бічної поверхні призми, повної поверхні призми?
7. Сформулюйте означення паралелепіпеда та його властивості. Який паралелепіпед називають прямокутним? Сформулюйте означення куба.
8. Сформулюйте означення піраміди. Яку піраміду називають правильною? Що таке апофема правильної піраміди? Поясніть, як знайти площу бічної поверхні піраміди, площу повної поверхні піраміди.
9. Який многогранник називають правильним? Які види правильних многогранників ви знаєте?

V. Повторення і систематизація вмінь

Зазвичай цей етап уроку проводять у формі групової роботи, мета якої полягає в тому, щоб учні самостійно сформулювали та випробували узагальнену схему дій, якої вони будуть дотримуватися під час розв'язування типових задач, подібні до яких будуть винесені на контроль.

Перед виконанням практичного завдання проводять роботу з виділення основних видів задач на застосування вивчених у темі понять. Такими видами можуть бути задачі на:

- ✓ знаходження невідомих елементів призми;
- ✓ обчислення площ бічної та повної поверхонь призми;
- ✓ знаходження невідомих елементів паралелепіпеда;
- ✓ обчислення площ бічної та повної поверхонь паралелепіпеда;
- ✓ знаходження невідомих елементів піраміди;
- ✓ обчислення площ бічної та повної поверхонь піраміди.

Після складання переліку основних видів задач учитель об'єднує учнів у робочі групи (за кількістю видів завдань). Кожна група отримує завдання: «Скласти план розв'язання задачі...».

На складання плану відведено час, за який учасники групи мають обговорити план розв'язання задачі, записати його у вигляді послідовних кроків, реалізувати та підготовити презентацію своєї роботи. Після презентації проводиться обговорення, під час якого вчитель (або учні інших груп) ставить запитання або пропонує замінити яку-небудь із заданих величин і пояснити, як зміниться розв'язання задачі. Потім, у разі необхідності, проводять корекцію складених планів.

VII. Підсумки уроку

Підсумком уроку узагальнення й систематизації знань і вмінь учнів є, по-перше, складені самими учнями узагальнені схеми дій під час розв'язування типових завдань, по-друге, здійснення учнями необхідної частини свідомої розумової діяльності (рефлексії), усвідомлення кожним учнем особистих успіхів та, найголовніше, проблем, над якими слід ще попрацювати.

VIII. Домашнє завдання

Повторити зміст вивчених у ході засвоєння теми 2 понять.

Вивчити складені на уроці схеми дій.

Розв'язати задачі домашньої контрольної роботи.

Умова домашньої контрольної роботи

1. Знайдіть висоту правильної шестикутної призми, якщо сторона її основи дорівнює a, а менша з діагоналей призми утворює з площиною основи кут $60°$.
2. Основою прямої призми є ромб, діагоналі якого дорівнюють 6 см і 8 см. Знайдіть площу повної поверхні призми, якщо її бічне ребро дорівнює 10 см.
3. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 4 см і 6 см, бічне ребро дорівнює 12 см. Знайдіть діагоналі паралелепіпеда і кут нахилу діагоналі до площини основи.
4. Діагональ грані куба дорівнює 17 см. Чому дорівнює площа повної поверхні куба?
5. Знайдіть висоту правильної трикутної піраміди, площа основи якої дорівнює $9\sqrt{3}$ см^2, а площа бічної поверхні — $9\sqrt{7}$ см^2.
6. Основою піраміди є прямокутний трикутник із гіпотенузою c і гострим кутом α. Дві бічні грані, що містять сторони цього кута, перпендикулярні до площини основи, а третя — нахилена до неї під кутом β. Обчисліть площу бічної поверхні піраміди.

УРОК № 31
КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 2

Тип уроку: контроль знань і вмінь.

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Зібрати зошити з виконаною домашньою контрольною роботою № 2. Оцінки за роботу врахувати під час виставлення тематичного бала.

III. Формулювання мети й завдань уроку

Метою контрольної роботи є демонстрація учнями своїх навчальних досягнень, тобто знання змісту основних понять теми та володіння прийомами їх застосування під час розв'язування задач.

IV. Текст контрольної роботи № 1

Варіант 1

1. Знайдіть висоту правильної шестикутної призми, якщо сторона її основи дорівнює a, а менша з діагоналей призми — b.
2. Основою прямої трикутної призми є прямокутний трикутник із катетами 7 см і 24 см. Висота призми дорівнює 10 см. Обчисліть площу повної поверхні призми.
3. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 3 см і 5 см, а кут між ними — $120°$. Знайдіть бічне ребро і меншу діагональ паралелепіпеда, якщо його більша діагональ дорівнює $\sqrt{65}$ см.
4. Діагональ куба дорівнює 7 см. Чому дорівнює площа повної поверхні куба?
5. Знайдіть висоту правильної трикутної піраміди, площа основи якої дорівнює $27\sqrt{3}$ см^2, а площа повної поверхні — $72\sqrt{3}$ см^2.
6. Основою піраміди є прямокутний трикутник із гострим кутом α. Бічне ребро, що проходить через вершину другого гострого кута основи, перпендикулярне до площини основи, а бічна грань, яка містить катет, протилежний поданому куту, нахилена до площини основи під кутом β. Обчисліть площу бічної поверхні піраміди.

Варіант 2

1. Знайдіть висоту правильної шестикутної призми, якщо сторона її основи дорівнює a, а більша з діагоналей призми — b.

2. Основою прямої призми є прямокутний трикутник із катетами 8 см і 15 см. Висота призми дорівнює 5 см. Обчисліть площу повної поверхні призми.
3. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 3 см і 4 см, а кут між ними — $120°$. Знайдіть діагоналі паралелепіпеда, якщо його бічне ребро дорівнює $\sqrt{12}$ см.
4. Площа повної поверхні куба дорівнює 32 см^2. Чому дорівнює діагональ куба?
5. Знайдіть висоту правильної трикутної піраміди, площа бічної поверхні якої дорівнює $60\sqrt{3}$ см^2, а площа повної поверхні — $108\sqrt{3}$ см^2.
6. Основою піраміди є прямокутний трикутник із гострим кутом α і гіпотенузою c. Бічне ребро, що проходить через вершину поданого гострого кута, перпендикулярне до площини основи, а бічна грань, яка містить катет, що протилежний поданому куту, нахилена до площини основи під кутом β. Обчисліть площу бічної поверхні піраміди.

V. Підсумки уроку

На цьому етапі уроку, після того як будуть зібрані зошити, можна відповісти на питання учнів, які виникли в процесі виконання контрольної роботи, і роздати для опрацювання вдома зразки правильних розв'язань завдань контрольної роботи (заготовлених учителем заздалегідь).

VI. Домашнє завдання

Виконати аналіз контрольної роботи (за розданими розв'язаннями).

УРОК № 32
УЗАГАЛЬНЕННЯ ЗНАНЬ УЧНІВ, НАБУТИХ У І СЕМЕСТРІ. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Мета: узагальнити і систематизувати знання учнів із тем «Координати та вектори в просторі» і «Многогранники». Удосконалити вміння учнів застосовувати набуті знання до розв'язування задач, передбачених програмою.

Тип уроку: узагальнення і систематизація знань, удосконалення вмінь.

Наочність та обладнання: конспекти 1–24, моделі многогранників.

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Учитель проводить бесіду, у ході якої має з'ясувати результати проведеного вдома аналізу контрольної роботи (наприклад, хто з учнів потребує додаткового опрацювання вивченого раніше матеріалу; типи задач, на які слід ще раз звернути увагу тощо).

III. Формулювання мети й завдань уроку

Основна дидактична мета та завдання на урок випливають з його місця в календарному плані. Оскільки урок є останнім у І семестрі, то цілком логічно приділити увагу узагальненню та систематизації знань, умінь і навичок учнів, набутих під час вивчення геометрії у І семестрі. За цей час було вивчено дві теми «Координати та вектори в просторі», «Многогранники». Тож завданням уроку є узагальнення та систематизація знань із цих тем і вдосконалення вмінь розв'язувати задачі, що передбачають використання відповідних знань. Таке формулювання мети створює відповідну мотивацію діяльності учнів.

IV. Повторення та систематизація знань із теми «Координати та вектори в просторі»

Учні самостійно повторюють теоретичний матеріал теми за підручником або конспектом. Після цього можна провести фронтальне опитування за основними питаннями теми.

Фронтальне опитування

1. Наведіть формули координат середини відрізка та відстані між точками в просторі.
2. Опишіть види симетрії в просторі. Як побудувати точку, симетричну поданій точці відносно поданої площини?
3. Опишіть паралельне перенесення в просторі. Наведіть формули, якими його задають.
4. Які поняття й властивості, пов'язані з векторами, у стереометрії збігаються з планіметричними? Сформулюйте відповідні означення, наведіть формули.
5. Які поняття й властивості, пов'язані з векторами, у стереометрії відрізняються від планіметричних? Сформулюйте відповідні означення, наведіть формули.

6. Сформулюйте означення компланарних векторів та теорему про розкладання вектора за трьома некомпланарними векторами.

V. Удосконалення вмінь розв'язувати задачі з теми «Координати та вектори в просторі»

Виконання усних вправ

1. Якій із координатних площин належить середина відрізка AB, якщо: $A(3;-4;-5)$, $B(3;4;-5)$?
2. Знайдіть відстань OC, якщо: точка O — початок координат, точка C — середина відрізка AB, $A(2;-1;-3)$, $B(0;-3;-1)$.
3. $ABCD$ — паралелограм. Які векторні рівності можна записати?
4. Знайдіть координати вектора $\vec{p}=0,5\vec{a}+3\vec{b}$, якщо:

$$\vec{a}(-8;4;1),\ \vec{b}(-2;4;0,5).$$

Виконання письмових вправ

1. Знайдіть довжину медіани CD трикутника ABC, якщо: $A(3;2;5)$, $B(4;0;-2)$, $C(1;3;2)$.
2. Знайдіть координати вектора, симетричного вектору $\overrightarrow{AB}$ відносно площини xz, якщо: $A(2;-3;1)$, $B(-2;1;0)$.
3. Відомо, що $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$. Чому дорівнює скалярний добуток $(\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}+\vec{b})$?
4. Обчисліть кут між векторами $\vec{a}=\vec{m}-2\vec{n}-\vec{p}$ і $\vec{b}=\vec{m}-2\vec{n}+\vec{p}$, де $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$ — одиничні взаємно перпендикулярні вектори.

VI. Повторення та систематизація знань із теми «Многогранники»

Як і під час повторення попередньої теми, учні самостійно повторюють теоретичний матеріал теми «Многогранники» за підручником або конспектом. Після цього можна провести фронтальне опитування за основними питаннями теми.

Фронтальне опитування

1. Сформулюйте означення двогранного кута. Зобразіть двогранний кут і обґрунтуйте його лінійний кут.
2. Сформулюйте означення многогранника.
3. Сформулюйте означення призми. Користуючись моделлю призми, опишіть її елементи.

4. Сформулюйте означення прямої призми. Наведіть формулу для обчислення площі її бічної поверхні.
5. Сформулюйте означення правильної призми.
6. Сформулюйте означення паралелепіпеда. Який паралелепіпед називають прямим; прямокутним? Як обчислити довжину діагоналі прямокутного паралелепіпеда за його вимірами?
7. Сформулюйте означення піраміди. Користуючись моделлю піраміди, опишіть її елементи.
8. Сформулюйте означення правильної піраміди. Наведіть формулу для обчислення площі бічної поверхні правильної піраміди.
9. Назвіть п'ять правильних многогранників. Які елементи симетрії мають правильний тетраедр і куб?

VII. Удосконалення вмінь розв'язувати задачі з теми «Многогранники»

Виконання усних вправ

1. Чому дорівнює площа бічної поверхні прямої призми, основою якої є паралелограм зі сторонами 8 см і 12 см, а висота призми дорівнює 15 см?
2. Знайдіть відношення площ повних поверхонь куба і правильного тетраедра, якщо довжини їх ребер рівні.
3. У які відрізки проектуються бічні ребра та апофеми правильної піраміди під час ортогонального проектування їх на площину основи піраміди?

Виконання письмових вправ

1. Діагоналі AB_1 і CB_1 двох сусідніх граней прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ утворюють із діагоналлю AC основи $ABCD$ кути α і β відповідно. Знайдіть кут між площиною трикутника AB_1C і площиною основи.
2. Основою піраміди є прямокутний трикутник із гострим кутом α. Висота піраміди дорівнює H. Усі бічні ребра нахилені до площини основи під одним і тим самим кутом. Обчисліть площу основи піраміди.
3. Знайдіть сторону основи й апофему правильної трикутної піраміди, якщо її бічне ребро і площа бічної поверхні відповідно дорівнюють 10 см і 144 см^2.

Більшість завдань, запропонованих для розв'язування на уроці, є задачами підвищеної складності, що є цілком логічно, оскільки мова йде про удосконалення вміння учнів розв'язувати задачі. Можливо, учні не встигнуть виконати протягом одного уроку всі запропоновані вправи. У цьому випадку доцільно більше уваги приділити задачам із теми «Координати та вектори в просторі» (оскільки тему «Многогранники» щойно було вивчено). На власний розсуд учителя, задачі, які не були розглянуті на уроці, можна запропонувати як індивідуальні завдання або як додаткові завдання для домашньої роботи.

VIII. Підсумки уроку

Бліцопитування

1. Яка з наведених точок симетрична точці $A(1;-1;-1)$ відносно координатної площини xz?
   А) $B(1;1;-1)$; Б) $C(1;-1;1)$;
   В) $D(-1;-1;1)$; Г) $E(-1;1;-1)$.
2. При яких значеннях n вектори $\vec{a}(-1;-1;n)$ і $\vec{b}(n;-1;n)$ перпендикулярні?
   А)При $n=1$; Б) при $n=-1$; В) при $n=\pm1$;
   Г) таких значень n не існує.
3. Ребро куба збільшили на 2 см. На скільки збільшилася площа його повної поверхні?
   А)На 4 см^2; Б) на 12 см^2; В) на 48 см^2;
   Г) визначити неможливо.
4. Дві правильні n-кутні призми мають рівні висоти, а відношення площ їх основ дорівнює 1: 81. Чому дорівнює відношення площ їх бічних поверхонь?
   А)1: 3; Б) 1: 9; В) 1: 27; Г) 1: 81.
5. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди у $\sqrt{2}$ рази більше від сторони основи. Чому дорівнює кут між бічним ребром і площиною основи?
   А) $30°$; Б) $45°$; В) $60°$; Г) $\operatorname{arctg} 2$.

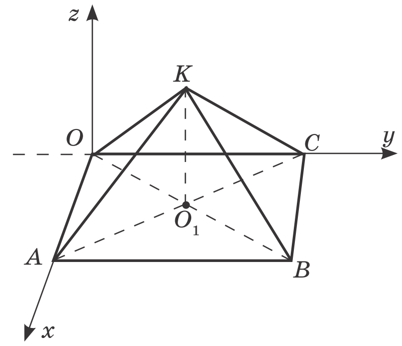
IX. Домашнє завдання

Повторити основні положення тем «Координати та вектори в просторі» і «Многогранники».

Виконати вправи.

1. На *рисунку* зображено правильну чотирикутну піраміду в координатному просторі;

$$AB = KO_1 = 1.$$



Знайдіть координати вершини цієї піраміди та площу її бічної поверхні.

2. Довжина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює 2. Обчисліть скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB_1}$ і $\overrightarrow{CC_1}$.
3. Основою прямої призми є рівнобічна трапеція, бічні сторони якої дорівнюють 13 см, а основи 11 см і 21 см. Знайдіть площу повної поверхні призми, якщо площа її діагонального перерізу дорівнює 180 см^2.
4. Бічні ребра правильної трикутної піраміди попарно взаємно перпендикулярні. Знайдіть кут між бічною гранню і площиною основи піраміди.

ТЕМА 3. ТІЛА ОБЕРТАННЯ (14 ГОДИН)

УРОК № 33
ТІЛА ТА ПОВЕРХНІ ОБЕРТАННЯ

Мета: сформувати поняття:

- ✓ тіла обертання;
- ✓ поверхні тіла обертання;
- ✓ осі тіла обертання;
- ✓ осьового перерізу тіла обертання;

елементів симетрії тіла обертання.

Сформувати вміння розв'язувати задачі, що передбачають використання цих понять.

Тип уроку: засвоєння знань, формування вмінь.

Наочність та обладнання: конспект «Тіла та поверхні обертання», моделі тіл обертання.

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Домашнє завдання перевіряємо за зразком (готові розв'язання роздаємо учням для самостійного опрацювання та порівняння з результатами, одержаними під час виконання вправ удома). Можливі питання висвітлюємо під час фронтальної роботи.

III. Формулювання мети й завдань уроку

Оскільки на цьому уроці розпочинається вивчення нової теми «Тіла обертання», то необхідно надати учням інформацію про:

- ✓ орієнтовний план вивчення теми;
- ✓ кількість навчальних годин, відведених на вивчення теми;
- ✓ приблизний зміст матеріалу, що вивчається;
- ✓ основні вимоги до знань та вмінь учнів;
- ✓ орієнтовний зміст завдань, що будуть винесені на контрольну роботу.

Формуванню відповідної мотивації навчальної діяльності на уроці сприяє розуміння учнями логіки вивчення стереометрії в 11 класі. Звертаємо увагу учнів на те, що після вивчення теми

«Многогранники» подальшим кроком є вивчення теми «Тіла обертання». Учням, звичайно, знайомі поняття циліндра, конуса, кулі з курсу геометрії попередніх класів і безпосередньо з навколишнього середовища. Завдання поточної теми — сформулювати строгі математичні означення зазначених тіл і пов'язаних із ними понять, а потім на основі означень довести основні властивості тіл, розглянути типові задачі на знаходження невідомих елементів тіл обертання.

Сформувати поняття поверхні та тіла обертання, домогтися розуміння учнями, чому циліндр, конус, кулю називають тілами обертання, — основна мета цього уроку.

IV. Актуалізація опорних знань

Виконання усних вправ

1. Знайдіть довжину кола, радіус якого дорівнює 5 см.
2. Знайдіть площу круга, діаметр якого дорівнює 12 см.
3. Знайдіть площу прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює 13 см, а один із катетів — 5 см.
4. Знайдіть площу прямокутної трапеції, основи якої дорівнюють 5 см і 7 см, а менша бічна сторона дорівнює 3 см.

V. Засвоєння знань

План вивчення теми

1. Означення тіла обертання.
2. Означення поверхні обертання.
3. Означення осі обертання тіла.
4. Означення осьового перерізу тіла обертання.
5. Елементи симетрії тіла обертання.

Під час вивчення тіл обертання остаточно формується уявлення учнів про систему просторових геометричних фігур, що вивчають у шкільному курсі стереометрії. Матеріал уроку є підготовчим до свідомого сприйняття учнями понять основних тіл обертання, що вивчають у школі, а саме циліндра, конуса, кулі та сфери. Оскільки матеріал, що підлягає вивченню на уроці, складається переважно з означень (винятком є теорема про елементи симетрії тіла обертання), то доцільно організувати вивчення нового матеріалу як самостійну роботу учнів (за підручником або конспектом). Залежно від рівня підготовленості учнів доведення теореми про елементи симетрії тіла обертання можна запропонувати провести самостійно або викласти цю частину матеріалу лекційним способом.

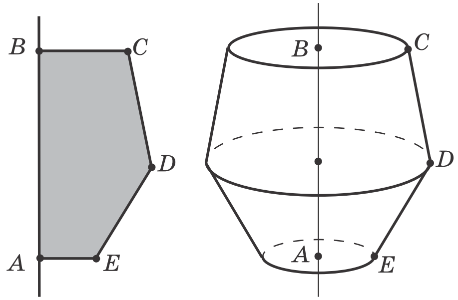
Конспект 25

Тіла та поверхні обертання

Нехай деякий плоский многокутник $ABCDE$ обертається навколо прямої AB (*див. рисунок*).

Під час такого обертання кожна з його точок, що не належить прямій AB, описує коло з центром на цій прямій. Увесь многокутник $ABCDE$, обертаючись навколо прямої AB, описує деяке тіло, яке називають тілом обертання.

Поверхню цього тіла називають поверхнею обертання.



Пряму AB називають віссю обертання цього тіла.

Будь-який переріз тіла обертання площиною, перпендикулярною до осі обертання, є кругом.

Переріз тіла обертання площиною, яка проходить через вісь обертання, називають осьовим перерізом тіла обертання.

Вісь обертання є віссю симетрії тіла обертання. Площини, які проходять через вісь обертання, є площинами симетрії тіла обертання (теорема)

VI. Формування вмінь

Виконання усних вправ

1. Тіло утворене обертанням прямокутного трикутника ABC навколо катета AC. Укажіть вісь симетрії цього тіла обертання.
2. Тіло утворене обертанням квадрата навколо своєї діагоналі. Скільки площини симетрії має утворене тіло?
3. Яка геометрична фігура є осьовим перерізом тіла, утвореного обертанням квадрата навколо однієї зі своїх сторін?

Виконання графічної вправи

1. Зобразіть тіло, утворене обертанням:
   а) прямокутника навколо однієї з його сторін;
   б) прямокутного трикутника навколо одного з його катетів;
   в) рівностороннього трикутника навколо однієї з його сторін;
   г) ромба навколо більшої діагоналі.

Виконання письмових вправ

1. Прямокутний трикутник ABC із гіпотенузою $AB = 6$ см і $\angle B = 60°$ обертається навколо сторони AC. Знайдіть довжину кола, утвореного точкою B у результаті такого обертання.

2. Прямокутник, одна зі сторін якого дорівнює 12 см, а діагональ — 13 см, обертається навколо меншої зі сторін. Знайдіть площу круга, утвореного стороною прямокутника у результаті такого обертання.
3. Рівносторонній трикутник зі стороною 4 см обертається навколо однієї зі своїх сторін. Знайдіть площу осьового перерізу тіла, утвореного в результаті такого обертання.
4. Квадрат, діагональ якого дорівнює $5\sqrt{2}$, обертається навколо однієї зі своїх сторін. Знайдіть площу осьового перерізу тіла, утвореного в результаті такого обертання.
5. Прямокутна трапеція, менша основа якої дорівнює 5 см, а більша бічна сторона — $3\sqrt{2}$ см, обертається навколо меншої бічної сторони. Знайдіть площу осьового перерізу тіла, утвореного у результаті такого обертання.

Запропоновані вправи сприяють формуванню поняття тіла обертання, а також підготовці до свідомого сприйняття понять циліндра, конуса, кулі та сфери. Крім того, розв’язування запропонованих задач розвиває просторову уяву учнів. Традиційно під час розв’язування задач повторюємо факти, відомі учням із курсів планіметрії та стереометрії 10 класу, що дає змогу органічно побудувати повторення навчального матеріалу. Під час виконання графічних вправ і зображення тіл обертання в ході розв’язування письмових вправ доцільно нагадати учням, що зображенням кола є еліпс. З метою унеможливлення формального підходу до засвоєння нового матеріалу під час розв’язування кожної задачі бажано домагатися від учнів високого рівня обґрунтування висновків.

VII. Підсумки уроку

Виконання усної вправи

1. Наведіть приклади предметів побуту, що мають форму тіл обертання. Назвіть плоскі фігури, у результаті обертання яких утворюються тіла такої форми.

VIII. Домашнє завдання

Засвоїти зміст понять, розглянутих на уроці.
Виконати вправи.

1. Прямокутний трикутник ABC із гіпотенузою $AB = 10$ см обертається навколо катета AC, довжина якого дорівнює 8 см. Точка M — середина гіпотенузи. Знайдіть довжину кола, утвореного точкою M у результаті такого обертання.

2. Прямокутна трапеція, менша основа якої дорівнює 4 см, а менша бічна сторона — 2 см, обертається навколо меншої бічної сторони. Знайдіть площу круга, утвореного більшою основою в результаті такого обертання, якщо площа трапеції дорівнює 10 см^2.
3. Периметр осьового перерізу тіла, утвореного в результаті обертання рівностороннього трикутника навколо однієї зі своїх сторін, дорівнює 36 см. Знайдіть довжину сторони трикутника.
4. Знайдіть площу осьового перерізу тіла, утвореного в результаті обертання прямокутника навколо однієї зі своїх сторін, якщо діагоналі прямокутника дорівнюють 10 см, а кут між ними — $30°$.

УРОК № 34
ЦИЛІНДР І ЙОГО ЕЛЕМЕНТИ

Мета: сформувати поняття циліндра та його елементів (основ, твірних, радіуса, висоти, осі, осьового перерізу); домогтися засвоєння властивостей циліндра; сформувати вміння розв'язувати задачі, що передбачають застосування цих понять і властивостей.

Тип уроку: засвоєння знань, формування вмінь.

Наочність та обладнання: конспект «Циліндр і його елементи», моделі циліндрів.

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Форма проведення цього етапу уроку значною мірою залежить від рівня знань і вмінь учнів: це може бути самостійна робота з перевірки домашнього завдання за зразком або фронтальна робота з коментуваннями розв'язань, або самостійна робота з виконання вправ, аналогічних за змістом вправам домашньої роботи.

III. Формулювання мети й завдань уроку

Учитель пропонує учням, скориставшись власним досвідом, знаннями, набутими в попередніх класах, поняттям тіла обертання, з'ясувати, чи є циліндр тілом обертання. Найімовірніше, учні нададуть позитивну відповідь на це запитання. Тоді вчитель може запропонувати учням таке запитання: «У результаті обертання якої геометричної фігури і навколо якої осі утворюється циліндр?» Після обговорення цього

питання вчитель повідомляє, що завданням уроку є вивчення строгого математичного означення циліндра та його елементів, а також доведення деяких властивостей циліндра.

IV. Актуалізація опорних знань

Фронтальне опитування

1. Сформулюйте означення паралельних площин.
2. Сформулюйте означення прямої, перпендикулярної до площини.
3. Яке взаємне розміщення прямих, перпендикулярних до однієї площини?
4. Сформулюйте означення паралельного перенесення в просторі. Чи є паралельне перенесення в просторі переміщенням?
5. Сформулюйте означення призми, її основ, бічних ребер, висоти.
6. Сформулюйте означення прямої призми, правильної призми.
7. Які властивості має призма?

V. Засвоєння знань

План вивчення теми

1. Означення циліндра (кругового циліндра).
2. Означення основ і твірних циліндра.
3. Означення прямого циліндра.
4. Означення радіуса циліндра.
5. Означення висоти циліндра.
6. Циліндр як тіло, утворене в результаті обертання прямокутника навколо однієї зі сторін. Вісь циліндра.
7. Означення осьового перерізу циліндра.
8. Властивості циліндра.
9. Означення рівностороннього циліндра.

Зважаючи на те, що новий матеріал складається з досить великої кількості означень, його викладення можна провести у формі лекції.

Наведене означення циліндра має описово-конструктивний характер. Сформулювавши це означення і продемонструвавши його на моделях і рисунку, бажано запропонувати учням виконати рисунок циліндра в зошитах. Звертаємо увагу учнів на те, як правильно виконувати зображення циліндра, зокрема осьового перерізу циліндра (*див. конспект 26*). Зауважуємо, що в школі вивчають тільки прямий круговий циліндр, тобто циліндр, основою якого є круг, а твірні перпендикулярні до площини основи. (Залежно від наявності часу та рівня підготовленості учнів, можна розповісти й про інші види циліндрів.) Тому далі під словом «циліндр» ми будемо розуміти прямий круговий циліндр.

Конспект 26

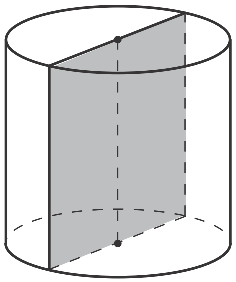
Циліндр і його елементи

1. Циліндром (круговим циліндром) називають тіло, яке складається з двох кругів, що не лежать в одній площині й суміщаються паралельним перенесенням, і всіх відрізків, що сполучають відповідні точки цих кругів.

2. Круги називають основами циліндра, а відрізки, що сполучають відповідні точки кіл, які обмежують основи, — твірними циліндра.

3. Циліндр називають прямим, якщо його твірні перпендикулярні до площини основ.

4. Радіусом циліндра називають радіус його основи.



5. Висотою циліндра називають перпендикуляр, проведений із точки однієї основи до площини другої основи.

6. Прямий круговий циліндр є тілом обертання, яке утворюється в результаті обертання прямокутника навколо його сторони. Пряма, що проходить через центри основ циліндра, є віссю циліндра.

7. Осьовим перерізом циліндра називають переріз, що проходить через вісь циліндра.

8. Властивості циліндра:

основи циліндра — рівні круги, що лежать у паралельних площинах;

твірні циліндра паралельні й рівні;

висота циліндра дорівнює його твірній;

відрізок, що сполучає центри основ циліндра, дорівнює висоті циліндра (а отже, і твірній циліндра);

осьовим перерізом циліндра є прямокутник зі сторонами $2R$ і H, де R — радіус основи циліндра, H — висота циліндра.

9. Циліндр називають рівностороннім, якщо його осьовим перерізом є квадрат (висота циліндра дорівнює його діаметру)

Під час пояснення нового матеріалу звертаємо увагу учнів на те, що прямий круговий циліндр можна утворити обертанням прямокутника навколо однієї з його сторін.

Також доцільно звернути увагу учнів на те, що конструктивні означення циліндра й прямої призми аналогічні. Тому аналогічні й означення основ призми й циліндра, властивості ребер призми й твірних циліндра (паралельність, рівність) тощо.

VI. Формування вмінь

Виконання усних вправ

1. Чи має циліндр центри симетрії; осі симетрії?
2. Твірна циліндра дорівнює 7 см. Чому дорівнює висота циліндра?
3. Прямокутний аркуш паперу з вимірами 3 см × 5 см можна двома способами згорнути так, щоб утворилася поверхня циліндра. Чому дорівнює радіус кожного із цих циліндрів?
4. Осьовим перерізом циліндра є квадрат зі стороною 12 см. Чому дорівнюють висота і радіус циліндра?
5. Прямокутник зі сторонами 6 см і 9 см обертається навколо меншої зі сторін. Чому дорівнюють висота і радіус основи циліндра, утвореного в результаті цього обертання?

Виконання письмових вправ

1. Радіус основи циліндра дорівнює 2 м, висота — 3 м. Знайдіть діагональ осьового перерізу циліндра.
2. Осьовим перерізом циліндра є квадрат, площа якого дорівнює 36 см^2. Знайдіть площу основи циліндра.
3. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює d і утворює з площиною основи циліндра кут α. Знайдіть площу основи циліндра.
4. У циліндр вписано квадрат так, що всі його вершини належать колам основ циліндра, а площина квадрата перпендикулярна до площини основи циліндра. Знайдіть відстань від площини квадрата до осі циліндра, якщо сторона квадрата дорівнює 8 см, а діаметр основи циліндра — 10 см.
5. Площа основи циліндра відноситься до площі осьового перерізу як $\pi : 4$. Знайдіть кут між діагоналями осьового перерізу.
6. Відрізок, що сполучає центр верхньої основи циліндра з точкою кола нижньої основи, утворює з площиною основи кут α. Відстань від цього відрізка до центра нижньої основи дорівнює d. Обчисліть висоту та діаметр цього циліндра.

Більшість запропонованих задач є типовими вправами, спрямованими на відпрацювання поняття циліндра, його елементів та властивостей. З метою свідомого засвоєння зазначених понять та властивостей доцільно під час розв'язування задач вимагати від учнів формулювання відповідних означень та властивостей, а також обґрунтування кута між прямою і площиною (письмова вправа № 3), відстані від точки до площини (письмова вправа № 4) та відстані від точки до прямої (письмова вправа № 6).

Письмова вправа № 4 є підготовчою до сприйняття теми «Перерізи циліндра площинами». По суті, квадрат, про який йдеться в умові задачі, є перерізом циліндра площиною, паралельною осі циліндра.

VII. Підсумки уроку

Контрольні запитання

1. Наведіть приклади предметів побуту, які мають форму циліндра.
2. Сформулюйте означення циліндра. Скориставшися моделлю циліндра, укажіть його основи та твірну.
3. Чи правильно, що твірна циліндра більша від його висоти?
4. Чи може осьовий переріз циліндра бути трапецією?
5. Наведіть властивості циліндра, однакові з властивостями прямої призми.

VIII. Домашнє завдання

Вивчити зміст понять, розглянутих на уроці.

Виконати вправи.

1. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 25 см, а відстань між центрами основ циліндра — 7 см. Знайдіть радіус основи циліндра.
2. Осьовим перерізом циліндра є квадрат, діагональ якого дорівнює $8\sqrt{2}$ см. Знайдіть довжину кола основи циліндра.
3. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює d і утворює з площиною основи кут α. Знайдіть висоту циліндра.
4. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює d і утворює кут α з твірною циліндра. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра.

УРОК № 35
ПЕРЕРІЗИ ЦИЛІНДРА ПЛОЩИНАМИ

Мета: сформувати поняття:

✓ перерізу циліндра, паралельного осі циліндра;

✓ перерізу циліндра, паралельного основі циліндра.

Сформувати вміння розв'язувати задачі, що передбачають використання понять перерізу циліндра площинами.

Тип уроку: засвоєння знань, формування вмінь.

Наочність та обладнання: конспект «Перерізи циліндра площинами».

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Оскільки письмові вправи домашньої роботи відтворювали ситуації, аналогічні до розглянутих на попередньому уроці, можна перевірити лише правильність виконання обчислень.

З метою оперативної перевірки засвоєння учнями знань та вмінь можна провести математичний диктант із подальшою перевіркою та обговоренням.

Математичний диктант

1. Заповніть пропуски:
   а) Основи циліндра лежать у… площинах і…;
   б) радіусом циліндра називають…;
   в) твірні циліндра… і…;
   г) висота циліндра дорівнює…;
   д) осьовим перерізом циліндра є…;
   е) циліндр є тілом обертання, яке утворюється в результаті обертання…
2. Твірна циліндра дорівнює 15 см, а діаметр його основи — 8 см. Чому дорівнює:
   а) радіус циліндра;
   б) площа основи циліндра;
   в) довжина кола основи циліндра;
   г) діагональ осьового перерізу циліндра;
   д) площа осьового перерізу;
   е) кут нахилу діагоналі осьового перерізу до площини основи?

III. Формулювання мети й завдань уроку

Нагадуємо учням, що на попередньому уроці був розглянутий один із перерізів циліндра площиною, а саме осьовий переріз циліндра. Потім можна звернутися до учнів із запитаннями, як вони вважають, якою геометричною фігурою є переріз циліндра площиною: а) паралельною його осі; б) паралельною його основам? Якщо учні дають правильні відповіді на ці запитання, то повідомляємо, що основним завданням уроку є обґрунтування того, що перерізом циліндра площиною, паралельною його осі, є прямокутник, а площиною, паралельною основам, — круг, який дорівнює основі. У випадку, якщо в учнів виникнуть утруднення під час відповіді на це запитання, вчитель або ставить навідні запитання (можна пригадати письмову вправу № 4 із попереднього уроку), або сам відповідає на запитання і формулює мету уроку.

IV. Актуалізація опорних знань

З метою свідомого засвоєння змісту нового матеріалу учням слід повторити поняття паралельних прямої і площини, паралельних площин. Обговорити ці питання можна під час фронтального опитування. Для успішного розв'язування запланованих задач бажано повторити властивості рівнобедреного трикутника, теорему косинусів. Повторити цей матеріал можна шляхом колективного виконання усних вправ.

Фронтальне опитування

1. Сформулюйте означення прямої, паралельної площині.
2. Сформулюйте означення паралельних площин.
3. Що називають відстанню від точки до площини; від прямої до площини?

Виконання усних вправ

1. Радіус кола дорівнює 4 см. Знайдіть довжину хорди цього кола, якщо її видно з центра кола під кутом $30°$.
2. Хорду довжиною 6 см видно з центра кола під кутом $45°$. Знайдіть радіус цього кола.
3. Сторона основи рівнобедреного трикутника дорівнює 10 см, а висота — 8 см. Знайдіть основу цього трикутника.

V. Засвоєння знань

План вивчення теми

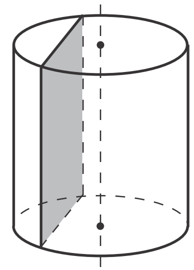
1. Переріз циліндра площиною, паралельною його осі.
2. Переріз циліндра площиною, паралельною його основам.
3. Площини симетрії циліндра.

Після формулювання тверджень про перерізи циліндра площинами доцільно запропонувати учням виконати в зошитах відповідні рисунки. Звертаємо увагу на те, як правильно виконувати зображення перерізів циліндра (*див. конспект 27*). Зазначені твердження безпосередньо випливають із означення та властивостей циліндра, тому їх доведення не є складним і його можна провести у вигляді самостійної роботи. Після цього можна запропонувати учням відтворити доведення цих тверджень на дошці.

Конспект 27

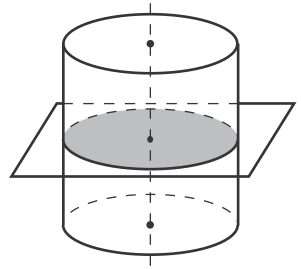
Перерізи циліндра площинами

1. Перерізом циліндра площиною, паралельною його осі, є прямокутник, дві сторони якого — твірні циліндра, а решта дві — паралельні хорди основ.



2. Перерізом циліндра площиною, паралельною його основі, є круг, що дорівнює основі.

3. Площинами симетрії циліндра є осьовий переріз і площина, яка паралельна площині основи і проходить через середину висоти циліндра



VI. Формування вмінь

Виконання усних вправ

1. Діаметр циліндра дорівнює 6 см. Знайдіть площу перерізу циліндра, проведеного паралельно його основі.
2. Переріз циліндра, проведений паралельно його осі, перетинає основу циліндра по хорді довжиною 7 см. Знайдіть площу цього перерізу, якщо висота циліндра дорівнює 11 см.
3. Переріз циліндра, проведений паралельно його осі, перетинає основу циліндра по хорді, яку видно із центра основи під кутом $120°$. Знайдіть відстань від осі циліндра до площини перерізу, якщо радіус циліндра дорівнює 8 см.
4. Переріз циліндра, проведений паралельно його осі, перетинає основу циліндра по хорді, довжина якої дорівнює 8 см. Знайдіть радіус циліндра, якщо відстань від осі циліндра до площини перерізу дорівнює 3 см.

Виконання письмових вправ

1. Висота циліндра дорівнює 6 см, радіус основи — 5 см. Знайдіть площу перерізу, проведеного паралельно осі циліндра на відстані 4 см від неї.

2. У циліндрі паралельно осі проведено переріз, що відтинає від кола основи дугу $120°$. Довжина осі циліндра дорівнює 10 см, а відстань від неї до площини перерізу — 2 см. Обчисліть площу перерізу.
3. Висота рівностороннього циліндра дорівнює H. Знайдіть площу перерізу його площиною, яка паралельна осі і проходить від неї на відстані, що дорівнює піврадіусу основи.
4. Через твірну AA_1 циліндра проведено перерізи AA_1B_1B і AA_1C_1C, площі яких відповідно дорівнюють 32 см² і 42 см², а кут між їх площинами — $60°$. Знайдіть площу перерізу BB_1C_1C.
5. У циліндрі з основою радіуса R паралельно його осі проведено площину, що перетинає нижню основу циліндра по хорді, яку видно з центра цієї основи під кутом 2α. Відрізок, що сполучає центр верхньої основи циліндра з точкою кола нижньої основи, утворює з площиною основи кут β. Знайдіть площу перерізу.

Усі задачі, що заплановані для розв'язування на уроці, спрямовані на формування понять перерізів циліндра площинами та на закріплення вмінь учнів знаходити невідомі елементи циліндра. Традиційно під час розв'язування вправ використовуємо планіметричний матеріал і матеріал курсу стереометрії 10 класу (паралельність прямих і площин, паралельність площин, відстань від точки до площини, відстань від прямої до площини тощо).

VII. Підсумки уроку

Виконання усної вправи

У циліндрі проведено переріз площиною, яка паралельна осі циліндра і перетинає основу циліндра по хорді AB. Відстань від осі циліндра до площини перерізу дорівнює 8 см, а радіус основи циліндра — 10 см. Знайдіть:

а) довжину хорди AB;

б) діагональ перерізу циліндра, якщо відомо, що цей переріз є квадратом;

в) площу перерізу, якщо відомо, що цей переріз є квадратом;

г) кут нахилу діагоналі цього перерізу до площини основи циліндра, якщо висота циліндра дорівнює 4 см;

д) площу осьового перерізу;

е) площу перерізу, паралельного основі циліндра.

VIII. Домашнє завдання

Засвоїти твердження, розглянуті на уроці.

Виконати вправи.

1. Висота циліндра дорівнює 8 см, а радіус основи — 5 см. Переріз циліндра, паралельний його осі, є квадратом. Знайдіть відстань від осі циліндра до площини перерізу.
2. Висота циліндра дорівнює 6 см, а радіус основи — 5 см. Знайдіть периметр осьового перерізу, проведеного паралельно осі циліндра на відстані 4 см від неї.
3. Висота циліндра дорівнює 10 см. Площа перерізу циліндра площиною, паралельною осі циліндра і віддаленої від неї на 5 см, дорівнює 240 см². Знайдіть радіус циліндра.
4. Висота циліндра дорівнює 5 см, а радіус основи — 6 см. Паралельно осі циліндра проведено переріз, який є квадратом. Знайдіть відстань від цього перерізу до осі циліндра.

УРОК № 36
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Мета: продовжити роботу над засвоєнням поняття циліндра, його елементів і властивостей. Формувати сталі навички знаходити невідомі елементи циліндра. Доповнити знання учнів поняттями вписаних і описаних призм і циліндрів.

Тип уроку: застосування та доповнення знань.

Наочність та обладнання: конспект «Вписані й описані призми та циліндри».

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Перевірку якості виконання письмових вправ домашнього завдання можна провести за готовими рисунками з короткими записами розв'язань (записані на дошці учнями або виконані вчителем у формі роздавального матеріалу для індивідуальної роботи) або обговорити контрольні моменти розв'язань. Вибір форми перевірки домашнього завдання залежить від рівня математичної підготовки учнів.

Перевірити засвоєння учнями змісту матеріалу, вивченого на попередніх уроках, можна за допомогою тестових завдань.

Тестові завдання

1. Знайдіть діагональ осьового перерізу циліндра, радіус основи і висота якого відповідно дорівнюють 6 см і 5 см.
   А) $\sqrt{61}$ см; Б) $\sqrt{11}$ см; В) 13 см; Г) $2\sqrt{5}$ см.
2. Осьовим перерізом циліндра є квадрат, площа якого дорівнює 36 см^2. Знайдіть площу основи циліндра.
   А) 9π см^2; Б) 36π см^2; В) 6π см^2; Г) 3π см^2.
3. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 8 см і утворює кут $30°$ з твірною циліндра. Знайдіть площу осьового перерізу.
   А) 16 см^2; Б) $16\sqrt{3}$ см^2; В) $8\sqrt{3}$ см^2; Г) 8 см^2.
4. У циліндрі на відстані 8 см від його осі проведено переріз площиною, паралельною осі циліндра. Радіус циліндра дорівнює 10 см. Знайдіть висоту циліндра, якщо відомо, що поданий переріз — квадрат.
   А) 6 см; Б) 8 см; В) 12 см; Г) 10 см.

III. Формулювання мети й завдань уроку

Мета та подальша робота на уроці безпосередньо пов’язані з рівнем знань і вмінь, які учні продемонстрували під час виконання вправ домашнього завдання, тестової роботи, а також із рівнем математичної підготовки учнів. Тому, на розсуд учителя, учні на цьому уроці або продовжують засвоювати вивчений на попередніх уроках матеріал і формують уміння застосовувати його до розв’язування типових задач (*див. попередні уроки*), або вивчають поняття вписаних і описаних циліндрів і призм. Вивчення понять вписаних і описаних циліндрів і призм не передбачено чинною програмою з математики, але на користь розглядання цих питань свідчить, по-перше, застосування цих понять під час виведення формули для обчислення об’єму циліндра, а по-друге, формування цих понять довершує цілісну картину уявлення учнів про циліндри та призми.

IV. Актуалізація опорних знань

Фронтальне опитування

1. Сформулюйте означення многокутника, вписаного в коло та описаного навколо кола.
2. Наведіть формули для обчислення довжин сторін правильних многокутників, вписаних у коло та описаних навколо кола, якщо відомий радіус кола.
3. Як знайти радіус кола, описаного навколо трикутника, якщо відомі сторона трикутника і протилежний кут?
4. Де знаходиться центр кола, описаного навколо прямокутного трикутника?
5. Сформулюйте означення призми; прямої призми; правильної призми.
6. Як знайти площу бічної поверхні призми; правильної призми?

Виконання усних вправ

1. Знайдіть площу квадрата, описаного навколо кола з радіусом 5 см.
2. Знайдіть довжину кола, описаного навколо трикутника зі стороною $2\sqrt{3}$ см.
3. Сторона трикутника дорівнює 6 см, а протилежний кут — $30°$. Знайдіть площу круга, описаного навколо цього трикутника.
4. Знайдіть площу круга, описаного навколо прямокутного трикутника, катети якого дорівнюють 6 см і 8 см.
5. Знайдіть площу бічної поверхні правильної чотирикутної призми, висота якої дорівнює 5 см, а радіус кола, вписаного в її основу, дорівнює 3 см.

V. Доповнення знань

План вивчення теми

1. Означення призми, вписаної в циліндр (циліндра, описаного навколо призми).
2. Означення призми, описаної навколо циліндра (циліндра, вписаного в призму).

Діяльність учнів на цьому етапі уроку можна організувати як самостійну роботу зі складання конспекту. Якщо дозволяє рівень математичної підготовки учнів, можна довести, що бічні ребра призми, вписаної в циліндр, є твірними циліндра, а площини граней призми, описаної навколо циліндра, є дотичними площинами до циліндра, попередньо розглянувши поняття площини, дотичної до циліндра. (Площину, яка проходить через твірну циліндра і перпендикулярна до осьового перерізу циліндра, проведеного через цю твірну, називають дотичною площиною до циліндра.)

VI. Засвоєння знань, формування вмінь і навичок

Виконання усних вправ

1. Радіус основи циліндра дорівнює 2 см, а діагональ осьового перерізу циліндра — 5 см. Знайдіть висоту призми, вписаної в циліндр.

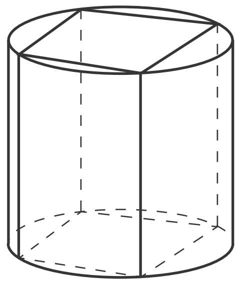
Конспект 28

Вписані й описані призми та циліндри

1. Пряму призму називають вписаною в циліндр, якщо її основи вписані в основи циліндра. При цьому циліндр називають описаним навколо призми.

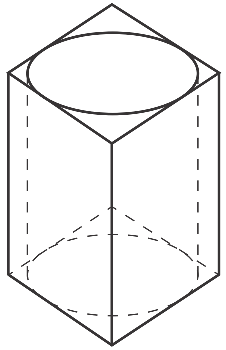
Бічні ребра призми, вписаної в циліндр є твірними циліндра.

Висоти прямої призми й описаного навколо неї циліндра рівні.



2. Пряму призму називають описаною навколо циліндра, якщо її основи описані навколо основ циліндра. При цьому циліндр називають вписаним у призму.

Висоти прямої призми і вписаного в неї циліндра рівні



2. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює $4\sqrt{2}$ і нахилена під кутом $45°$ до площини основи циліндра. Знайдіть висоту призми, описаної навколо циліндра.
3. Діагональ бічної грані правильної чотирикутної призми дорівнює $4\sqrt{3}$ і нахилена під кутом $60°$ до площини основи призми. Знайдіть радіус основи циліндра, описаного навколо призми.

Виконання письмових вправ

1. Основою прямої трикутної призми є рівнобедрений трикутник із кутом $30°$ при основі. Діагональ бічної грані призми, що містить бічну сторону основи, дорівнює 12 см і утворює кут $60°$ із площиною основи. Знайдіть висоту і площу основи циліндра, описаного навколо призми.
2. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 8 см і утворює з площиною його основи кут $30°$. Знайдіть площу бічної поверхні правильної чотирикутної призми, вписаної в циліндр.
3. Основою прямої призми є прямокутний трикутник із катетом a і протилежним кутом α. Діагональ бічної грані, що містить гіпотенузу, нахилена до площини основи під кутом β. Знайдіть висоту і радіус основи циліндра, описаного навколо цієї призми.
4. Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює d і нахилена під кутом α до площини основи. Знайдіть висоту і радіус основи циліндра, вписаного в цю призму.

Вправи, запропоновані для розв'язування на уроці, сприяють не лише засвоєнню понять вписаних і описаних призм і циліндрів, а й формуванню сталих навичок знаходження невідомих елементів циліндра, а також повторенню поняття призми та її елементів, означення кута між прямою та площиною, співвідношень між кутами і сторонами прямокутного трикутника тощо. Крім того, ці вправи є підготовчими до сприйняття поняття об'єму призми та циліндра та знаходження об'ємів циліндрів і призм.

VII. Підсумки уроку

Контрольні запитання

1. Які умови має задовольняти призма, щоб навколо неї можна було описати циліндр?
2. Які умови має задовольняти призма, щоб у неї можна було вписати циліндр?
3. У циліндр вписано чотирикутну призму. Чому дорівнює сума протилежних двогранних кутів при її бічних ребрах?
4. Чи можна в пряму чотирикутну призму вписати циліндр, якщо відомо, що суми площ протилежних бічних граней цієї призми рівні?

VIII. Домашнє завдання

Засвоїти (повторити) зміст понять, розглянутих на уроці.

Виконати вправи.

1. Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник із кутом $30°$ при вершині. Діагональ бічної грані призми, що містить основу рівнобедреного трикутника, дорівнює $6\sqrt{2}$ см і нахилена до площини основи під кутом $45°$. Знайдіть висоту і площу основи циліндра, описаного навколо призми.
2. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 18 см і утворює з площиною його основи кут $60°$. Знайдіть площу повної поверхні призми, описаної навколо циліндра.
3. Основою прямої призми є прямокутний трикутник із гіпотенузою c і гострим кутом α. Діагональ бічної грані, що містить катет, протилежний куту α, нахилена до площини основи під

кутом β. Знайдіть твірну і довжину кола основи, описаного навколо призми.

4. Діагональ бічної грані правильної трикутної призми дорівнює d і нахилена під кутом α до площини основи. Знайдіть висоту і площу основи циліндра, вписаного в цю призму.

УРОК № 37
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Мета: працювати над подальшим закріпленням учнями поняття циліндра та його елементів; продовжити роботу з формування вмінь і навичок використовувати вивчені означення та властивості до розв'язування задач на знаходження невідомих елементів циліндра.

Тип уроку: застосування знань, умінь, навичок.

Наочність та обладнання: конспекти 26–28.

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Оскільки вправи домашньої роботи відтворювали ситуації, аналогічні до розглянутих на попередньому уроці, перевіряємо лише правильність виконання обчислень.

З метою оперативної перевірки засвоєння учнями знань та вмінь можна провести математичний диктант із подальшою перевіркою та обговоренням.

Математичний диктант

1. Правильну чотирикутну призму вписано в циліндр. Твірна і радіус основи циліндра відповідно дорівнюють 7 см і 12 см. Чому дорівнює:
   а) висота призми;
   б) діагональ основи призми;
   в) діагональ осьового перерізу циліндра:
   г) площа осьового перерізу циліндра?
2. У правильну трикутну призму вписано циліндр. Сторона основи і діагональ бічної грані призми відповідно дорівнюють 3 см і 5 см. Чому дорівнює:
   а) висота циліндра;

   б) радіус основи циліндра;
   в) діагональ осьового перерізу циліндра;
   г) площа бічної поверхні призми?

III. Формулювання мети й завдань уроку

Головна мета уроку зумовлена його місцем у розділі й полягає в тому, щоб закріпити означення і властивості циліндра та його елементів, сформувати сталі вміння і навички використовувати ці твердження під час розв'язування задач.

IV. Відтворення і систематизація опорних знань, умінь

Учням пропонуємо самостійно повторити зміст матеріалу, вивченого на попередніх уроках, за підручником або конспектами 26–28.

V. Формування вмінь і навичок

Виконання усних вправ

1. Висота циліндра дорівнює 5 см, а площа його основи — 9π см^2. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра.
2. Площа перерізу циліндра, проведеного паралельно його осі, дорівнює 54 см^2. Знайдіть відстань від площини перерізу до осі циліндра, якщо висота циліндра дорівнює 9 см, а радіус основи — 5 см.
3. Площа перерізу циліндра, проведеного паралельно його основам, дорівнює 16π см^2. Знайдіть висоту циліндра, якщо діагональ осьового перерізу дорівнює 10 см.
4. Переріз циліндра, паралельний його осі, є квадратом зі стороною 2 см. Цей переріз перетинає нижню основу циліндра по хорді, яку видно із центра цієї основи під прямим кутом. Чому дорівнюють висота і радіус основи циліндра?

Виконання письмових вправ

1. Осьовим перерізом циліндра є прямокутник, діагоналі якого дорівнюють 8 см і утворюють кут $30°$. Знайдіть площу основи циліндра, якщо його висота дорівнює 2 см.
2. Осьовим перерізом циліндра є квадрат, площа якого дорівнює 20 см^2. Знайдіть площу перерізу, проведеного паралельно осі циліндра, якщо його діагональ дорівнює 5 см.
3. Пряма, паралельна основі циліндра, перетинає його бічну поверхню в точках A і B. Знайдіть довжину відрізка AB, якщо відстань прямої AB від осі циліндра дорівнює 1,2 дм, а радіус основи циліндра — 1,3 дм.

4. Пряма, що перетинає основи циліндра в точках, які лежать на колах основ, утворює з площинами основ під кутом $60°$ і віддалена від його осі на відстань 8 см. Знайдіть висоту циліндра, якщо радіус основи дорівнює 17 см.
5. У нижній основі циліндра проведено хорду завдовжки 8 см, яку видно із центра нижньої основи під кутом $120°$, а із центра верхньої основи — під кутом $60°$. Знайдіть висоту циліндра.
6. У циліндрі паралельно його осі проведено площину, що перетинає його нижню основу по хорді, яку видно із центра цієї основи під кутом $60°$. Відрізок, що сполучає центр верхньої основи циліндра із серединою хорди нижньої основи, нахилений до площини основи під кутом $30°$. Знайдіть площу перерізу, діагональ якого дорівнює d.
7. Висота циліндра у 2,4 раза більша від його діаметра. Знайдіть площу перерізу циліндра площиною, яка проведена паралельно його осі на відстані 4 см від неї, якщо діагональ осьового перерізу дорівнює 26 см.
8. Навколо куба описано циліндр. Знайдіть площу основи циліндра, якщо діагональ куба дорівнює 6 см.

У вправах, що заплановано для виконання на уроці, розглянуто всі ситуації, пов'язані із циліндром. Виконання цих вправ передбачає вільне володіння:
- ✓ означенням циліндра, його основ, радіуса основи, висоти, твірних;
- ✓ властивостями циліндра та його елементів;
- ✓ поняттям перерізів циліндра, зокрема осьового перерізу, перерізу, паралельного основі;
- ✓ поняттям циліндра, вписаного в призму та описаного навколо призми.

У випадку, якщо всі учні не встигнуть протягом одного уроку розв'язати запропоновані вправи, їх можна використовувати як додаткові або індивідуальні завдання.

VI. Підсумки уроку

Підсумком уроку може бути виділення учнями основних видів задач на застосування вивчених тверджень (класифікацію можна провести за різними критеріями).

VII. Домашнє завдання

Повторити зміст теоретичного матеріалу з теми «Циліндр і його елементи».

Виконати домашню самостійну роботу.

Умова домашньої самостійної роботи

1. Осьовим перерізом циліндра є квадрат, площа якого дорівнює 121 см^2. Знайдіть площу основи циліндра.
2. Радіус основи циліндра дорівнює 37 см, а висота — 24 см. На якій відстані від осі циліндра знаходиться переріз, що має форму квадрата?
3. У циліндрі висотою 6 см проведено паралельно осі переріз, віддалений від неї на відстань 4 см. Знайдіть радіус циліндра, якщо площа цього перерізу дорівнює 36 см^2.
4. У циліндр, радіус основи якого дорівнює R, вписано трикутну призму, основою якої є прямокутний трикутник із гострим кутом α. Кут між діагоналлю бічної грані, що містить гіпотенузу, і гранню, протилежною куту α, дорівнює $45°$. Знайдіть висоту циліндра.

УРОК № 38
КОНУС І ЙОГО ЕЛЕМЕНТИ

Мета: сформувати поняття конуса та його елементів (основи, твірних, радіуса основи, висоти, осі, осьового перерізу); домогтися засвоєння властивостей конуса; сформувати вміння розв'язувати задачі, що передбачають застосування цих понять і властивостей.

Тип уроку: засвоєння знань, формування вмінь.

Наочність та обладнання: конспект «Конус і його елементи», моделі конусів.

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Збираємо зошити учнів на перевірку й оцінюємо домашню самостійну роботу.

III. Формулювання мети й завдань уроку

На цьому етапі уроку вчитель може показати учням логіку вивчення теми «Тіла обертання» і звернути увагу на те, що після циліндра вивчають конус. Потім можна обговорити питання, чому конус є тілом обертання. Учитель пропонує учням запитання: «Результатом обертання якої геометричної фігури і навколо якої осі є конус?». У разі, якщо виникнуть утруднення під час відповіді, запитання можна сформулювати інакше: «Яке геометричне тіло є результатом обертання прямокутного трикутника навколо одного з його катетів?» Скориставшися власним досвідом і знаннями, набутими в попередніх класах, учні відповідають, що таким тілом обертання є конус. Тож основною метою уроку є формулювання строгого математичного означення конуса та його елементів і вивчення властивостей конуса.

IV. Актуалізація опорних знань

Фронтальне опитування

1. Сформулюйте означення піраміди, основи, вершини, бічних ребер, висоти піраміди.
2. Сформулюйте означення правильної піраміди
3. Що називають апофемою правильної піраміди?
4. Які властивості має правильна піраміда?

V. Засвоєння знань

План вивчення теми

1. Означення конуса, вершини, основи конуса.
2. Означення твірних конуса.
3. Означення прямого конуса.
4. Означення висоти конуса.
5. Прямий круговий конус як тіло, утворене в результаті обертання прямокутного трикутника навколо одного з катетів. Вісь конуса.
6. Означення осьового перерізу конуса.
7. Властивості конуса та його елементів.

Зважаючи на те, що новий матеріал складається з досить великої кількості означень, його викладення можна провести у формі лекції. Доцільно проілюструвати всі основні поняття, пов'язані з конусом, на моделях і рисунках.

Наведене означення конуса має описово-конструктивний характер. Сформулювавши це означення, бажано запропонувати учням виконати рисунок конуса в зошитах. Звернути увагу на те, як правильно виконувати зображення конуса, зокрема осьового перерізу конуса (*див. конспект 29*).

Зауважуємо, що в школі вивчають тільки прямий круговий конус, тобто конус, основою якого є круг, а вісь перпендикулярна до площини основи. Тому далі під словом «конус» ми будемо розуміти прямий круговий конус.

Під час пояснення нового матеріалу ще раз звертаємо увагу учнів на те, що прямий круговий конус можна утворити обертанням прямокутного трикутника навколо одного з його катетів.

Доцільно звернути увагу учнів на те, що конструктивні означення конуса й піраміди (а отже, і їх елементів) аналогічні. (Така аналогія вже була встановлена раніше під час вивчення поняття циліндра.)

Конспект 29

Конус і його елементи

1. Конусом (круговим конусом) називають тіло, яке складається з круга (основи конуса), точки, що не належить площині цього круга (вершини конуса), і всіх відрізків, що сполучають вершину конуса з точками основи.

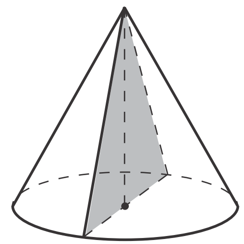
2. Відрізки, які сполучають вершину конуса з точками кола основи, називають твірними конуса.

3. Конус називають прямим, якщо пряма, що проходить через вершину конуса і центр кола основи, перпендикулярна до площини основи.

4. Висотою конуса називають перпендикуляр, проведений із вершини конуса до площини основи.

5. Прямий круговий конус є тілом обертання, яке утворюється в результаті обертання прямокутного трикутника навколо одного з його катетів. Пряма, яка містить висоту конуса, є його віссю.

6. Переріз конуса площиною, яка проходить через його вісь, називають осьовим перерізом конуса.



7. Властивості конуса та його елементів:

✓ усі твірні конуса рівні;

✓ усі твірні конуса утворюють рівні кути з площиною основи;

✓ осьовим перерізом конуса є рівнобедрений трикутник, бічні сторони якого — твірні конуса, а основа трикутника — діаметр основи конуса

VI. Формування вмінь

Виконання усних вправ

1. Чи має конус центр симетрії; осі симетрії; площини симетрії?
2. Назвіть спільні властивості піраміди і конуса.
3. Твірна конуса дорівнює 13 см, а радіус основи — 5 см. Чому дорівнює висота конуса?
4. Прямокутний трикутник із катетами 5 см і 3 см обертається навколо меншого з катетів. Чому дорівнює:

а) радіус основи конуса;
б) висота конуса;
в) твірна конуса?

Виконання письмових вправ

1. Твірна конуса дорівнює 10 м, а висота конуса — 8 м. Знайдіть площу основи конуса.
2. Діаметр основи конуса дорівнює 8 м, а твірна нахилена до площини основи під кутом $60°$. Чому дорівнює висота конуса?
3. Осьовим перерізом конуса є правильний трикутник. Твірна конуса дорівнює $6\sqrt{3}$ см. Обчисліть висоту конуса.
4. Висота конуса дорівнює 4 см, а твірна — 5 см. Знайдіть площу осьового перерізу конуса.
5. В основі конуса проведено хорду, довжина якої дорівнює 50 см. Ця хорда віддалена від вершини конуса на відстань 60 см. Знайдіть радіус конуса, якщо його висота дорівнює 52 см.
6. В основі конуса проведено хорду AB на відстані 3 см від центра O основи. MO — висота конуса, $MO=6\sqrt{2}$ см. Знайдіть відстань від точки O до площини AMB.
7. Точка M ділить висоту SO конуса у відношенні $4:5$, починаючи від вершини конуса. Через точку M паралельно основі конуса проведено пряму, яка перетинає твірні конуса в точках A і B. Знайдіть довжину відрізка AB, якщо радіус основи конуса дорівнює 18 см.

Більшість запропонованих задач є типовими вправами, спрямованими на відпрацювання поняття конуса, його елементів та властивостей. З метою свідомого засвоєння зазначених понять та властивостей під час розв'язування задач доцільно вимагати від учнів формулювання відповідних означень та властивостей, а також обґрунтування кута між прямою і площиною (письмова вправа № 2), відстані від точки до прямої (письмові вправи № 5 і 6) та відстані від точки до площини (письмова вправа № 6).

Письмові вправи № 5, 6 і 7, крім того, що сприяють засвоєнню поняття конуса та його елементів, є й підготовчими вправами до сприйняття теми «Перерізи конуса площинами. Зрізаний конус».

VII. Підсумки уроку

Контрольні запитання

1. Сформулюйте означення конуса, основи і вершини конуса.
2. Наведіть приклади предметів побуту, що мають форму конуса.

3. Сформулюйте означення твірної конуса, висоти конуса.
4. Чи існує конус, у якого:
   а) висота більша від твірної;
   б) висота і твірна рівні?
5. Сформулюйте означення осьового перерізу конуса.
6. Чи існує конус, осьовим перерізом якого є:
   а) правильний трикутник;
   б) прямокутний трикутник;
   в) тупокутний трикутник?

VIII. Домашнє завдання

Вивчити зміст понять, розглянутих на уроці.
Виконати вправи.

1. Висота конуса дорівнює 12 м, а площа основи конуса — 25π см^2. Знайдіть довжину твірної конуса.
2. Твірна конуса дорівнює $2\sqrt{3}$ см і утворює з його висотою кут $60°$. Знайдіть довжину кола основи конуса.
3. Площа основи конуса дорівнює 36π см^2. Знайдіть площу осьового перерізу конуса, якщо відомо, що цей переріз — прямокутний трикутник.
4. В основі конуса проведено хорду CD на відстані 9 см від центра O основи. SO — висота конуса, $SO=3\sqrt{3}$ см. Знайдіть відстань від точки O до площини CSD.

УРОК № 39
ПЕРЕРІЗИ КОНУСА ПЛОЩИНАМИ. ЗРІЗАНИЙ КОНУС

Мета: розглянути основні види перерізів конуса:
- ✓ переріз, що проходить через дві твірні;
- ✓ переріз, паралельний основі конуса.

Домогтися засвоєння властивостей цих перерізів. Сформувати поняття зрізаного конуса та його елементів. Сформувати вміння розв'язувати задачі, що передбачають використання цих понять та властивостей.

Тип уроку: засвоєння знань, формування вмінь.

Наочність та обладнання: конспект «Перерізи конуса площинами. Зрізаний конус», моделі зрізаних конусів.

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Одним із варіантів проведення цього етапу уроку є виконання тестових завдань, аналогічних вправам домашньої роботи. Одразу після виконання тестової роботи доцільно провести перевірку і обговорення виконаних завдань.

Тестові завдання

1. Твірна і площа основи конуса відповідно дорівнюють 17 см і 64 см^2. Чому дорівнює висота конуса?
   А) 12 см; Б) 15 см; В) 13 см; Г) 14 см.
2. Висота конуса дорівнює $\sqrt{3}$ см і утворює з його твірною кут 30°. Чому дорівнює радіус основи конуса?
   А) 3 см; Б) $2\sqrt{3}$ см; В) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ см; Г) 1 см.
3. Периметр осьового перерізу конуса дорівнює 18 см. Чому дорівнює площа основи конуса, якщо осьовий переріз є правильним трикутником?
   А) 36π см^2; Б) 6π см^2; В) 9π см^2; Г) 12π см^2.
4. Радіус і висота конуса відповідно дорівнюють 4 см і 3 см. Чому дорівнює відстань від центра основи до твірної конуса?
   А) 2,4 см; Б) 1,75 см; В) 1 см; Г) 2 см.

III. Формулювання мети й завдань уроку

Нагадуємо учням, що на попередньому уроці був розглянутий один із перерізів конуса площиною, а саме осьовий переріз конуса. Потім можна запитати учнів, як вони вважають, якою геометричною фігурою є переріз конуса площиною: а) яка проходить через вершину і хорду конуса; б) паралельною його основі? Крім того, можна обговорити питання про те, на які частини ділить конус площина, паралельна його основі. Після обговорення відповідей на ці запитання повідомляємо, що основними завданнями уроку є обґрунтування того, що перерізом конуса площиною, паралельною площині основи, є круг, а також формулювання строгого математичного означення зрізаного конуса та вивчення його властивостей.

IV. Актуалізація опорних знань

З метою свідомого засвоєння учнями теореми про переріз конуса, паралельний площині основи, доцільно повторити поняття перетворення гомотетії та означення подібних трикутників. Для успішного розв'язування задач на застосування поняття зрізаного конуса бажано повторити означення та властивості рівнобічної та прямокутної трапецій та їх елементів.

Цей етап уроку можна провести у формі фронтального опитування.

Фронтальне опитування

1. Що називають перетворенням гомотетії?
2. У яку фігуру переводить перетворення гомотетії:
   а) площину; б) круг?
3. Які трикутники називають подібними?
4. Чи правильно, що гомотетичні трикутники подібні?
5. Сформулюйте означення рівнобічної трапеції. Які властивості має рівнобічна трапеція?
6. Чи існує трапеція, висота якої дорівнює одній із бічних сторін? Як називають таку трапецію?

V. Засвоєння знань

План вивчення теми

1. Переріз конуса площиною, яка проходить через його вершину і хорду.
2. Переріз конуса площиною, паралельною площині його основи.
3. Означення зрізаного конуса.
4. Елементи зрізаного конуса (основи, висота, твірні).
5. Зрізаний конус як тіло обертання прямокутної трапеції навколо меншої бічної сторони.
6. Осьовий переріз зрізаного конуса.
7. Властивості зрізаного конуса.

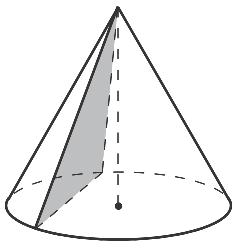
Як і на попередньому уроці, викладення нового матеріалу можна провести у формі лекції. Доведення теореми про переріз конус площиною, паралельною площині його основи, можна провести із залученням учнів, а можна запропонувати учням самостійно прочитати формулювання теореми та її доведення в підручнику, а потім викликати одного з учнів до дошки. Доцільно проілюструвати всі поняття, розглянуті на уроці, на моделях і рисунках.

Сформулювавши означення зрізаного конуса, бажано запропонувати учням виконати його рисунок у зошитах. Звертаємо увагу на те, як правильно виконувати зображення зрізаного конуса: слід тонкими лініями виконати зображення повного конуса, побудувати його переріз, паралельний площині основи, а потім навести контури зрізаного конуса.

Під час пояснення нового матеріалу звертаємо увагу учнів на те, що зрізаний конус можна утворити обертанням прямокутної трапеції навколо меншої бічної сторони.

Конспект 30

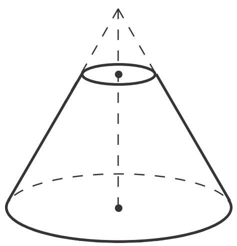
Перерізи конуса площинами. Зрізаний конус



1. Перерізом конуса площиною, яка проходить через його вершину і хорду, є рівнобедрений трикутник, бічними сторонами якого є твірні конуса. (Окремий випадок — осьовий переріз.)

2. Теорема. Перерізом конуса площиною, паралельною площині основи, є круг, центр якого лежить на осі конуса. Твірна й висота конуса діляться площиною цього перерізу на пропорційні частини.

Наслідок. Площа перерізу конуса, паралельного площині основи, відноситься до площі основи, як квадрати відстаней від вершини конуса до площин перерізу й основи.



3. Зрізаним конусом називають частину конуса, що лежить між основою і площиною, паралельною основі.

4. Основами зрізаного конуса є основа цього конуса і круг, що одержали у перерізі.

Висота зрізаного конуса — це перпендикуляр, проведений із точки однієї основи до площини другої.

Твірними зрізаного конуса є відрізки твірних поданого конуса, обмежені площинами основ зрізаного конуса.

5. Зрізаний конус є тілом, яке утворено в результаті обертання прямокутної трапеції навколо меншої бічної сторони. Більша сторона трапеції є твірною зрізаного конуса. Пряма, яка проходить через центри основ зрізаного конуса, є його віссю.

6. Осьовим перерізом зрізаного конуса називають переріз площиною, яка проходить через його вісь.

7. Властивості зрізаного конуса:

✓ твірні зрізаного конуса рівні;

✓ осьовим перерізом зрізаного конуса є рівнобічна трапеція, бічні сторони якої — твірні, а основи — діаметри основ зрізаного конуса

VI. Формування вмінь

Виконання усних вправ

1. Через середину висоти конуса проведено площину, паралельну його основі. Чому дорівнює відношення площі утвореного перерізу до площини основи конуса?
2. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 3 м і 6 м, висота — 4 м. Знайдіть твірну цього конуса.
3. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють R і r, а твірна нахилена до площини основи під кутом $45°$. Знайдіть висоту цього конуса.
4. Висота зрізаного конуса дорівнює H. Знайдіть твірну цього конуса, якщо вона нахилена до площини основи під кутом $30°$.

Виконання письмових вправ

1. Кут при вершині осьового перерізу конуса дорівнює $120°$. Чому дорівнює площа перерізу конуса, проведеного через дві твірні, кут між якими дорівнює $60°$, якщо висота конуса дорівнює 1 м?
2. У конусі проведено переріз через його вершину під кутом $30°$ до його висоти. Обчисліть площу перерізу, якщо висота конуса дорівнює $3\sqrt{3}$ см, а радіус основи — 5 см.
3. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 11 см і 16 см, а твірна — 13 см. Знайдіть відстань від центра меншої основи до кола більшої.
4. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 3 см і 7 см, а твірна — 5 см. Знайдіть площу осьового перерізу цього конуса.
5. Прямокутна трапеція з гострим кутом $45°$ обертається навколо меншої бічної сторони. Знайдіть площу осьового перерізу зрізаного конуса, утвореного в результаті цього обертання, якщо більша бічна сторона і менша основа відповідно дорівнюють $12\sqrt{2}$ см і 6 см.

Запропоновані задачі спрямовані на засвоєння поняття перерізів конуса площинами, означення зрізаного конуса та його властивостей. З метою свідомого засвоєння зазначених понять та властивостей доцільно під час розв'язування задач вимагати від учнів формулювання відповідних означень та властивостей, а також обґрунтування кута між прямою і площиною (письмова вправа № 2). Традиційно під час розв'язування задач використовується планіметричний матеріал, зокрема співвідношення між сторонами та кутами прямокутного трикутника, обчислення площ трикутників і трапецій тощо.

VII. Підсумки уроку

Контрольні запитання

1. Якою геометричною фігурою є переріз конуса площиною, проведеною через його вершину і хорду основи?
2. Якою геометричною фігурою є переріз конуса площиною, перпендикулярною до його осі?
3. Сформулюйте означення зрізаного конуса.
4. Наведіть приклади предметів побуту, що мають форму зрізаного конуса.

VIII. Домашнє завдання

Вивчити зміст понять, розглянутих на уроці.

Виконати вправи.

1. Через вершину конуса проведено площину, що перетинає його основу по хорді, яку видно із центра основи під кутом $120°$, а з вершини — під кутом $60°$. Обчисліть площу перерізу, якщо радіус основи конуса дорівнює 2 см.
2. Площа перерізу конуса площиною, паралельною його основі, складає 4 % від площі основи. У якому відношенні ця площини ділить висоту конуса.
3. Твірна зрізаного конуса дорівнює 16 см і нахилена до площини основи під $60°$. Радіус однієї основи удвічі більший від радіуса другої основи. Знайдіть кожний із радіусів.
4. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 3 см і 7 см. Знайдіть периметр осьового перерізу цього конуса, якщо його висота дорівнює радіусу меншої основи.

УРОК № 40
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Мета: продовжити роботу над засвоєнням поняття конуса та зрізаного конуса, їх елементів і властивостей; формувати сталі навички знаходити невідомі елементи конуса; доповнити знання учнів поняттями вписаних і описаних пірамід і конусів.

Тип уроку: застосування та доповнення знань.

Наочність та обладнання: конспект «Вписані й описані піраміди і конуси», моделі конусів і пірамід.

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Перевірку якості виконання письмових вправ домашнього завдання можна провести за готовими рисунками з короткими записами розв'язань (записані на дошці учнями або виконані вчителем у формі роздавального матеріалу для індивідуальної роботи) або обговорити контрольні моменти розв'язань. Вибір форми перевірки домашнього завдання залежить від рівня математичної підготовки учнів.

Перевірку засвоєння учнями змісту матеріалу, вивченого на попередніх уроках, можна за допомогою самостійної роботи з подальшою перевіркою (або взаємоперевіркою) та обговоренням.

Самостійна робота

Варіант 1

1. Твірна конуса дорівнює 6 см і нахилена до площини основи під кутом $30°$. Знайдіть площу осьового перерізу конуса.
2. Через вершину конуса з основою радіуса 4 см проведено площину, що перетинає його основу по хорді, яку видно із центра основи під кутом $60°$, а з вершини — під кутом $90°$. Знайдіть площу перерізу.
3. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 4 см і 1 см, а твірна — 5 см. Знайдіть довжину сторони трапеції, у результаті обертання якої навколо цієї сторони утворився поданий конус.
4. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 3 см і 7 см, а твірна — 5 см. Знайдіть площу осьового перерізу цього конуса.

Варіант 2

1. Твірна конуса дорівнює 8 см і нахилена до площини основи під кутом $45°$. Знайдіть площу осьового перерізу конуса.
2. Через вершину конуса з основою радіуса 2 см проведено площину, що перетинає його основу по хорді, яку видно із центра основи під кутом $120°$, а з вершини — під кутом $60°$. Знайдіть площу перерізу.
3. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 3 см і 6 см, а висота — 4 см. Знайдіть довжину більшої бічної сторони трапеції, у результаті обертання якої навколо меншої бічної сторони утворився цей конус.
4. Твірна конуса дорівнює 5 см, а радіуси основ — 3 см і 6 см. Знайдіть площу осьового перерізу цього конуса.

III. Формулювання мети й завдань уроку

Мета та подальша робота на уроці безпосередньо пов'язані з рівнем знань і вмінь, які учні продемонстрували під час виконання вправ домашнього завдання, самостійної роботи, а також узагалі рівнем математичної підготовки учнів. Тому, на розсуд учителя, учні на цьому уроці або продовжують засвоювати вивчений на попередніх уроках матеріал і формують уміння застосовувати його до розв'язування типових задач (див. попередні уроки), або вивчають поняття вписаних і описаних конусів і пірамід. Вивчення понять вписаних і описаних конусів і пірамід не передбачено чинною програмою з математики, але на користь розглядання цих питань свідчить, по-перше, застосування цих понять під час виведення формули для обчислення об'єму конуса, а по-друге, те що, формування цих понять довершує цілісну картину уявлення учнів про конуси та піраміди.

IV. Актуалізація опорних знань

Фронтальне опитування

1. Сформулюйте означення піраміди. Використовуючи модель піраміди, покажіть її вершину, основу, бічні ребра.
2. Як обчислити площі бічної та повної поверхонь піраміди?
3. Яку піраміду називають правильною?
4. Що називають апофемою правильної піраміди?
5. Наведіть формулу для обчислення площі бічної поверхні правильної піраміди.
6. Сформулюйте означення многокутника, вписаного в коло та описаного навколо кола.

V. Засвоєння знань

План вивчення теми

1. Означення піраміди, вписаної в конус (конуса, описаного навколо піраміди).
2. Означення піраміди, описаної навколо конуса (конуса, вписаного в піраміду).

Вивчення нового матеріалу організовуємо як самостійну діяльність учнів зі складання конспекту. Бажано звернути увагу учнів на те, що оскільки бічні ребра піраміди, вписаної в конус, є твірними конуса, то вони рівні. Правильне й обернене твердження: якщо всі бічні ребра піраміди рівні, то вона є вписаною в деякий конус.

Якщо дозволяє рівень математичної підготовки учнів, то можна довести, що площини бічних граней описаної піраміди є дотичними площинами конуса. (Дотичною площиною конуса називають площину, яка проходить через твірну конуса і є перпендикулярною до осьового перерізу, проведеного через цю твірну.)

Можна повідомити учням, що поряд із вписаними в конус пірамідами, під час розв'язування задач зустрічаються циліндри і призми, вписані в конус.

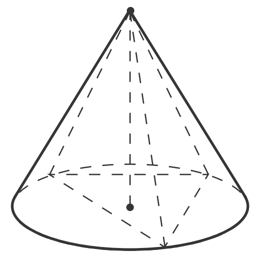
Конспект 31

Вписані й описані піраміди і конуси

1. Піраміду називають вписаною в конус, якщо їх вершини збігаються, а основа піраміди вписана в основу конуса.

При цьому конус називають описаним навколо піраміди.

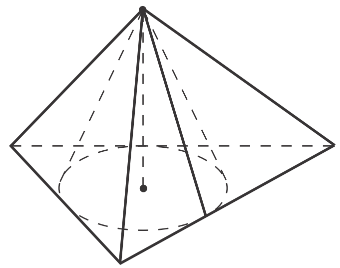
Висоти піраміди й описаного конуса рівні, а бічні ребра піраміди є твірними конуса.



2. Піраміду називають описаною навколо конуса, якщо їх вершини збігаються, а основа піраміди описана навколо конуса.

При цьому конус називають вписаним у піраміду.

Висоти піраміди й вписаного конуса рівні, а висоти бічних граней піраміди є твірними конуса



VI. Формування вмінь

Виконання усних вправ

1. У конус вписано правильну чотирикутну піраміду. Висота і радіус основи конуса відповідно дорівнюють 3 см і 4 см. Чому дорівнює:
   а) бічне ребро піраміди;
   б) сторона піраміди;
   в) апофема піраміди;
   г) площа основи піраміди?
2. У правильну трикутну піраміду вписано конус. Бічне ребро і сторона основи цієї піраміди відповідно дорівнюють 5 см і 6 см. Чому дорівнює:
   а) радіус основи конуса;
   б) висота конуса;

в) твірна конуса;
г) площа осьового перерізу конуса?

Виконання письмових вправ

1. У правильну чотирикутну піраміду зі стороною основи a і апофемою m вписано конус. Знайдіть радіус основи і висоту конуса.
2. У конус вписано правильну трикутну піраміду. Знайдіть радіус основи і висоту конуса, якщо сторона основи піраміди дорівнює a, а її бічне ребро дорівнює b.
3. Навколо правильної трикутної піраміди описано конус. Двогранний кут при основі піраміди дорівнює α, а сторона основи — a. Знайдіть висоту конуса.
4. У правильній трикутній піраміді сторона основи дорівнює a, а плоский кут при вершині — α. Знайдіть твірну і радіус основи конуса, вписаного в піраміду.
5. У правильній чотирикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює α. Знайдіть твірну і радіус основи вписаного конуса, якщо площа основи піраміди дорівнює Q.

Вправи, що запропоновані для розв'язування на уроці, сприяють не лише засвоєнню понять вписаних і описаних пірамід і конусів, а й формуванню сталих навичок знаходження невідомих елементів конуса, а також повторенню поняття піраміди та її елементів, означення двогранного кута, співвідношень між кутами і сторонами прямокутного трикутника, означень вписаних та описаних многокутників тощо. Крім того, ці вправи є підготовчими до сприйняття поняття об'єму піраміди та конуса, знаходження об'ємів конусів і пірамід, площі бічної поверхні конуса.

VII. Підсумки уроку

Контрольні запитання

1. Які умови повинна задовольняти піраміда, щоб:
   а) навколо неї можна було описати конус;
   б) у неї можна було вписати конус?
2. Чи правильно, що вершина конуса, вписаного в піраміду, однаково віддалена від сторін основи піраміди?
3. Чи завжди висота конуса, вписаного в піраміду, є і висотою піраміди?
4. У конус вписано трикутну піраміду, в основі якої лежить прямокутний трикутник. Доведіть, що висота конуса є висотою більшої бічної грані піраміди.

VIII. Домашнє завдання

Засвоїти зміст понять, розглянутих на уроці.
Виконати вправи.

1. У конус вписано правильну чотирикутну піраміду. Знайдіть радіус основи і висоту конуса, якщо сторона основи піраміди дорівнює a, а її бічне ребро — b.
2. У правильну трикутну піраміду зі стороною основи a і апофемою m вписано конус. Знайдіть радіус основи і висоту конуса.
3. У правильній трикутній піраміді сторона основи дорівнює a, а плоский кут при вершині — α. Знайдіть висоту і площу основи конуса, вписаного в піраміду.
4. У правильній чотирикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює α. Знайдіть радіус основи і твірну конуса, описаного навколо піраміди, якщо висота піраміди дорівнює H.

УРОК № 41
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Мета: працювати над подальшим закріпленням учнями поняття конуса та його елементів; продовжити роботу з формування вмінь і навичок використовувати вивчені означення та властивості до розв'язування задач на знаходження невідомих елементів конуса.

Тип уроку: застосування знань, умінь, навичок.

Наочність та обладнання: конспекти 29–31.

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Оскільки вправи домашньої роботи відтворювали ситуації, аналогічні до розглянутих на попередньому уроці, перевіряємо лише правильність виконання обчислень.

З метою оперативної перевірки засвоєння учнями знань та вмінь можна провести тестову роботу з подальшою перевіркою та обговоренням.

Тестові завдання

1. У конус вписано правильну чотирикутну піраміду. Висота і радіус основи конуса відповідно дорівнюють 1 см і $2\sqrt{2}$ см. Знайдіть бічне ребро піраміди.
   А) $\sqrt{5}$ см; Б) 9 см; В) 3 см; Г) $\sqrt{3}$ см.

2. Навколо правильної трикутної піраміди описано конус. Знайдіть твірну цього конуса, якщо сторона основи піраміди дорівнює $\sqrt{3}$ см, а висота піраміди — $4\sqrt{5}$ см.
А) $\sqrt{83}$ см; Б) 9 см; В) 13 см; Г) $3\sqrt{5}$ см.
3. Навколо конуса описано правильну трикутну піраміду. Знайдіть апофему цієї піраміди, якщо висота конуса дорівнює 15 см, а площа його основи — 64π см^2.
А) 25 см; Б) $\sqrt{161}$ см; В) 17 см; Г) 20 см.
4. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник із катетами 6 см і 8 см. Знайдіть висоту конуса, описаного навколо цієї піраміди, якщо всі її бічні ребра дорівнюють 13 см.
А) 10 см; Б) 12 см; В) 15 см; Г) $2\sqrt{2}$ см.

III. Формулювання мети й завдань уроку

Головна мета уроку зумовлена його місцем у розділі й полягає в тому, щоб закріпити означення і властивості конуса та його елементів, сформувати сталі вміння і навички використовувати ці твердження під час розв'язування задач.

IV. Відтворення і систематизація опорних знань, умінь

Учням пропонуємо самостійно повторити зміст матеріалу, вивченого на попередніх уроках, за підручником або конспектами 29–31.

V. Формування вмінь і навичок

Виконання усних вправ

1. Осьовим перерізом конуса є прямокутний трикутник. Чому дорівнює площа осьового перерізу, якщо твірна конуса дорівнює 6 см?
2. Площа основи конуса дорівнює 36π см^2, а площа осьового перерізу — 48 см^2. Чому дорівнює твірна конуса?
3. Площі основ зрізаного конуса дорівнюють 25π см^2 і 81π см^2. Чому дорівнює твірна конуса, якщо вона нахилена до площини більшої основи конуса під кутом $45°$?

Виконання письмових вправ

1. Площа осьового перерізу конуса дорівнює $16\sqrt{3}$ см^2. Знайдіть висоту і площу основи конуса, якщо осьовим перерізом є правильний трикутник.
2. Довжина сторони квадрата, вписаного в основу конуса, дорівнює a, твірна конуса нахилена до площини основи під кутом α. Знайдіть площу основи й висоту конуса.

3. В основі конуса проведено хорду, довжина якої дорівнює m, її видно із центра основи під кутом α. Знайдіть висоту конуса, якщо його твірна нахилена до площини основи під кутом β.
4. Кут при вершині осьового перерізу конуса дорівнює 2α. Периметр осьового перерізу конуса дорівнює $2p$. Знайдіть висоту конуса.
5. Через вершину конуса з основою радіуса R проведено площину, що перетинає його основу по хорді, яку видно із центра основи під кутом α, а з вершини — під кутом β. Обчисліть площу перерізу.
6. Через вершину конуса проведено площину під кутом $45°$ до площини основи. Ця площина перетинає основу по хорді, яку видно із центра основи під кутом $60°$. Знайдіть площу перерізу, якщо відстань від центра основи до хорди дорівнює 6 см.
7. Твірна зрізаного конуса дорівнює 29 см, а висота — 20 см. Радіуси основ відносяться як $5:9$. Знайдіть периметр осьового перерізу.
8. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють R і r, твірна — l. Знайдіть твірну і висоту повного конуса, від якого відділено зрізаний.
9. Конус вписано в правильний тетраедр із висотою H. Знайдіть площу осьового перерізу конуса.

У вправах, що заплановано для виконання на уроці, розглянуто всі ситуації, пов'язані з конусом.

Виконання цих вправ передбачає вільне володіння:
- ✓ означенням конуса, його вершини, основи, радіуса основи, висоти, твірних;
- ✓ властивостями конуса та його елементів;
- ✓ поняттям перерізів конуса, зокрема осьового перерізу, перерізу, паралельного основі;
- ✓ означенням зрізаного конуса та його елементів;
- ✓ поняттям конуса, вписаного в піраміду та описаного навколо піраміди.

У випадку, якщо всі учні не встигнуть протягом одного уроку розв'язати запропоновані вправи, їх можна використовувати як додаткові або індивідуальні завдання.

VI. Підсумки уроку

Підсумком уроку може бути виділення учнями основних видів задач на застосування вивчених тверджень (класифікацію можна провести за різними критеріями).

VII. Домашнє завдання

Повторити зміст теоретичного матеріалу з теми «Конус і його елементи».

Виконати домашню самостійну роботу.

Умова домашньої самостійної роботи

1. Довжина сторони правильного трикутника, вписаного в основу конуса, дорівнює a, кут при вершині осьового перерізу конуса — 2α. Знайдіть радіус і твірну конуса.
2. Висота конуса дорівнює h. Кут при вершині осьового перерізу конуса дорівнює 2α. Знайдіть периметр осьового перерізу конуса.
3. Через вершину конуса проведено площину під кутом $45°$ до площини основи. Ця площина перетинає основу конуса по хорді, що дорівнює радіусу основи. Знайдіть площу осьового перерізу конуса, якщо відстань від його вершини до хорди дорівнює 6 см.
4. Радіуси основ зрізаного конуса відносяться як $1:3$, твірна утворює з площиною основи кут $45°$, висота дорівнює h. Знайдіть площі основ.
5. Довжина твірної зрізаного конуса дорівнює 17 см, а висота — 8 см. Знайдіть площу осьового перерізу зрізаного конуса, якщо радіус однієї з його основ дорівнює 13 см.

УРОК № 42
КУЛЯ І СФЕРА. ПЕРЕРІЗИ КУЛІ ПЛОЩИНОЮ

Мета: сформувати поняття:

- ✓ кулі;
- ✓ сфери;
- ✓ центра кулі (сфери);
- ✓ радіуса кулі (сфери);
- ✓ хорди кулі (сфери);
- ✓ діаметра кулі (сфери);
- ✓ діаметрально протилежних точок.

Домогтися засвоєння:

- ✓ випадків взаємного розміщення кулі й площини в просторі;
- ✓ теореми про переріз кулі.

Сформувати вміння знаходити елементи кулі (сфери); визначати взаємне розміщення площини і кулі (сфери) в просторі; застосовувати теорему про переріз кулі до розв'язування задач.

Тип уроку: засвоєння знань, формування вмінь.

Наочність та обладнання: конспект «Куля і сфера. Перерізи кулі площиною», моделі кулі та сфери.

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Збираємо зошити для перевірки й оцінювання домашньої самостійної роботи. За необхідності роздаємо учням для опрацювання вдома правильні розв'язання завдань самостійної роботи.

III. Формулювання мети й завдань уроку

Нагадуємо учням логічну будову теми «Тіла обертання» і пропонуємо, скориставшися власним досвідом і знаннями, здобутими в попередніх класах, пригадати, які ще існують тіла обертання, крім циліндра і конуса. Тож цілком логічно після вивчення понять таких тіл обертання, як циліндр і конус, вивчати поняття кулі і сфери. Можна обговорити питання, чому куля є тілом обертання. Пропонуємо учням запитання: «Результатом обертання якої геометричної фігури і навколо якої осі є куля?» Отже, предметом вивчення на уроці є строге математичне означення кулі (сфери) та її елементів.

IV. Актуалізація опорних знань

Оскільки означення кулі (сфери) є просторовим аналогом означення круга (кола), то доцільно повторити означення круга (кола) та його елементів, а також випадки взаємного розміщення круга і прямої. Повторити цей планіметричний матеріал можна шляхом фронтального опитування.

Фронтальне опитування

1. Сформулюйте означення круга (кола).
2. Що називають центром, радіусом, хордою, діаметром кола?
3. Чи правильно, що:
   а) діаметр кола удвічі більший від радіуса кола;
   б) будь-який діаметр кола є його хордою;
   в) будь-яка хорда кола є його діаметром?
4. Наведіть приклади предметів побуту, які мають форму:
   а) круга; б) кола.
5. Скільки спільних точок можуть мати:
   а) пряма і коло; б) пряма і круг?

6. За яких умов пряма і коло:
а) не перетинаються; б) перетинаються у двох точках;
в) дотикаються?

V. Засвоєння знань

План вивчення теми

1. Означення кулі (сфери), її центра і радіуса.
2. Означення хорди, діаметра, діаметрально протилежних точок кулі (сфери).
3. Куля як тіло обертання півкруга навколо його діаметра.
4. Взаємне розміщення кулі й площини в просторі.
5. Теорема про переріз кулі.
6. Означення діаметральної площини, великого круга та великого кола.
7. Елементи симетрії кулі (сфери).

Викладаємо новий матеріал у формі лекції або фронтальної бесіди. Вивчення поняття кулі та сфери доцільно проводити паралельно з повторенням означення та властивостей круга та кола. Після того, як учні сформулювали означення круга, кола та їх елементів, пропонуємо їм сформулювати означення кулі та сфери. (Виконуємо відповідні записи та рисунки на дошці і в зошитах.) Доцільно звернути увагу учнів на те, що слово «радіус», як і в планіметрії, означає або відстань, на яку віддалені від центра точки сфери, або відрізок, що сполучає центр сфери з її довільною точкою.

Потім пропонуємо учням навести приклади предметів побуту, що мають форму круга й кола; кулі й сфери. Звертаємо увагу учнів на те, що кулю можна отримати в результаті обертання півкруга навколо його діаметра.

До сприйняття випадків розміщення кулі відносно площини, а також до формулювання й доведення теореми про переріз кулі учнів можна підвести відповідними навідними запитаннями: Чи будь-яка площина простору перетинає подану кулю? Яка умова повинна виконуватися, щоб площина перетинала кулю? Яку фігуру дістанемо у результаті перетину площиною кулі? Як можна обґрунтувати відповіді?

Після цього можна запропонувати учням самостійно опрацювати за підручником доведення теореми. Під час подальшого обговорення доведення теореми звертаємо увагу учнів на те, що з доведення випливає: площини, рівновіддалені від центра, перетинають кулю по рівних кругах; круг у перерізі кола площиною буде тим більшим, чим ближче ця площина до центра кулі. Найбільший круг дістанемо в перерізі кулі площиною, яка проходить через центр кулі (звідси назва — великий круг).

Конспект 32

Куля і сфера. Перерізи кулі площиною

1. Кулею називають множину всіх точок простору, віддалених від поданої точки на відстань, що не перевищує задану. Цю точку називають центром кулі, а задану відстань — радіусом кулі.

Сферою називають поверхню кулі. Сфера складається з усіх точок простору, віддалених від центра кулі (він є також центром сфери) на задану відстань (радіус сфери).

Радіусом кулі (сфери) називають будь-який відрізок, що сполучає центр із точкою сфери.

2. Відрізок, що сполучає дві точки сфери, називають хордою сфери (кулі). Хорду, яка проходить через центр сфери, називають діаметром сфери (кулі). Кінці діаметра називають діаметрально протилежними точками.

3. Куля є тілом обертання, яке утворюється в результаті обертання півкруга навколо його діаметра.

4. Три випадки розміщення кулі відносно площини:

1) якщо відстань від центра кулі до площини більша за радіус кулі, то куля й площина не мають спільних точок;

2) якщо відстань від центра кулі до площини дорівнює радіусу кулі, то площина має з кулею (та сферою, що її обмежує) єдину спільну точку;

3) якщо відстань від центра кулі до площини менша за радіус кулі, то перетином кулі з площиною є круг.

5. Теорема про переріз кулі. Якщо відстань від центра кулі до площини менша за радіус кулі, то перерізом кулі цією площиною є круг. Центр цього круга є основою перпендикуляра, проведеного з центра кулі до площини перерізу.

Наслідок. Якщо відстань від центра сфери до площини менша за радіус сфери, то перерізом сфери цією площиною є коло. Центр цього кола є основою перпендикуляра, проведеного з центра сфери до площини перерізу.

6. Діаметральною площиною називають січну площину, яка проходить через центр кулі. Центри кулі й діаметрального перерізу збігаються, а радіус перерізу дорівнює радіусу кулі.

Великим кругом (колом) називають переріз кулі (сфери) діаметральною площиною.

7. Будь-яка діаметральна площина кулі є її площиною симетрії.

Центр кулі є її центром симетрії

VI. Формування вмінь

Виконання усних вправ

1. Радіус кулі дорівнює 2,5 см. Де розміщена точка M усередині чи поза кулею, якщо вона віддалена:
а) від центра кулі на 2 см;
б) від центра кулі на 3 см;
в) від поверхні кулі на 3 см?
2. Радіус кулі дорівнює 5 см. Знайдіть площу великого круга кулі.
3. Довжина великого кола дорівнює 12π см. Чому дорівнює радіус сфери?
4. У велике коло сфери вписано прямокутник зі сторонами 5 см і 12 см. Чому дорівнює радіус сфери?
5. Діаметрально протилежні точки сфери мають координати $(2;-4;8)$ і $(-6;0;-2)$. Які координати має центр сфери?

Виконання письмових вправ

1. Радіус сфери дорівнює 13 см. Знайдіть довжину лінії перетину сфери площиною, яка розміщена на відстані 12 см від її центра.
2. Радіус кулі дорівнює 17 см. Знайдіть площу перерізу кулі площиною, яка розміщена на відстані 15 см від її центра.
3. Площа великого круга кулі дорівнює S. На якій відстані від центра кулі розміщено переріз, площа якого дорівнює $\frac{S}{2}$?
4. У велике коло сфери вписано прямокутний трикутник із катетами 6 см і 8 см, а в коло, що є перетином сфери і площини α, вписано правильний трикутник зі стороною $3\sqrt{3}$ см. На якій відстані від великого кола розміщена площина α?
5. Площина перетинає сферу. Діаметр сфери, проведений в одну з точок лінії перетину, має довжину $6\sqrt{2}$ см і утворює з площиною кут $45°$. Знайдіть довжину лінії перетину.
6. Перерізи кулі двома паралельними площинами, між якими лежить центр кулі, мають площі 144π см^2 і 25π см^2. Знайдіть радіус кулі, якщо відстань між паралельними площинами дорівнює 17 см.

Запропоновані вправи сприяють засвоєнню поняття кулі та сфери, їх елементів, а також змісту теореми про переріз кулі. З метою свідомого засвоєння учнями зазначених понять доцільно під час розв'язування задач вимагати від учнів формулювання відповідних означень та тверджень, обґрунтування етапів розв'язування. Традиційно розв'язування вправ передбачає використання (а отже, й повторення) планіметричного матеріалу, а саме теореми Піфагора, формул для обчислення площі круга та довжини кола тощо, а також стереометричного матеріалу, вивченого раніше, зокрема поняття паралельних площин, відстані від точки до площини, формули для знаходження координат середини відрізка, якщо відомі координати його кінців.

VII. Підсумки уроку

Гра «Вірю — не вірю»

Чи правильно, що:
а) усі точки кулі віддалені від її центра на відстань, що дорівнює радіусу кулі;
б) центр сфери не належить поданій сфері;
в) відстань між будь-якими точками кулі не більша від діаметра кулі;
г) відстань між будь-якими точками сфери не більша від діаметра сфери;
д) будь-який переріз сфери площиною є колом;
е) будь-який переріз кулі площиною є колом;
ж) з-поміж двох перерізів кулі площинами більшим є той, який розташований ближче до центра;
з) радіус будь-якого перерізу сфери площиною менший від радіуса сфери?

VIII. Домашнє завдання

Засвоїти зміст понять, розглянутих на уроці.
Виконати вправи.

1. Діаметр сфери дорівнює 50 см. Знайдіть довжину лінії перетину сфери площиною, яка розміщена на відстані 15 см від її центра.
2. Радіус кулі дорівнює 10 см. На якій відстані від центра кулі потрібно провести площину, щоб площа перерізу кулі цією площиною дорівнювала 36π см^2?
3. Площа великого круга кулі дорівнює S. На якій відстані від центра кулі розміщено переріз, площа якого дорівнює $\frac{3S}{4}$?
4. Площина перетинає кулю. Діаметр, проведений в одну з точок лінії перетину, утворює з площиною кут $45°$. Знайдіть площу перерізу, якщо діаметр кулі дорівнює $4\sqrt{3}$ см.

5. Перерізи сфери двома паралельними площинами мають довжини 10π см і 24π см. Знайдіть радіус сфери, якщо відстань між площинами дорівнює 7 см і центри перерізів лежать на одному радіусі.

УРОК № 43
ПЛОЩИНА, ДОТИЧНА ДО СФЕРИ

Мета: сформувати поняття:

✓ площини, дотичної до сфери;

✓ прямої, дотичної до сфери.

Домогтися засвоєння властивості та ознаки дотичної площини. Сформувати вміння розв'язувати задачі, що передбачають використання цих понять, властивості та ознаки.

Тип уроку: засвоєння знань, формування вмінь.

Наочність та обладнання: конспект «Площина, дотична до сфери».

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Оскільки письмові вправи домашньої роботи відтворювали ситуації, аналогічні до розглянутих на попередньому уроці, перевіряємо лише правильність виконання обчислень. За необхідності можна обговорити моменти, які викликали утруднення або роздати учням готові розв'язання задач для подальшого самостійного опрацювання.

З метою оперативної перевірки засвоєння учнями знань та вмінь можна провести тестову роботу з подальшою перевіркою та обговоренням.

Тестові завдання

1. Яке з наведених тверджень неправильне?
   А) Якщо точка віддалена від центра кулі на відстань, більшу від радіуса кулі, то вона не належить кулі;
   Б) якщо точка віддалена від центра сфери на відстань, більшу від радіуса сфери, то вона не належить сфері;
   В) якщо точка віддалена від центра кулі на відстань, меншу від радіуса кулі, то вона не належить кулі;
   Г) якщо точка віддалена від центра сфери на відстань, меншу від радіуса сфери, то вона не належить сфері.

2. Яке з наведених тверджень правильне?
   А) Будь-який переріз сфери площиною є кругом;
   Б) будь-який переріз кулі площиною є кругом;
   В) радіус великого круга кулі менший від радіуса кулі;
   Г) переріз кулі площиною тим більший, чим далі від центра він розміщений.
3. Точка $A\left(0;\sqrt{2};\sqrt{5}\right)$ лежить на сфері з центром $O\left(3;0;0\right)$. Чому дорівнює радіус сфери?
   А) 5; Б) 4; В) $\sqrt{3}$; Г) 8.
4. Довжина великого кола сфери дорівнює 9π см. Чому дорівнює радіус кулі, поверхнею якої є подана сфера?
   А) 3 см; Б) 4,5 см; В) 9 см; Г) визначити неможливо.
5. Переріз кулі площиною, віддалений від її центра на 12 см, має радіус 5 см. Чому дорівнює радіус сфери?
   А) 10 см; Б) 11 см; В) 12 см; Г) 13 см.

III. Формулювання мети й завдань уроку

Пропонуємо учням пригадати випадки взаємного розміщення прямої і кола. Після цього проводимо аналогію між колом і прямою на площині й кулею і площиною в просторі. Нагадуємо учням, що на попередньому уроці було розглянуто випадки взаємного розміщення площини й кулі, а також було докладно розглянуто випадок перерізу кулі площиною, тобто ситуацію, коли відстань від центра кулі до площини менша за радіус кулі. Тож метою уроку є вивчення випадку, коли відстань від центра кулі до площини дорівнює радіусу кулі, тобто площина має з кулею (та сферою, що її обмежує) єдину спільну точку. Повідомляємо, що така площина є дотичною до кулі, тож завдання уроку — вивчення строгого математичного означення площини, дотичної до кулі, її властивості та ознаки, а також означення дотичної прямої до кулі (сфери).

IV. Актуалізація опорних знань

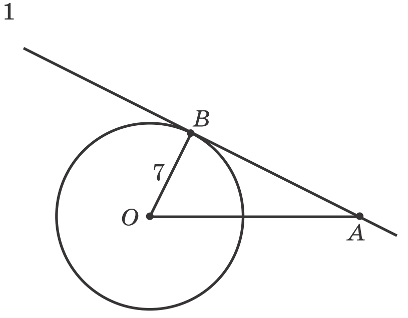
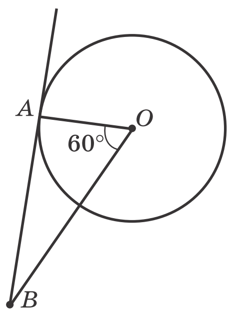
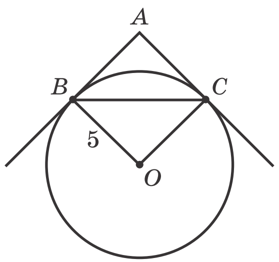
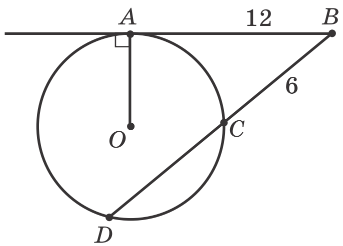
Повторення планіметричного матеріалу

Фронтальне опитування

1. Сформулюйте означення дотичної до кола.
2. Сформулюйте властивість двох дотичних, проведених з однієї точки.
3. Опишіть випадки взаємного розміщення прямої і кола.

4. Відстань від центра кола до прямої дорівнює 5 см. Яке взаємне розміщення прямої і кола, якщо радіус кола дорівнює:
а) 4,5 см; б) 5 см; в) 5,5 см?
5. Сформулюйте властивість січних і дотичних.

Виконання вправ за готовими рисунками

1  O — центр кола, AB — дотична, $OA = 25$ см. Знайдіть AB	2  O — центр кола, AB — дотична, $OB = 9$ см. Знайдіть AO
3  O — центр кола, AB і AC — дотичні, $\angle A = 120°$. Знайдіть BC	4  O — центр кола. Знайдіть DC

Повторення матеріалу зі стереометрії

Фронтальне опитування

1. Сформулюйте означення перпендикулярних прямої і площини.
2. Сформулюйте ознаку перпендикулярності прямої і площини.
3. Сформулюйте означення перпендикуляра до площини.
4. Сформулюйте означення похилої до площини та її проекції.
5. Сформулюйте властивості похилих.

V. Засвоєння знань

План вивчення теми

1. Означення дотичної площини до сфери (кулі).

2. Властивість дотичної площини.
3. Ознака дотичної площини.
4. Означення дотичної прямої до сфери (кулі).

Конспект 33

Площина, дотична до сфери

1. Дотичною площиною до сфери (кулі) називають площину, яка має зі сферою (кулею) єдину спільну точку.

Спільну точку площини й сфери називають точкою дотику.

2. Теорема (властивість дотичної площини). Дотична площина до сфери перпендикулярна до радіуса сфери, проведеного в точку дотику.

3. Ознака дотичної площини. Якщо радіус сфери є перпендикуляром, проведеним із центра сфери до площини, яка проходить через другий кінець радіуса, то ця площина є дотичною до сфери.

4. Дотичною прямою до сфери (кулі) називають пряму, яка належить дотичній площині до сфери (кулі) і проходить через точку дотику

Як і на попередньому уроці, пояснення нового матеріалу можна проводити паралельно з повторенням відповідної теми курсу планіметрії. Доведення властивості й ознаки дотичної площини до сфери можна запропонувати учням виконати самостійно або опрацювати доведення, наведені в підручнику. Потім можна відтворити доведення на дошці.

Після доведення теореми (властивості дотичної площини) і введення поняття дотичної прямої до сфери доцільно звернути увагу учнів на те, що з теореми випливає: дотична пряма перпендикулярна до радіуса сфери (кулі), проведеного в точку дотику. Правильним є й обернене твердження: пряма, яка проходить через точку сфери перпендикулярно до радіуса, проведеного в цю точку, є дотичною прямою до сфери. (Доведення цього факту можна запропонувати учням як задачу.) Крім того, слід зауважити, що всі прямі, які лежать у дотичній площині і проходять через точку дотику, є дотичними прямими до сфери.

VI. Формування вмінь

Виконання усних вправ

1. Через точку A поверхні кулі з центром у точці O проведено площину, дотичну до кулі. У дотичній площині на відстані 20 см від точки A позначено точку B. Знайдіть радіус кулі, якщо відстань BO дорівнює 25 см.

2. З точки M до сфери проведено дотичні MA і MB. Доведіть, що $MA = MD$.

Виконання письмових вправ

1. Доведіть, що пряма, яка проходить через точку сфери перпендикулярно до радіуса, проведеного в цю точку, є дотичною прямою до сфери.

2. Через точку на поверхні кулі радіуса 6 см проведено дві площини: перша — дотична до кулі, друга — під кутом $30°$ до першої. Знайдіть площу перерізу.

3. Площина α дотикається до кулі з центром у точці O. З точки O до площини α проведено дві рівні похилі довжиною 2 м. Знайдіть радіус кулі, якщо похилі утворюють між собою кут $60°$, а їхні проекції перпендикулярні.

4. Площина α дотикається до кулі радіуса 15 см в точці A. У площині α проведено пряму a. Знайдіть відстань від центра кулі до прямої a, якщо відстань від точки A до прямої a дорівнює 8 см.

5. Сторони трикутника дорівнюють 25 см, 29 см, 36 см і є дотичними до кулі радіуса 10 см. Знайдіть відстань від центра кулі до площини трикутника.

Розв'язування запропонованих вправ сприяє свідомому засвоєнню вивченого на уроці теоретичного матеріалу. Під час розв'язування запропонованих задач на обчислення та доведення формується вміння використовувати не тільки щойно вивчені означення й теореми, а й застосовувати, так би мовити, в незвичних ситуаціях знання, набуті раніше. Зокрема, радіус кулі, проведений у точку дотику площини до кулі, — це відстань від точки до площини. Тобто під час розв'язування запропонованих задач повторюємо поняття перпендикуляра до площини, похилих і їх властивостей, ознаку перпендикулярності прямої і площини тощо.

VII. Підсумки уроку

Контрольні запитання

1. Яку площину називають дотичною до кулі?

2. Яку властивість має площина, дотична до кулі?

3. Скільки площин, дотичних до кулі, можна провести через точку на поверхні кулі?

4. Яку пряму називають дотичною до кулі?

5. Яку властивість має пряма, дотична до кулі?

6. Скільки прямих, дотичних до кулі, можна провести через точку на поверхні кулі?

VIII. Домашнє завдання

Вивчити зміст понять, розглянутих на уроці.

Виконати вправи.

1. Через точку на поверхні кулі проведено дві площини: перша — дотична до кулі, друга — під кутом $60°$ до першої. Знайдіть радіус кулі, якщо площа перерізу дорівнює 12π см^2.

2. Сфера радіуса R дотикається до граней двогранного кута, величина якого дорівнює α. Знайдіть відстань від центра сфери до ребра двогранного кута.

3. Через точку на поверхні кулі проведено дві дотичні прямі до кулі. Доведіть, що площина, яка проходить через ці прямі, дотична до кулі.

4. Периметр правильного трикутника дорівнює $72\sqrt{3}$ см, його сторони дотикаються до сфери. Знайдіть відстань від центра сфери до площини трикутника, якщо вершини трикутника віддалені від центра сфери на 26 см.

УРОК № 44
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ [РІВНЯННЯ СФЕРИ]

Мета: працювати над закріпленням знань учнями означення кулі (сфери) та їх елементів, поняття перерізів кулі площинами, означення, властивості та ознаки дотичної площини до кулі (сфери), дотичної прямої до кулі (сфери). [Домогтися засвоєння рівняння сфери; сформувати вміння розв'язувати задачі, що передбачають використання цього рівняння.]

Тип уроку: застосування та засвоєння знань, формування вмінь.

Наочність та обладнання: конспекти 32, 33, [конспект «Рівняння сфери»].

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Перевірку якості виконання письмових вправ можна провести, зібравши зошити або запропонувавши учням виконати само- або взаємоперевірку правильності розв'язання задач за зразком.

Засвоєння учнями основних понять попереднього уроку можна перевірити під час виконання усних вправ.

Виконання усних вправ

1. Площина і сфера мають єдину спільну точку. Яке взаємне розміщення цієї площини і радіуса сфери?
2. Відстань від центра сфери до площини дорівнює $3\frac{5}{6}$ см. Скільки спільних точок мають ці площина й сфера, якщо діаметр сфери дорівнює $7\frac{2}{3}$ см?
3. У площині, дотичній до сфери, позначено точку A на відстані 5 см від точки дотику. Чому дорівнює радіус сфери, якщо відстань від точки A до центра сфери дорівнює 13 см?
4. Усі сторони квадрата, площа якого дорівнює 144 см^2, дотикаються до сфери. Чому дорівнює радіус сфери, якщо відстань від усіх вершин квадрата до центра сфери дорівнює 10 см?

III. Формулювання мети й завдань уроку

Труднощі та питання, які можливо виникли під час розв'язування задач на застосування поняття кулі (сфери), перерізів кулі (сфери) площинами, дотичної площини до кулі, дотичної прямої до кулі, є підставами для формулювання відповідної мети уроку.

Вивчення теми «Рівняння сфери» згідно з чинною програмою з математики не є обов'язковим. Якщо було вирішено вивчати цю тему, то можна продовжити аналогію між колом на площині та сферою в просторі й доповнити формулювання мети уроку.

IV. Відтворення та систематизація опорних знань

Учням пропонуємо самостійно за конспектами 32, 33 повторити зміст матеріалу, вивченого на двох попередніх уроках.

[IV. Актуалізація опорних знань

Фронтальне опитування

1. Запишіть рівняння кола із центром у точці з координатами $(a;b)$ і радіусом R.
2. Який вигляд має рівняння кола з центром у початку координат?
3. Чи лежить на колі, рівняння якого $x^2+y^2=25$, точка:

   а) $A(3;4)$; б) $B(-3;-4)$; в) $C(-1;5)$?
4. Запишіть формулу для обчислення відстані між двома точками простору, якщо відомо їх координати.

V. Засвоєння знань

Конспект 34

Рівняння сфери

Нехай центр сфери знаходиться в точці $A(a;b;c)$, а радіус сфери дорівнює R. Точками сфери є ті й тільки ті точки простору, відстані від яких до точки A дорівнюють R. Квадрат відстані від точки $(x;y;z)$ до точки A дорівнює:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2.$$

Тому рівняння сфери має вигляд:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

Якщо центром сфери є початок координат, то рівняння сфери має вигляд:

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

Викладення нового матеріалу можна провести відповідно до матеріалу підручника. Крім наведеного, викладення можна побудувати, відштовхуючись від рівняння кола на координатній площині.]

V [VI]. Формування вмінь і навичок

Виконання усних вправ

1. Точки A і B лежать на поверхні кулі радіуса 25 см. Чому дорівнює відстань від центра кулі до відрізка AB, якщо довжина відрізка AB дорівнює 40 см?
2. Знайдіть площу великого круга кулі, утвореної в результаті обертання півкруга навколо свого діаметра, довжина якого дорівнює 3 см.

[3. Подано рівняння сфери $x^2+y^2+z^2=16$ і точку $A(2;1;2)$. Чи лежить точка A на сфері, всередині або зовні кулі, поверхнею якої є ця сфера?

4. Подано рівняння сфери $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=4$. Чи правильно, що:

   а) центром сфери є точка з координатами $(-1;2;0)$;

   б) радіус сфери дорівнює 2;

   в) точка з координатами $(1;0;0)$ лежить на цій сфері;

   г) точка з координатами $(2;-1;1)$ є точкою кулі, поверхнею якої є ця сфера?]

Виконання письмових вправ

1. Вершини прямокутного трикутника з гіпотенузою 24 см лежать на сфері. Знайдіть радіус сфери, якщо відстань від центра сфери до площини трикутника дорівнює 5 см.
2. Куля дотикається до всіх сторін прямокутного трикутника, катети якого дорівнюють 6 см і 8 см. Знайдіть радіус кулі, якщо відстань від центра кулі до площини трикутника — 14 см.
3. З точки M проведено до сфери дві дотичні прямі. Доведіть, що відрізки від точки M до точки дотику мають рівні довжини.
4. Площина α дотикається до сфери в точці A. Доведіть, що перерізи сфери площинами, які проходять через точку A й утворюють рівні кути з площиною α, мають рівні радіуси.
5. Через точку, що не лежить на сфері, проведено дві площини, які дотикаються до сфери. Знайдіть відстань від центра сфери до лінії перетину площин, якщо кут між площинами дорівнює $60°$, а радіус сфери дорівнює 4 см.

[6. Складіть рівняння сфери з центром у точці $(1;0;-1)$, яка проходить через точку $(-2;3;0)$.

7. Знайдіть точки перетину сфери
$$(x+1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=11$$
з осями координат.
8. Точки $A(1;0;z)$ і $B(-1;y;0)$ належать сфері $x^2+y^2+z^2=10$. Знайдіть довжину хорди AB.
9. Відрізок AB є діаметром сфери. Складіть рівняння сфери, якщо $A(-3;1,5;-2)$, $B(3;-2,5;2)$. Чи належать цій сфері точки з координатами $(\sqrt{7};-1,5;3)$, $(3;2,5;1)$?]

Запропоновані вправи сприяють відпрацьовуванню всіх понять, пов'язаних із вивченням теми «Куля та сфера». Вправи № 6–9 спрямованні на засвоєння учнями рівняння сфери. Залежно від рівня математичної підготовки учнів учитель на власний розсуд обирає вправи для обов'язкового розв'язування всіма учнями на уроці. Решту вправ можна використовувати як додаткові завдання або завдання для індивідуальної роботи.

VII. Підсумки уроку

Тестові завдання

1. Якщо радіус кулі дорівнює 13 см, а точка A віддалена від центра кулі на 12 см, то точка A лежить:

А) всередині кулі; Б) на поверхні кулі;
В) поза кулею; Г) визначити неможливо.

2. Радіус кулі дорівнює R, відстань від центра кулі до деякої площини дорівнює d. Подана площини дотикається до сфери, якщо виконано умову:
А) $d<R$; Б) $d>R$; В) $d=R$; Г) $d\neq R$.
3. Якщо радіус кулі дорівнює R, то площа великого круга дорівнює:
А) $2\pi R$; Б) πR^2; В) πR; Г) $2\pi R^2$.
4. Якщо кулю радіуса 17 см перетинає площина, яка віддалена від центра кулі на 15 см, то площа перерізу дорівнює:
А) 289π см²; Б) 225π см²; В) 64π см²; Г) 16π см².

[5. Центром сфери, заданої рівнянням
$$(x-3)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=16,$$
є точка з координатами:
А) $(-3;2;1)$; Б) $(3;-2;1)$; В) $(3;-2;-1)$; Г) $(-3;-2;-1)$.

6. Радіус сфери, заданої рівнянням $(x-9)^2+y^2+z^2=8$, дорівнює:
А) 3; Б) 9; В) 8; Г) $2\sqrt{2}$.]

VIII. Домашнє завдання

Повторити [вивчити] зміст понять, розглянутих на уроці.
Виконати вправи.

1. Сторона трикутника, що лежить проти кута $60°$, дорівнює $3\sqrt{3}$ см. Усі вершини трикутника належать сфері. Знайдіть відстань від центра сфери до площини трикутника, якщо радіус сфери дорівнює 5 см.
2. Усі сторони квадрата, що дорівнюють по 10 см, дотикаються до сфери. Знайдіть радіус сфери, якщо відстань від центра сфери до площини квадрата дорівнює 12 см.
3. Через точку на поверхні кулі проведено дві площини, які перетинають кулю. Обидві площини віддалені від центра кулі на відстань $2\sqrt{3}$ см, а кут між ними дорівнює $60°$. Знайдіть площі перерізів, що утворилися.
4. Дві дотичні площини до сфери перетинаються по прямій a. Доведіть, що пряма, яка сполучає точки дотику, перпендикулярна до a.

[5. Складіть рівняння сфери з центром S і радіусом R, якщо:
а) $S(0;0;0)$, $R=\sqrt{2}$; б) $S(0;2;-3)$, $R=3$.

6. Точки $C(1;-1{,}5;3)$ і $D(-1;2{,}5;-3)$ лежать на сфері. Центр сфери належить відрізку CD. Складіть рівняння сфери. Чи належать сфері точки з координатами $(3;-1{,}5;\sqrt{7})$, $(1;2{,}5;3)$?]

УРОК № 45
ПІДСУМКОВИЙ УРОК ІЗ ТЕМИ «ТІЛА ОБЕРТАННЯ»

Мета: повторити, систематизувати й узагальнити знання учнів щодо:

- ✓ поняття циліндра та його елементів;
- ✓ поняття конуса та його елементів;
- ✓ поняття кулі та сфери.

Систематизувати вміння учнів застосовувати набуті знання до розв'язування задач, передбачених програмою.

Тип уроку: узагальнення і систематизація знань, умінь і навичок.

Наочність та обладнання: конспекти 25–34.

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Форма проведення цього етапу уроку значною мірою залежить від рівня знань і вмінь учнів. Це може бути самостійна робота учнів з перевірки домашнього завдання за зразком або фронтальна робота з коментування розв'язань, заздалегідь записаних деякими учнями на дошці, або самостійна робота з виконання вправ, аналогічних за змістом до вправ домашньої роботи.

III. Формулювання мети й завдань уроку

Основна дидактична мета і завдання на урок цілком логічно випливають із його місця в темі. Оскільки урок є останнім, підсумковим, то увагу приділено повторенню, узагальненню й систематизації знань і вмінь учнів, набутих під час вивчення теми. Таке формулювання мети створює відповідну мотивацію діяльності учнів.

IV. Повторення і систематизація знань

Залежно від рівня підготовки учнів учитель може організувати їхню роботу різними способами: або як самостійну роботу

з довідковим матеріалом (наприклад, із конспектом або підручником), або запропонувати учням самостійно повторити зміст основних понять теми, скласти схему, що відображає логічний зв'язок між основними поняттями теми, тощо. Можна розпочати урок з традиційного фронтального опитування за контрольними запитаннями до теми.

Контрольні запитання

1. Поясніть, що таке тіло обертання, поверхня обертання, вісь тіла обертання; осьовий переріз тіла обертання.
2. Сформулюйте означення кругового циліндра (твірної циліндра, осі циліндра, осьового перерізу циліндра).
3. Який циліндр називають прямим?
4. Що таке радіус циліндра, висота циліндра, вісь циліндра, осьовий переріз циліндра?
5. Сформулюйте означення кругового конуса (вершини конуса, твірної конуса, основи конуса, осі конуса, осьового перерізу конуса).
6. Який конус називають прямим?
7. Що таке висота конуса, радіус основи конуса?
8. Поясніть, що таке зрізаний конус.
9. Сформулюйте означення кулі, кульової поверхні (сфери).
10. Що таке радіус кулі, діаметр кулі? Які точки називають діаметрально протилежними?
11. Яку площину називають діаметральною площиною кулі? Що таке великий круг?
12. Яку площину називають дотичною до кулі? Яке взаємне розміщення радіуса кулі й дотичної площини до кулі?

V. Повторення і систематизація вмінь

Традиційно цей етап уроку можна провести у формі групової роботи, мета якої полягає в тому, щоб учні самостійно сформулювали та випробували узагальнену схему дій, якої вони будуть дотримуватися під час розв'язування типових задач, подібні до яких винесено на контроль.

Перед виконанням практичного завдання бажано провести роботу з виділення основних видів задач на застосування вивчених у темі понять. Такими видами можуть бути задачі на:

- ✓ знаходження невідомих елементів циліндра;
- ✓ застосування поняття перерізів циліндра;
- ✓ знаходження невідомих елементів конуса;
- ✓ застосування поняття перерізів конуса;
- ✓ знаходження невідомих елементів кулі (сфери);

- ✓ застосування поняття перерізів кулі та дотичної площини (прямої) до кулі.

  Після складання переліку основних видів задач учитель об'єднує учнів у робочі групи (за кількістю видів завдань). Кожна група отримує завдання: «Скласти план розв'язання задачі...». На складання плану відведено час, за який учасники групи мають обговорити план розв'язання задачі, записати його у вигляді послідовних кроків, реалізувати та підготувати презентацію своєї роботи. Після презентації проводимо обговорення, під час якого вчитель (або учні інших груп) ставлять запитання або пропонують замінити яку-небудь із заданих величин і пояснити, як зміниться розв'язання задачі. Потім, у разі необхідності, провести корекцію складених планів.

VI. Підсумки уроку

Підсумком уроку узагальнення й систематизації знань і вмінь учнів є, по-перше, складені учнями узагальнені схеми дій під час розв'язування типових завдань, по-друге, здійснення учнями необхідної частини свідомої розумової діяльності (рефлексії), усвідомлення кожним учнем особистих успіхів та, найголовніше, — проблем, над якими слід ще попрацювати.

VII. Домашнє завдання

Повторити зміст вивчених у ході засвоєння теми понять.

Вивчити складені на уроці схеми дій.

Розв'язати задачі домашньої контрольної роботи.

Умова домашньої контрольної роботи

1. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює $4\sqrt{3}$ см і утворює з площиною основи кут $60°$. Знайдіть висоту циліндра.
2. Відрізок, що сполучає центр верхньої основи циліндра з точкою кола нижньої основи, утворює з площиною основи кут $30°$. Знайдіть висоту і діаметр цього відрізка, якщо поданий відрізок знаходиться на відстані 6 см від центра нижньої основи.
3. Твірна конуса дорівнює 18 см, а кут між твірною і висотою — $30°$. Знайдіть діаметр основи конуса.
4. Конус перетнуто площиною, паралельною основі, яка знаходиться від вершини конуса на відстані, що дорівнює $\frac{1}{3}$ його висоти. Знайдіть площу перерізу, якщо радіус основи конуса дорівнює 18 см.

5. Кулю, радіус якої дорівнює 37 см, перетнуто площиною на відстані 35 см від центра кулі. Знайдіть площу утвореного перерізу.
6. Радіус кулі дорівнює 10 см. Точка A лежить на дотичній площині до кулі на відстані 26 см від її центра. Знайдіть відстань від точки A до точки дотику.

УРОК № 46
КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 3

Мета: перевірити рівень засвоєння знань, умінь і навичок учнів із теми «Тіла обертання».

Тип уроку: контроль знань і вмінь.

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Збираємо зошити з виконаною домашньою контрольною роботою № 3. Оцінки за роботу враховуємо під час виставлення тематичного бала.

III. Формулювання мети й завдань уроку

Метою контрольної роботи є виявлення учнями своїх навчальних досягнень, тобто знань змісту основних понять теми та володіння прийомами їх застосування під час розв'язування задач.

IV. Текст контрольної роботи № 3

Варіант 1

1. Діагональ осьового перерізу циліндра утворює з площиною основи кут $45°$. Знайдіть висоту циліндра, якщо радіус його основи дорівнює 6 см.
2. Відрізок, що сполучає центр верхньої основи циліндра з точкою кола нижньої основи, дорівнює 12 см. Кут між поданим відрізком і віссю циліндра дорівнює $30°$. Знайдіть відстань від центра нижньої основи до цього відрізка.
3. Твірна конуса дорівнює 26 см, а діаметр його основи — 20 см. Знайдіть висоту конуса.
4. Конус перетнуто площиною, паралельною основі, на відстані 3 см від вершини. Знайдіть площу перерізу, якщо радіус основи конуса дорівнює 12 см, а висота — 9 см.

5. Кулю перетнуто площиною на відстані 16 см від її центра. Знайдіть діаметр кулі, якщо радіус кола перерізу дорівнює 12 см.
6. Точка A лежить на дотичній площині до кулі на відстані 15 см від точки дотику і 17 см від центра кулі. Знайдіть площу великого круга кулі.

Варіант 2

1. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 10 см і утворює з площиною основи кут $60°$. Знайдіть радіус основи циліндра.
2. Відрізок, що сполучає центр верхньої основи циліндра з точкою кола нижньої основи, утворює з площиною основи кут $30°$. Відстань від центра нижньої основи циліндра до цього відрізка дорівнює 8 см. Знайдіть довжину відрізка.
3. Твірна конуса дорівнює 25 см, а його висота — 7 см. Знайдіть діаметр основи конуса.
4. Конус перетнуто площиною, паралельною основі, на відстані 4 см від неї. Висота конуса дорівнює 6 см, а радіус основи — 9 см. Знайдіть довжину кола перерізу.
5. Кулю, діаметр якої дорівнює 30 см, перетнуто площиною. Знайдіть відстань від центра кулі до площини перерізу, якщо радіус кола перерізу дорівнює 9 см.
6. Точка A лежить на дотичній площині до кулі на відстані 12 см від точки дотику і 20 см від центра кулі. Знайдіть довжину великого кола сфери, що є поверхнею поданої кулі.

V. Підсумки уроку

На цьому етапі уроку після того, як будуть зібрані зошити, можна відповісти на запитання учнів, які виникли в процесі виконання контрольної роботи, і роздати учням для опрацювання вдома зразки правильних розв'язань завдань контрольної роботи (заготовлених учителем заздалегідь).

VI. Домашнє завдання

Виконати аналіз контрольної роботи (за розданими розв'язаннями).

ТЕМА 4. ОБ'ЄМИ ТА ПЛОЩІ ПОВЕРХОНЬ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ (14 ГОДИН)

УРОК № 47
ПОНЯТТЯ ПРО ОБ'ЄМ ТІЛА. ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ОБ'ЄМІВ. ОБ'ЄМ ПАРАЛЕЛЕПІПЕДА

Мета: сформувати поняття:

- ✓ об'єму тіла;
- ✓ рівновеликих і рівноскладених тіл.

Домогтися засвоєння:

- ✓ властивостей об'єму многогранників;
- ✓ формули для обчислення об'єму паралелепіпеда.

Сформувати вміння розв'язувати задачі на обчислення об'єму паралелепіпеда.

Тип уроку: засвоєння знань, формування вмінь.

Наочність та обладнання: конспект «Поняття про об'єм тіла. Основні властивості об'ємів. Об'єм паралелепіпеда».

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Збираємо зошити учнів на перевірку й оцінюємо якість виконання аналізу контрольної роботи.

III. Формулювання мети й завдань уроку

Оскільки на цьому уроці починається вивчення нової теми «Об'єми та площі поверхонь геометричних тіл», то необхідно надати учням інформацію про:

- ✓ орієнтовний план вивчення теми;
- ✓ кількість навчальних годин, відведених на вивчення теми;
- ✓ приблизний зміст матеріалу, що вивчається;
- ✓ основні вимоги до знань та вмінь учнів;
- ✓ орієнтовний зміст завдань, що будуть винесені на контрольну роботу.

З метою мотивації діяльності учнів на уроці проводимо бесіду, у ході якої з'ясовуємо, як вони розуміють слово «об'єм», пропонуємо навести приклади використання цього слова на побутовому рівні, пригадати, об'єми яких геометричних тіл учні навчилися обчислювати в попередніх класах, які існують одиниці вимірювання об'єму. Після цього проводимо аналогію між вимірюванням площ фігур на площині та вимірюванням об'ємів тіл у просторі. Учням відомі властивості площі фігур. А чи має аналогічні властивості об'єм геометричного тіла? Мета уроку — дати відповідь на це запитання, а також довести формулу для обчислення об'єму найпростішої фігури з точки зору знаходження об'єму — паралелепіпеда.

Історична довідка

Задача обчислення об'ємів найпростіших тіл була одним зі стимулів розвитку геометрії. Математики Стародавнього Сходу (Вавилон, Єгипет) мали у своєму розпорядженні низку правил (більшою частиною емпіричних) для обчислення об'ємів геометричних тіл, які найчастіше використовували на практиці. Грецькі математики останніх століть до нашої ери звільнили теорію обчислення об'ємів від емпіричних правил. У «Началах» Евкліда і в працях Архімеда зустрічаються лише точні правила для обчислення об'ємів многогранників і деяких тіл обертання (циліндра, конуса, кулі та її частин). При цьому в ученні про об'єми многогранників грецькі математики долали значні труднощі, які істотно відрізняють цей розділ геометрії від розділу про площі многокутників. Різниця, як з'ясувалося тільки на початку XX століття, полягає в такому: будь-який многокутник можна за допомогою відповідних прямолінійних розрізів і перекладання отриманих частин «перекроїти» у квадрат, але аналогічне перетворення довільного многогранника в куб, взагалі кажучи, неможливе (теорема Дена, 1901).

IV. Актуалізація опорних знань

Фронтальне опитування

1. Сформулюйте властивості площі фігур.
2. З площею якої фігури ми порівнюємо площу прямокутника?
3. Запишіть формулу для обчислення площі паралелограма.
4. Яким прийомом ми користувалися під час виведення формули для обчислення площі паралелограма?

V. Засвоєння знань

План вивчення теми

1. Об'єм геометричного тіла.
2. Властивості (аксіоми) об'єму многогранників.
3. Означення рівновеликих і рівноскладених тіл.
4. Формула об'єму прямокутного паралелепіпеда (теорема).
5. Формула об'єму будь-якого паралелепіпеда (теорема).

Конспект 35

Поняття про об'єм тіла.
Основні властивості об'ємів. Об'єм паралелепіпеда

1. Об'єм характеризує величину частини простору, яку займає геометричне тіло, й вимірюється в певних одиницях: кубічних міліметрах (1 мм^3), кубічних сантиметрах (1 см^3), кубічних метрах (1 м^3) тощо.

Отже, знаходження об'ємів тіл різної форми базується на порівняння із об'ємом одиничного куба.

2. Властивості (аксіоми) об'єму многогранників:

✓ рівні многогранники мають рівні об'єми;

✓ якщо многогранник складений із кількох многогранників, то його об'єм дорівнює сумі об'ємів цих многогранників;

✓ об'єм куба з ребром, що дорівнює одиниці довжини, дорівнює одиниці об'єму.

3. Рівновеликими називають тіла з однаковими об'ємами.

Рівноскладеними називають тіла, які складені з одних і тих самих многогранників.

Будь-які рівноскладені тіла мають рівні об'єми (за другою властивістю). Обернене твердження не є правильним (на відміну від аналогічної теореми для площ).

4. Формула об'єму прямокутного паралелепіпеда (теорема).

Об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку трьох його вимірів: $V = abc$, де a, b, c — виміри прямокутного паралелепіпеда.

Формула об'єму куба (наслідок).

Об'єм куба дорівнює кубу його ребра: $V = a^3$, де a — ребро куба.

5. Формула об'єму будь-якого паралелепіпеда (теорема).

Об'єм паралелепіпеда дорівнює добутку площі його основи на висоту: $V = S_{осн} \cdot h$, де $S_{осн}$ — площа основи паралелепіпеда, h — висота

Зважаючи на великий обсяг матеріалу, що вивчається на уроці, викладення нового матеріалу доцільно провести у формі лекції або (якщо дозволяє рівень математичної підготовки учнів) у формі фронтальної бесіди.

Формулюючи властивості об'єму многогранників, бажано провести аналогію між ними і відповідними властивостями площі плоских фігур. Також аналогічно доведенню формул для обчислення площ прямокутника і паралелограма доводять формулу для обчислення об'єму паралелепіпеда: спочатку розглядають прямокутний паралелепіпед, далі — прямий паралелепіпед і, нарешті, похилий паралелепіпед.

VI. Формування вмінь

Виконання усних вправ

1. Об’єм тіла дорівнює a см^3. Як його виразити в кубічних метрах?
2. Якої висоти буде стовпчик, якщо кубічний метр розрізати на кубічні сантиметри і всі ці кубики поставити один на одного?
3. Площа повної поверхні куба дорівнює 96 м^2. Чому дорівнює об’єм куба?
4. Об’єм куба дорівнює 125 см^3. Чому дорівнює площа повної поверхні куба?
5. Яку масу має куб, ребро якого дорівнює 10 см, якщо він виготовлений із золота? (1 м^3 золота має масу приблизно 19 т.)
6. Чому дорівнює висота паралелепіпеда, якщо його об’єм дорівнює 216 см^3, а площа основи — 18 см^2?

Виконання письмових вправ

1. Три латунні куби з ребрами 3 см, 4 см і 5 см переплавили в один куб. Яку довжину має ребро цього куба?
2. Виміри прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 15 м, 50 м і 36 м. Знайдіть ребро рівновеликого йому куба.
3. У прямому паралелепіпеді сторони основи дорівнюють 10 см і 12 см і утворюють кут $30°$. Знайдіть об’єм паралелепіпеда, якщо площа його бічної поверхні дорівнює 220 см^2.
4. У прямому паралелепіпеді сторони основи дорівнюють 8 см і 15 см і утворюють кут $60°$. Менша діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут $30°$. Знайдіть об’єм паралелепіпеда.
5. Основою похилого паралелепіпеда є квадрат зі стороною a. Бічні ребра паралелепіпеда дорівнюють $2b$ і утворюють з площиною основи кут $30°$. Знайдіть об’єм паралелепіпеда.

Запропоновані задачі сприяють свідомому засвоєнню поняття об’єму та його властивостей, а також формуванню вміння учнів обчислювати об’єми куба, прямокутного, прямого та похилого паралелепіпедів. З метою уникнення формалізму під час розв’язування задач бажано вимагати від учнів формулювання відповідних означень, властивостей та правил обчислення об’ємів.

VII. Підсумки уроку

Контрольні запитання

1. Назвіть основні властивості об’єму.
2. Чому дорівнює об’єм прямокутного паралелепіпеда, лінійні виміри якого дорівнюють a, b, c?

3. Як знайти об’єм довільного паралелепіпеда? Запишіть формулу для обчислення об’єму паралелепіпеда.
4. Чи правильно, що:
   а) якщо всі ребра одного прямокутного паралелепіпеда відповідно дорівнюють ребрам другого, то об’єми цих паралелепіпедів рівні;
   б) якщо всі ребра одного прямого паралелепіпеда відповідно дорівнюють ребрам другого, то об’єми цих паралелепіпедів обов’язково рівні;
   в) якщо всі ребра одного похилого паралелепіпеда відповідно дорівнюють ребрам другого, то об’єми цих паралелепіпедів обов’язково рівні?

VIII. Домашнє завдання

Вивчити зміст понять, розглянутих на уроці.

Розв’язати задачі.

1. Виміри прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 2 см, 3 см і 6 см. Знайдіть ребро такого куба, щоб об’єми цих тіл відносились як площі їх поверхонь.
2. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює 35 см, а ребра відносяться як $2:3:6$. Знайдіть об’єм паралелепіпеда.
3. У прямому паралелепіпеді сторони основи дорівнюють $2\sqrt{2}$ см і 5 см і утворюють кут $45°$. Менша діагональ паралелепіпеда дорівнює 7 см. Знайдіть об’єм паралелепіпеда.
4. Сторони основи похилого паралелепіпеда дорівнюють 6 см і 12 см і утворюють кут $60°$. Бічне ребро паралелограма дорівнює 14 см і утворює з площиною основи кут $30°$. Знайдіть об’єм паралелепіпеда.

УРОК № 48
ОБ’ЄМ ПРИЗМИ

Мета: домогтися засвоєння учнями формули для обчислення об’єму призми; сформувати вміння розв’язувати задачі на обчислення об’ємів призм.

Тип уроку: засвоєння знань, формування вмінь.

Наочність та обладнання: моделі призм.

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Правильність виконання домашнього завдання перевіряємо за зразком (готові розв'язання роздаємо учням для самостійного опрацювання та порівняння з результатами, одержаними під час розв'язування задач удома).
Перевірку засвоєння учнями змісту теоретичного матеріалу можна провести у формі математичного диктанту.

Математичний диктант

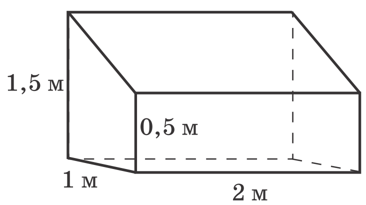
Продовжте речення.

1. Рівні многогранники мають...
2. Якщо многогранник складений із кількох многогранників, то його об'єм дорівнює...
3. Об'єм куба з ребром, що дорівнює одиниці довжини, дорівнює...
4. Рівновеликими називають тіла...
5. Рівноскладеними називають тіла...
6. Якщо виміри прямокутного паралелепіпеда дорівнюють a, b, c, то його об'єм дорівнює...
7. Якщо ребро куба дорівнює a, то його об'єм дорівнює...
8. Об'єм будь-якого паралелепіпеда дорівнює...

III. Формулювання мети й завдань уроку

Відповідну мотивацію для вивчення учнями нової теми можна створити розв'язуванням задачі практичного змісту.

Задача. Фермерові необхідно очистити контейнер, що має форму прямокутного паралелепіпеда об'ємом 3 м^3, у якому він зберігає зерно. Для цього він мусить пересипати зерно в ящик, форму і розміри якого показано на *рисунку*. Визначте, чи поміститься зерно в цей ящик, якщо відомо, що контейнер заповнений зерном вщерть.



З'ясовуємо, що ящик має форму прямої призми, основою якої є прямокутна трапеція. Отже, для того щоб відповісти на запитання задачі, необхідно знайти об'єм призми і порівняти його з об'ємом прямокутного паралелепіпеда. Тож основне завдання уроку — вивчити формули для обчислення об'єму призми.

IV. Актуалізація опорних знань

Виконання усних вправ

1. Чому дорівнює площа прямокутного трикутника з катетами 5 см і 12 см?
2. Чому дорівнює площа рівнобедреного трикутника з бічними сторонами 6 см і кутом $30°$ між ними?
3. Чому дорівнює площа рівнобедреного трикутника з основою 12 см і висотою, проведеною до основи, 8 см?
4. Чому дорівнює площа правильного трикутника зі стороною 2 см?
5. Чому дорівнює площа трикутника зі сторонами 7 см, 15 см, 20 см?
6. Чому дорівнює площа ромба з діагоналями 6 см і 8 см?
7. Чому дорівнює площа прямокутної трапеції, основи якої дорівнюють 3 см і 5 см, а менша бічна сторона — 2 см?
8. Висота прямої призми дорівнює 5 см. Чому дорівнює довжина бічного ребра цієї призми?
9. Діагональ бічної грані правильної трикутної призми дорівнює 4 см і утворює кут $60°$ із площиною основи. Чому дорівнює:
   а) висота призми;
   б) площа основи призми?
10. Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює 8 см і утворює кут $30°$ з площиною бічної грані. Чому дорівнює:
    а) висота призми;
    б) площа основи призми?
11. Чому дорівнює висота правильної чотирикутної призми, якщо площа її діагонального перерізу дорівнює 12 см^2, а площа основи — 8 см^2?

V. Засвоєння знань

План вивчення теми

1. Формула об'єму прямої призми (теорема).
2. Формула об'єму похилої призми.
3. Приклад застосування формули об'єму призми.

Вивчення нового матеріалу проводимо як самостійну роботу учнів за підручником. Потім пропонуємо одному з учнів записати теорему про об'єм прямої призми та її доведення на дошці. З метою перевірки, як учні зрозуміли зміст теореми та її доведення, можна поставити контрольні запитання.

Контрольні запитання

1. Які властивості об'єму було використано під час доведення формули об'єму призми?

2. Чому площа основи паралелепіпеда, до якого було доповнено трикутну призму, дорівнює подвоєній площі трикутника?
3. На які призми розбивають будь-яку призму, наприклад шестикутну, під час виведення формули її об'єму?
4. Під час виведення формули для обчислення об'єму довільної призми її розбивають на довільні призми, які мають одну й ту саму висоту. Чому висоти всіх цих трикутних призм рівні?

Як приклад застосування формули для обчислення об'єму призми можна використати задачу, наведену на етапі формулювання мети й завдань уроку.

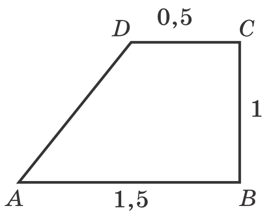
Задача. Фермерові необхідно очистити контейнер, що має форму прямокутного паралелепіпеда об'ємом 3 м^3, у якому він зберігає зерно. Для цього він мусить пересипати зерно в ящик, форму і розміри якого показано на *рисунку*. Визначте, чи поміститься зерно в цей ящик, якщо відомо, що контейнер заповнений зерном вщерть.

Розв'язання. $V = S_{\text{осн.}} \cdot H$. Основою призми є прямокутна трапеція $ABCD$ (див. рисунок), у якої

$$AB = 1{,}5 \text{ м}, \ DC = 0{,}5 \text{ м}, \ CB = 1 \text{ м}.$$

Тоді

$$S_{\text{осн}} = \frac{AB + DC}{2} \cdot CB = \frac{1{,}5 + 0{,}5}{2} \cdot 1 = 1 \text{ м}^2.$$



Висота призми дорівнює 2 м. Отже, $V = 2 \cdot 1 = 2$ м^3.

Висновок. Зерно, що зберігається в контейнері, не поміститься в ящик.

VI. Формування вмінь

Виконання усних вправ

1. Чому дорівнює об'єм прямої трикутної призми, в основі якої лежить прямокутний трикутник із катетами 6 см і 8 см, а висота призми дорівнює 5 см?
2. Знайдіть об'єм прямої призми, в основі якої лежить ромб зі стороною 2 см і гострим кутом $30°$, якщо висота призми дорівнює 8 см.

3. Чи рівновеликі дві прямі призми з рівними висотами, в основі яких лежать чотирикутники з рівними сторонами?

Виконання письмових вправ

1. В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник із катетом 12 см і гіпотенузою 15 см. Бічне ребро призми дорівнює 10 см. Знайдіть об'єм призми.
2. В основі прямої призми лежить трикутник зі сторонами 9 см, 10 см і 17 см. Знайдіть об'єм призми, якщо діагональ найменшої бічної грані дорівнює 41 см.
3. Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює 3,5 м, а діагональ бічної грані — 2,5 м. Знайдіть об'єм призми.
4. В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник, бічна сторона якого дорівнює a, а кут при вершині — α. Діагональ бічної грані, що містить бічну сторону трикутника, нахилена до площини основи під кутом β. Знайдіть об'єм трикутника.
5. Висота прямої трикутної призми дорівнює 5 м, а площі бічних граней відносяться як $17:17:16$. Знайдіть сторони основи призми, якщо її об'єм дорівнює 24 м^3.

Більшість запропонованих задач є типовими для відпрацьовування формули об'єму призми. З метою свідомого засвоєння формули під час розв'язування задач вимагаємо від учнів формулювання правила знаходження об'єму призми, а також обґрунтування дій, спрямованих на розв'язування задачі. Традиційно використовується планіметричний матеріал (теорема Піфагора, формула Герона тощо).

VII. Підсумки уроку

Тестові завдання

1. Яке з наведених тверджень неправильне?
   А) Якщо основи двох призм мають рівні площі, то призма з більшою висотою має більший об'єм;
   Б) якщо периметри основ і висоти двох призм відповідно рівні, то об'єми цих призм обов'язково рівні;
   В) якщо площі основ і висоти двох призм рівні, то об'єми цих призм обов'язково рівні;
   Г) якщо основи двох призм мають рівні площі, то їх об'єми відносяться як висоти призм.
2. Сторону основи правильної чотирикутної призми зменшили удвічі, а висоту збільшили удвічі. Чому дорівнює відношення об'єму утвореної призми до об'єму початкової?
   А) $4:1$; Б) $2:1$; В) $1:1$; Г) $1:2$.

VIII. Домашнє завдання

Вивчити формулу для обчислення об'єму призми.

Розв'язати задачі.

1. Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює 6 см, а площа бічної поверхні — 32 см^2. Знайдіть об'єм призми.
2. Основою призми є правильний трикутник, вписаний у коло радіуса R; бічні грані призми — квадрати. Знайдіть об'єм призми.
3. Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює a, а площа бічної поверхні дорівнює сумі площ основ. Знайдіть об'єм призми.
4. Сторони основи прямої трикутної призми дорівнюють 4 см, 5 см і 7 см, а бічне ребро дорівнює більшій висоті основи. Знайдіть об'єм призми.

УРОК № 49
ОБ'ЄМ ПІРАМІДИ

Мета: домогтися засвоєння формули для обчислення об'єму піраміди.

Сформувати вміння розв'язувати задачі на обчислення об'ємів пірамід.

Тип уроку: засвоєння знань, формування вмінь.

Наочність та обладнання: моделі пірамід.

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Правильність виконання завдань домашньої роботи можна перевірити за зразками, заздалегідь заготовленими вчителем або виконаними учнями на дошці. З метою перевірки засвоєння учнями формули для обчислення об'єму призми та вміння застосовувати її до розв'язування задач можна провести самостійну роботу з подальшою перевіркою або взаємоперевіркою та обговоренням.

Самостійна робота

Варіант 1

1. Основою прямої призми є правильний трикутник зі стороною 4 см. Знайдіть об'єм призми, якщо її бічне ребро дорівнює $2\sqrt{3}$ см.

2. Площі бічних граней прямої трикутної призми дорівнюють 130 см^2, 140 см^2 і 150 см^2. Бічне ребро призми дорівнює 10 см. Знайдіть об'єм призми.
3. Сторону основи правильної n-кутної призми збільшили у три рази (без зміни висоти). У скільки разів збільшився її об'єм?

Варіант 2

1. Основою прямої призми є прямокутний трикутник із катетами 6 см і 8 см. Знайдіть об'єм призми, якщо її висота дорівнює гіпотенузі трикутника, що лежить в основі.
2. Площі бічних граней прямої трикутної призми дорівнюють 25 см^2, 25 см^2 і 30 см^2. Знайдіть об'єм призми, якщо її висота дорівнює 5 см.
3. Сторону основи правильної n-кутної призми зменшили в чотири рази (без зміни висоти). У скільки разів зменшився її об'єм?

III. Формулювання мети й завдань уроку

Як і на попередньому уроці, створюємо відповідну мотивацію вивчення нової теми за допомогою проблемної ситуації, а саме, пропонуємо учням розв'язати задачу практичного змісту.

Задача. Фірма одержала замовлення на виготовлення п'ятдесяти стовпчиків у формі правильної чотирикутної піраміди для огорожі місця, де ведуться дорожні роботи. Відомо, що висота цих стовпчиків має дорівнювати 0,5 м, сторона основи — 0,3 м. Скільки кілограмів матеріалу для виготовлення стовпчиків необхідно закупити фірмі, якщо 1 м^3 такого матеріалу має масу 2700 кг?

З'ясовуємо, що, для того щоб дати відповідь на запитання задачі, необхідно знайти об'єм піраміди. Отже, основне завдання уроку — вивчення формули для обчислення об'єму піраміди.

IV. Актуалізація опорних знань

Фронтальне опитування

1. Де розміщена основа висоти піраміди, якщо:
   а) усі бічні ребра рівні;
   б) усі бічні ребра утворюють однакові кути з площиною основи піраміди;
   в) усі бічні ребра утворюють однакові кути з висотою піраміди;
   г) усі двогранні кути при основі рівні?
2. Чи може бічне ребро бути висотою піраміди? Якщо так, то яке в цьому випадку взаємне розміщення граней піраміди?
3. Чи може висота бічної грані бути висотою піраміди? Якщо так, то наведіть приклад такої піраміди.

Виконання усних вправ

1. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 4 см. Знайдіть висоту піраміди, якщо всі її бічні ребра утворюють з площиною основи кут $60°$.
2. Основою трикутної піраміди є прямокутний трикутник із катетами 6 см і 8 см. Знайдіть висоту піраміди, якщо всі її бічні ребра утворюють із площиною основи кут $45°$.
3. Висота правильної трикутної піраміди дорівнює 3 см, а всі бічні грані утворюють з площиною основи кут $30°$. Знайдіть площу основи піраміди.

V. Засвоєння знань

План вивчення теми

1. Формула об'єму призми (теорема).
2. Приклад застосування формули об'єму призми.

Автори підручників пропонують різні підходи до виведення формули об'єму піраміди. Це або доповнення трикутної піраміди до призми і врахування того факту, що будь-яка піраміда може бути розбита на трикутні, або застосування інтегральної формули для обчислення об'єму. У будь-якому разі доведення теореми про об'єм піраміди можна провести згідно з відповідним параграфом підручника.

Якщо під час виведення формули об'єму піраміди застосовується прийом доповнення трикутної піраміди до призми, то слід звернути увагу учнів на те, що доповнення поданої трикутної піраміди рівними їй пірамідами до призми в загальному випадку неможливе. Формулу для об'єму трикутної призми виводимо за допомогою доповнення поданої піраміди до призми двома рівновеликими (але не рівними!) пірамідами.

Під час застосування будь-якого із зазначених способів виведення формули

$$V=\frac{1}{3}S_{\text{осн}}\cdot H$$

бажано звернути увагу учнів на те, звідки (чому) з'являється у формулі множник $\frac{1}{3}$: у першому способі фігурують три рівновеликі піраміди; у другому — первісна для функції x^2 дорівнює $\frac{1}{3}x^3$.

Як приклад застосування формули для обчислення об'єму піраміди можна використати задачу, наведену на етапі формулювання мети й завдань уроку.

Задача. Фірма отримала замовлення на виготовлення п'ятдесяти стовпчиків у формі правильної чотирикутної піраміди для огорожі місця, де ведуться дорожні роботи. Відомо, що висота цих стовпчиків має дорівнювати 0,5 м, сторона основи — 0,3 м. Скільки кілограмів матеріалу для виготовлення стовпчиків необхідно закупити фірмі, якщо 1 м^3 такого матеріалу має масу 2 700 кг?

Розв'язання. Обчислимо об'єм піраміди, форму якої мають замовлені стовпчики. Площа основи цієї піраміди дорівнює:

$$S=0{,}3^2=0{,}09\ \text{м}^2.$$

Тоді

$$V=\frac{1}{3}\cdot 0{,}09\cdot 0{,}5=0{,}015\ \text{м}^3.$$

Враховуючи, що потрібно п'ятдесят стовпчиків, то необхідно матеріалу: $0{,}015\cdot 50=0{,}75$ м^3. Такий об'єм матеріалу має масу

$$0{,}75\cdot 2700=2\,025\ \text{кг}.$$

Відповідь. 2 025 кг.

VI. Формування вмінь

Виконання усних вправ

1. Чому дорівнює об'єм піраміди, в основі якої лежить прямокутний трикутник із катетами 6 см і 8 см, а висота піраміди дорівнює 10 см?
2. Чому дорівнює об'єм піраміди, в основі якої лежить квадрат із діагоналлю 6 см, а висота піраміди дорівнює 5 см?
3. Об'єм правильної трикутної піраміди, сторона основи якої дорівнює 6 м, становить $36\sqrt{3}$ м^3. Чому дорівнює висота піраміди?

Виконання письмових вправ

1. Висота правильної трикутної піраміди дорівнює $6\sqrt{3}$, а висота її основи — $4\sqrt{3}$ см. Обчисліть об'єм піраміди.
2. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює 6 см, а висота, проведена до неї, — 4 см. Основою висоти піраміди є вершина цього трикутника. Більше бічне ребро піраміди дорівнює 13 см. Обчисліть об'єм піраміди.
3. Основою піраміди є ромб, площа якого дорівнює 600 см^2, а його сторона — 25 см. Висоти всіх бічних граней піраміди дорівнюють 15 см. Обчисліть об'єм піраміди.

4. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник із гіпотенузою c і гострим кутом α. Кожне бічне ребро піраміди утворює з площиною основи кут γ. Знайдіть об'єм піраміди.
5. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник із бічною стороною a і кутом α при основі. Бічна грань піраміди, що містить основу цього трикутника, перпендикулярна до площини основи, а дві інші нахилені до неї під кутом β. Знайдіть об'єм піраміди.

Запропоновані вправи є типовими для формування вмінь учнів обчислювати об'єм піраміди. Як завжди, з метою свідомого засвоєння вивченого матеріалу під час розв'язування задач вимагаємо формулювання відповідних правил, а також обґрунтування дій, спрямованих на розв'язування задачі.

Під час розв'язування задач на знаходження об'єму піраміди важливим моментом є визначення положення основи висоти піраміди. Тому, якщо в умові задачі не сказано, де розміщена основа висоти піраміди (письмові задачі № 3, 4, 5), то необхідно провести попередній аналіз умови задачі та на підставі наявних даних визначити, які властивості має піраміда. Ці властивості також необхідно враховувати під час виконання рисунка до задачі, адже побудова чіткого та охайного рисунка є важливим елементом розв'язання задачі.

VII. Підсумки уроку

Контрольні запитання

1. Запишіть формулу для обчислення об'єму піраміди.
2. Сформулюйте правило, за яким обчислюють об'єм піраміди.
3. Як зміниться об'єм піраміди, якщо сторони її основи збільшити удвічі, а висоту не змінювати?
4. Як зміниться об'єм піраміди, якщо її висоту зменшити удвічі, а сторони основи не змінювати?
5. Як зміниться об'єм піраміди, якщо її висоту зменшити удвічі, а сторони основи збільшити удвічі?
6. Чи рівновеликі дві піраміди з рівними висотами, якщо їх основами є чотирикутники з відповідно рівними сторонами?

VIII. Домашнє завдання

Вивчити формулу для обчислення об'єму піраміди.
Виконати вправи.

1. У правильній чотирикутній піраміді апофема дорівнює 5 см, а радіус кола, описаного навколо основи, — $4\sqrt{2}$ см. Обчисліть об'єм піраміди.
2. В основі піраміди лежить правильний трикутник, сторона якого дорівнює 12 см. Основою висоти піраміди є середина сторони цього трикутника. Більше бічне ребро піраміди дорівнює $10\sqrt{3}$ см. Обчисліть об'єм піраміди.
3. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює a, а її діагональний переріз — рівносторонній трикутник. Знайдіть об'єм піраміди.
4. Основою піраміди є ромб зі стороною a і кутом α. Усі двогранні кути при ребрах основи дорівнюють β. Знайдіть об'єм піраміди.

УРОК № 50
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Мета: працювати над засвоєнням учнями формул для обчислення об'ємів многогранників (паралелепіпедів, призм і пірамід); продовжити роботу з формування вмінь використовувати набуті знання під час розв'язування задач.

Тип уроку: застосування знань, формування вмінь і навичок.

Наочність та обладнання: конспект 35, конспект «Об'єми многогранників», моделі паралелепіпедів, призм і пірамід.

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Домашнє завдання перевіряємо за готовими стислими записами розв'язань. З метою перевірки засвоєння учнями формули для обчислення об'єму піраміди та вміння застосовувати її до розв'язування задач можна провести тестову роботу. Зрозуміло, що по закінченні виконання роботи обов'язково перевіряємо та обговорюємо її результати.

Тестові завдання

Варіант 1

1. Обчисліть об'єм піраміди, основою якої є прямокутник зі сторонами 6 см і 10 см, а висота піраміди дорівнює 15 см.
А) 900 см^3; Б) 240 см^3; В) 480 см^3; Г) 300 см^3.

2. Основою піраміди є прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють 18 см і 24 см. Обчисліть об'єм піраміди, якщо всі її бічні ребра рівні і дорівнюють 17 см.
А) 576 см^3; Б) 624 см^3; В) 872 см^3; Г) 964 см^3.
3. Ребро правильного тетраедра дорівнює $2\sqrt{3}$ см. Обчисліть об'єм цього тетраедра.
А) $2\sqrt{2}$ см^3; Б) $2\sqrt{3}$ см^3; В) $2\sqrt{6}$ см^3; Г) 4 см^3.

Варіант 2

1. Обчисліть об'єм піраміди, основою якої є ромб із діагоналями 10 см і 18 см, а висота піраміди дорівнює 20 см.
А) 300 см^3; Б) 1200 см^3; В) 600 см^3; Г) 1800 см^3.
2. Основою піраміди є прямокутник із діагоналями 24 см і кутом $30°$ між ними. Обчисліть об'єм піраміди, якщо всі бічні ребра піраміди рівні і дорівнюють 13 см.
А) 180 см^3; Б) 240 см^3; В) 300 см^3; Г) 540 см^3.
3. Об'єм правильного тетраедра дорівнює $3\sqrt{2}$ см^3. Чому дорівнює ребро тетраедра?
А) 1 см; Б) 6 см; В) $\sqrt{6}$ см; Г) $\sqrt[3]{36}$ см.

III. Формулювання мети й завдань уроку

Мета уроку безпосередньо випливає з його теми. Оскільки на попередніх уроках було вивчено формули для обчислення об'ємів паралелепіпедів, призм і пірамід, то необхідно продовжити роботу над засвоєнням знань цих формул, сформувати сталі навички застосовувати їх до розв'язування задач на обчислення об'ємів многогранників.

IV. Відтворення та систематизація опорних знань

У результаті вивчення теми «Об'єми та площі поверхонь геометричних тіл» учні насамперед повинні засвоїти формули для обчислення об'ємів та площ поверхонь геометричних тіл. Упродовж останніх уроків вони вивчали формули для обчислення об'ємів многогранників. Тому можна запропонувати учням повторити зазначені формули, користуючись конспектом 35, підручником або записами у зошитах, і створити опорний конспект з цієї теми.

V. Формування вмінь і навичок

Виконання усних вправ

1. Чи правильно, що площа основи призми дорівнює частці від ділення її об'єму на висоту?
2. Чому дорівнює відношення об'єму призми до об'єму піраміди, якщо площі основ у них рівні, а висота призми удвічі більша від висоти піраміди?

Конспект 36

Об'єми многогранників

Многогранник	Формула для обчислення об'єму
Прямокутний паралелепіпед	$V = abc$, де a, b, c — виміри прямокутного паралелепіпеда
Куб	$V = a^3$, де a — ребро куба
Довільний паралелепіпед	$V = S_{осн.} \cdot H$, де $S_{осн.}$ — площа основи паралелепіпеда, H — висота
Призма	$V = S_{осн.} \cdot H$, де $S_{осн.}$ — площа основи призми, H — висота
Піраміда	$V = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot H$, де $S_{осн.}$ — площа основи піраміди, H — висота

3. Чи правильно, що якщо кожне ребро одного тетраедра утричі більше за відповідне ребро другого тетраедра, то об'єм першого тетраедра у 27 разів більший від об'єма другого тетраедра?
4. Чи можуть правильна і неправильна піраміди з рівними основами мати рівні об'єми?

Виконання письмових вправ

1. Цеглина розмірами 25 см $\times$ 12 см $\times$ 6,5 см має масу 3,51 кг. Знайдіть густину матеріалу, з якого виготовлено цю цеглину.
2. Основою прямого паралелепіпеда є ромб, площа якого дорівнює 1 м^2. Площі діагональних перерізів дорівнюють 3 м^2 і 6м^2. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
3. У правильній трикутній призмі радіус кола, описаного навколо основи, дорівнює 2 см, а діагональ бічної грані дорівнює $2\sqrt{15}$ см. Обчисліть об'єм призми.
4. Основою прямої призми є прямокутник, діагональ якого утворює з більшою стороною кут α. Діагональ призми дорівнює d і нахилена до площини основи під кутом β. Знайдіть об'єм призми.
5. Дві взаємно перпендикулярні грані трикутної піраміди — рівносторонні трикутники зі стороною 4 см. Знайдіть об'єм піраміди.

6. Основою піраміди є рівнобічна трапеція, основи якої дорівнюють 3 см і 5 см, а бічна сторона дорівнює 7 см. Висота піраміди проходить через точку перетину діагоналей основи. Більше бічне ребро піраміди дорівнює 10 см. Знайдіть об'єм піраміди.
7. Основою піраміди є прямокутний трикутник із гострим кутом α. Бічне ребро, яке проходить через вершину другого гострого кута основи, перпендикулярне до площини основи і дорівнює h, а бічна грань, яка містить катет, прилеглий до кута α, нахилена до площини основи під кутом β. Знайдіть об'єм піраміди.

VII. Підсумки уроку

Підсумком уроку може бути усвідомлення учнями основного кола задач, які вони зможуть розв'язати, використовуючи вивчені формули.

VIII. Домашнє завдання

Повторити формули (*див. конспект 36*).
Виконати домашню самостійну роботу.

Домашня самостійна робота

1. Основою прямого паралелепіпеда є паралелограм, сторони якого дорівнюють 3 см і 5 см і утворюють кут $60°$. Площа більшого діагонального перерізу дорівнює 63 см^2. Обчисліть об'єм паралелепіпеда.
2. У прямокутному паралелепіпеді діагональ d утворює з площиною основи кут α, а з площиною бічної грані — кут β. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
3. Основою прямої призми є ромб із гострим кутом $30°$. Діагональ бічної грані утворює з площиною основи кут $60°$. Знайдіть об'єм призми, якщо її висота дорівнює 6 см.
4. В основі прямої призми лежить трапеція. Виразіть об'єм призми через площі S_1 і S_2 паралельних бічних граней і відстань h між ними.
5. Основою піраміди є ромб, площа якого дорівнює 600 см^2, а сторона — 25 см. Висоти всіх бічних граней піраміди дорівнюють 15 см. Обчисліть об'єм піраміди.
6. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник із бічною стороною a і кутом α при основі. Усі двогранні кути при основі дорівнюють β. Знайдіть об'єм піраміди.

УРОК № 51
ОБ'ЄМ ЦИЛІНДРА

Мета: домогтися засвоєння формули для обчислення об'єму циліндра.

Сформувати вміння розв'язувати задачі на обчислення об'єму циліндра.

Тип уроку: засвоєння знань, формування вмінь.

Наочність та обладнання: моделі циліндрів.

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Збираємо зошити для перевірки й оцінювання домашньої самостійної роботи. У разі необхідності учні одержують правильні розв'язання цих вправ для самостійного опрацювання вдома. Можна також провести аналіз розв'язання найбільш складних задач.

III. Формулювання мети й завдань уроку

З метою створення ситуації, що допоможе учням усвідомити необхідність вивчення нового матеріалу уроку, можна запропонувати їм розв'язати задачу практичного змісту.

Задача. Бункер для зберігання зерна має форму циліндра. Його висота дорівнює 8,4 м, діаметр основи — 4 м. Скільки тонн зерна вміщує бункер, якщо маса 1 м^3 зерна дорівнює 0,7 т?

Після обговорення ситуації, учні доходять висновку, що, для того щоб дати відповідь на запитання задачі, необхідно обчислити об'єм циліндра. Отже, основним завданням уроку є засвоєння формули для обчислення об'єму циліндра.

IV. Актуалізація опорних знань

З метою свідомого засвоєння формули для обчислення об'єму циліндра на цьому етапі уроку доцільно повторити формули для обчислення об'єму призми, а також поняття про многокутник, вписаний у коло, та про многокутник, описаний навколо кола. Особливо наголошуємо на тому, що площі таких многокутників мало відрізняються від площі круга під час необмеженого подвоєння кількості їх сторін.

Фронтальне опитування

1. Який многокутник називають вписаним у коло?
2. Який многокутник називають описаним навколо кола?

3. Як у планіметрії обґрунтовують формулу для обчислення площі круга?
4. Яку призму називають вписаною у циліндр?
5. Яку призму називають описаною навколо циліндра?
6. Наведіть формулу для обчислення об'єму призми.

Виконання усних вправ

1. Знайдіть площу круга, якщо:
   а) його радіус дорівнює 3 см;
   б) його діаметр дорівнює 4 см;
   в) довжина його кола дорівнює 6 см.
2. Радіус основи циліндра дорівнює 2 см, а діагональ осьового перерізу — 5 см. Чому дорівнює висота циліндра?
3. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 8 см і утворює з площиною основи кут $60°$. Чому дорівнюють висота і радіус основи циліндра?
4. Висота прямої призми, вписаної в циліндр, дорівнює 5 см. Чому дорівнює висота циліндра?
5. Висота циліндра, вписаного в пряму призму, дорівнює 10 см. Чому дорівнює висота призми?
6. Чому дорівнює об'єм правильної чотирикутної призми, вписаної в циліндр, радіус основи якого дорівнює 2 см, а висота — 5 см?

V. Засвоєння знань

План вивчення теми

1. Формула для обчислення об'єму циліндра.
2. Приклад застосування формули для обчислення об'єму циліндра.

Залежно від рівня математичної підготовки учнів викладення нового матеріалу проводимо або у лекційній формі, дотримуючись виведення формули для обчислення об'єму циліндра, наведеного у відповідному параграфі підручника, або у формі фронтальної бесіди, або пропонуємо учням самостійно опанувати цей матеріал за підручником.

Як приклад застосування формули для обчислення об'єму циліндра традиційно розглядаємо задачу, наведену на етапі формулювання мети й завдань уроку.

Задача. Бункер для зберігання зерна має форму циліндра. Його висота дорівнює 8,4 м, а діаметр основи — 4 м. Скільки тонн зерна вміщує бункер, якщо маса 1 м^3 зерна дорівнює 0,7 т?

Розв'язання. Скориставшися формулою $V=\pi R^2 H$, знайдемо об'єм бункера:

$$V=\pi\cdot 2^2\cdot 4{,}8\approx 60{,}3 \text{ м}^3.$$

Оскільки маса 1 м^3 зерна дорівнює 0,7 т, то маса зерна, яке вміщує бункер, дорівнює:

$$60{,}3\cdot 0{,}7=42{,}21 \text{ т}.$$

Відповідь. 42,21 т.

VI. Формування вмінь

Виконання усних вправ

1. Радіус основи циліндра дорівнює 2 см, а висота циліндра — 3 см. Обчисліть об'єм циліндра.
2. Чому дорівнює об'єм циліндра, осьовим перерізом якого є квадрат зі стороною 4 см?
3. Знайдіть об'єм тіла, що утворене в результаті обертання квадрата зі стороною 5 см, навколо його сторони.
4. Радіус основи циліндра дорівнює 3 см, а об'єм циліндра — 36π см^3. Чому дорівнює висота циліндра?
5. Діаметр основи одного циліндра дорівнює 0,2 м, а його висота — 0,6 м. Другий циліндр має висоту 0,3 м і такий же самий діаметр основи. Порівняйте об'єми цих циліндрів.
6. Один циліндр має висоту 2,4 м і діаметр основи 1 м; другий циліндр має висоту 1,2 м і діаметр основи 0,5 м. Порівняйте об'єми цих циліндрів.
7. Як відносяться об'єми циліндра та його моделі, зменшеної у масштабі:
   а) $1:2$; б) $1:3$; в) $1:n$?

Виконання письмових вправ

1. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 8 см і нахилена до площини основи під кутом $30°$. Знайдіть об'єм циліндра.
2. У нижній основі циліндра хорда, що дорівнює 6 см, віддалена від його осі на відстань 4 см. Обчисліть об'єм циліндра, якщо відстань від центра верхньої основи циліндра до кінця цієї хорди дорівнює 13 см.
3. У циліндрі паралельно його осі на відстані 4 см від неї проведено переріз, діагональ якого дорівнює $6\sqrt{5}$ см. Обчисліть об'єм циліндра, якщо його радіус дорівнює 5 см.
4. У циліндр, об'єм якого дорівнює V, вписано правильну чотирикутну призму. Знайдіть об'єм цієї призми.
5. Мідний дріт діаметром 2 мм має масу 5,6 кг. Знайдіть довжину дроту, якщо відомо, що густина міді дорівнює $8{,}9\cdot 10^3$ кг/м^3.

6. Знайдіть площу круглої плями на поверхні моря, утвореної 1 м^3 розлитої нафти, якщо товщина плівки дорівнює 1 мм.

Більшість запропонованих вправ є типовими вправами, спрямованими на засвоєння формули для обчислення об'єму циліндра. Як завжди, з метою свідомого засвоєння нового матеріалу вимагаємо від учнів формулювання відповідних правил та обґрунтувань. Письмова задача № 4 вимагає нестандартного підходу. Для її розв'язування необхідно спочатку радіус циліндра виразити через його об'єм і висоту:

$$R^2 = \frac{V}{\pi H},$$

потім сторону основи вписаної призми виразити через радіус циліндра:

$$a^2 = 2R^2 \text{ або } a^2 = \frac{2V}{\pi H},$$

а далі, враховуючи, що висоти циліндра і вписаної призми рівні, знайти об'єм призми:

$$V_{\text{призми}} = a^2 H = \frac{2V}{\pi H} \cdot H = \frac{2V}{\pi}.$$

Письмові задачі № 5 і 6 — це задачі практичного змісту, для розв'язування яких необхідно застосувати формулу об'єму циліндра.

VII. Підсумки уроку

Контрольні запитання

1. Запишіть формулу для обчислення об'єму циліндра.
2. Сформулюйте правило обчислення об'єму циліндра.
3. Об'єм циліндра дорівнює 900π см^3, його висота — 1 см. Чи правильно, що:
   а) площа основи циліндра дорівнює 900π см^2;
   б) радіус основи циліндра дорівнює 90 см;
   в) радіус основи циліндра в 30 разів менший від його твірної;
   г) довжина кола основи циліндра дорівнює 60π см?

VIII. Домашнє завдання

Вивчити формулу для обчислення об'єму циліндра.

Виконати вправи.

1. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює $8\sqrt{3}$ і нахилена до площини основи під кутом $60°$. Знайдіть об'єм циліндра.

2. Прямокутник зі сторонами 4 см і 7 см обертається навколо меншої сторони. Знайдіть об'єм тіла обертання.
3. У циліндрі паралельно його осі на відстані 4 см від неї проведено переріз, діагональ якого дорівнює $6\sqrt{5}$ см. Обчисліть об'єм циліндра, якщо цей переріз перетинає основу по хорді, яка дорівнює 6 см.
4. Об'єм циліндра дорівнює V. Знайдіть об'єм правильної трикутної призми, описаної навколо циліндра.
5. Яку кількість нафти (у тоннах) вміщує циліндрична цистерна діаметром 12 м і висотою 6 м, якщо густина нафти 0,85 г/м^3?

УРОК № 52
ОБ'ЄМ КОНУСА

Мета: домогтися засвоєння формули для обчислення об'єму конуса.

Сформувати вміння розв'язувати задачі на обчислення об'єму конуса.

Тип уроку: засвоєння знань, формування вмінь.

Наочність та обладнання: моделі конусів.

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Оскільки вправи для домашнього завдання аналогічні тим, що були розв'язані на попередньому уроці, то перевіряємо тільки правильність обчислень. За необхідності можна роздати учням правильні розв'язання задач для самостійного опрацьовування. Засвоєння формули для обчислення об'єму циліндра та вміння застосовувати цю формулу до розв'язування задач перевіряємо за допомогою тестової роботи.

Тестові завдання

1. Радіус основи циліндра дорівнює 5 см, висота циліндра — 10 см. Знайдіть об'єм циліндра.
   А) 100π см^3; Б) 25π см^3; В) 250π см^3; Г) 500π см^3.
2. Об'єм циліндра дорівнює 216π см^3, його висота — 6 см. Чому дорівнює радіус основи циліндра?
   А) 6 см; Б) 12 см; В) 3 см; Г) 36 см.

3. Осьовим перерізом циліндра є квадрат із діагоналлю $6\sqrt{2}$ см. Чому дорівнює об'єм циліндра?
А) 48π см^3; Б) 54π см^3; В) 72π см^3; Г) 108π см^3.
4. Прямокутник зі сторонами 6 см і 4 см обертається навколо більшої зі сторін. Знайдіть об'єм утвореного тіла обертання.
А) 96π см^3; Б) 108π см^3; В) 144π см^3; Г) 156π см^3.
5. Радіус основи і висоту циліндра збільшили удвічі. У скільки разів збільшився об'єм циліндра?
А) У 2 рази; Б) у 4 рази; В) у 6 разів; Г) у 8 разів.
6. Об'єм циліндра зменшили у 64 рази. Яке з наведених тверджень неправильне?
А) Радіус основи циліндра зменшили у 8 разів;
Б) висоту циліндра зменшили у 64 рази;
В) радіус основи і висоту циліндра зменшили у 4 рази;
Г) радіус основи циліндра зменшили у 4 рази, а висоту — у 16 разів.

III. Формулювання мети й завдань уроку

Традиційно для уроків, на яких вивчаємо об'єми геометричних тіл, відповідну мотивацію учнів можна створити за допомогою проблемної ситуації, запропонувавши учням розв'язати задачу практичного змісту.

Задача. Відра, які зазвичай використовують під час гасіння пожежі мають конічну форму (з'ясуйте, чому саме конічну). Скільки літрів води вміщує таке відро, якщо його висота дорівнює 0,5 м, а діаметр основи — 0,3 м (1 літр води займає об'єм 1 000 см^3)?

Зрозуміло, що для знаходження кількості літрів води, що вміщує таке відро, необхідно знайти його об'єм, тобто обчислити об'єм конуса. Отже, основне завдання уроку — засвоїти формули для обчислення об'єму конуса.

IV. Актуалізація опорних знань

Оскільки для виведення формули для обчислення об'єму конуса зазвичай використовують той самий прийом, що і для виведення формули об'єму циліндра, то, як і на попередньому уроці, доцільно повторити поняття пірамід, вписаних у конус, та описаних навколо конуса, а також і поняття конуса і піраміди та їх елементів, формулу для обчислення об'єму піраміди.

Фронтальне опитування

1. Сформулюйте означення піраміди, вписаної в конус.

2. Сформулюйте означення піраміди, описаної навколо конуса.
3. Запишіть формулу і сформулюйте правило для обчислення об'єму піраміди.
4. У один і той самий конус вписано чотирикутну і двадцятичотирикутну піраміду. Як ви вважаєте, об'єм якої з пірамід буде менше відрізнятися від об'єму конуса?

Виконання усних вправ

1. У конус вписано піраміду. Чому дорівнює висота конуса, якщо висота піраміди дорівнює 5 см?
2. Площа основи піраміди дорівнює 12 см^2, а висота піраміди — 6 см. Обчисліть об'єм піраміди.
3. Твірна конуса дорівнює 5 см, а його висота — 3 см. Обчисліть площу основи конуса.
4. Осьовим перерізом конуса є рівносторонній трикутник зі стороною 6 см. Чому дорівнюють висота і площа основи конуса?

V. Засвоєння знань

План вивчення теми

1. Формула для обчислення об'єму конуса.
2. Приклад застосування формули для обчислення об'єму конуса.

Як уже зазначалось, виведення формули для обчислення об'єму конуса аналогічне виведенню формули для обчислення об'єму циліндра. Тому залежно від рівня математичної підготовки учнів можна запропонувати їм або самостійно вивести цю формулу, або самостійно опрацювати відповідний текст підручника. В обох випадках по закінченні цієї роботи доцільно викликати учня до дошки для запису виведення формули об'єму конуса.

Прикладом задачі на обчислення об'єму конуса традиційно може бути задача, запропонована на етапі формулювання мети й завдань уроку.

Задача. Відра, які зазвичай використовують під час гасіння пожежі, мають конічну форму. Скільки літрів води вміщує таке відро, якщо його висота дорівнює 0,5 м, а діаметр основи 0,3 м (1 літр води займає об'єм 1 000 см^3)?

Розв'язання. Знайдемо радіус основи конуса, форму якого має відро для гасіння пожежі: $R = 0{,}3 : 2 = 0{,}15$ м. Тоді, скориставшися формулою

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H,$$

знаходимо:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}15^2 \cdot 0{,}5 \approx 0{,}0118 \text{ м}^3 = 11\,800 \text{ см}^3.$$

Оскільки в 1 000 см^3 міститься 1 літр води, то відро об'ємом 11 800 см^3 вміщує 11,8 літрів води.

Відповідь. 11,8 літрів.

VI. Формування вмінь

Виконання усних вправ

1. Висота конуса дорівнює 5 см, а площа його основи — 36π см^2. Знайдіть об'єм конуса.
2. Об'єм конуса з висотою 4 см дорівнює 12π см^3. Знайдіть радіус основи конуса.
3. Об'єм циліндра дорівнює 36π см^3. Чому дорівнює об'єм конуса з такою ж самою основою і висотою, удвічі меншою від висоти циліндра?
4. Об'єм конуса дорівнює 18π см^3. Чому дорівнює об'єм циліндра з такою ж висотою і радіусом основи, удвічі більшим від радіуса основи конуса?
5. Прямокутний трикутник із гіпотенузою 5 см і катетом 4 см обертається навколо цього катета. Знайдіть об'єм тіла обертання.
6. Знайдіть об'єм конуса, осьовим перерізом якого є рівносторонній трикутник зі стороною $2\sqrt{3}$ см.

Виконання письмових вправ

1. Твірна конуса дорівнює $\sqrt{6}$ см і утворює з площиною основи кут $45°$. Знайдіть об'єм конуса.
2. Знайдіть об'єм конуса, якщо кут при вершині його осьового перерізу дорівнює 2α, а твірна конуса — l.
3. У конус вписано правильну чотирикутну піраміду, двогранний кут при основі якої дорівнює α, довжина сторони основи — a. Знайдіть об'єм конуса.
4. Рідину, що міститься у склянці діаметром 8 см і висотою 9 см, переливають у посудину конічної форми діаметром 10 см і висотою 15 см. Чи поміститься рідина у цій посудині?
5. Рівнобедрений трикутник, кут при вершині якого дорівнює β, а бічна сторона — m, обертається навколо осі, що містить бічну сторону. Знайдіть об'єм тіла обертання.
6. Вершиною конуса є центр верхньої грані куба, а його основою — круг, вписаний у нижню основу. Об'єм конуса дорівнює V. Знайдіть об'єм куба.

Майже всі вправи, що передбачені для розв'язування на уроці, є типовими вправами, спрямованими на засвоєння формули для обчислення об'єму конуса. Як завжди, з метою свідомого засвоєння нового матеріалу доцільно вимагати від учнів формулювання відповідних правил та обґрунтувань.

Під час розв'язування письмової вправи № 5 учні повинні зрозуміти, що фігура, утворена в результаті обертання рівнобедреного трикутника навколо однієї зі своїх бічних сторін, складається з двох конусів зі спільною основою; радіус основи дорівнює висоті трикутника, проведеної до бічної сторони, а сума висот цих конусів дорівнює бічній стороні трикутника.

Для розв'язування письмової задачі № 6 необхідно величину a^3, де a — ребро куба, виразити через об'єм конуса. Відомо, що

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

Зрозуміло, що $H = a$. Оскільки основа конуса вписана в основу куба (тобто круг радіуса R вписано в квадрат зі стороною a), то

$$R = \frac{a}{2},\ R^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Тоді

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{a^2}{4} \cdot a = \frac{\pi a^3}{12},$$

звідки

$$a^3 = \frac{12V}{\pi}.$$

VII. Підсумки уроку

Гра «Вірю — не вірю»

Які з наведених тверджень правильні?

1. Об'єм конуса обчислюють за формулою $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.
2. Об'єм конуса дорівнює півдобутку площі його основи на висоту.
3. Якщо площа основи конуса дорівнює 9, а висота — $\frac{1}{3}$, то його об'єм дорівнює 1.
4. Для того щоб об'єм конуса зменшився у 27 разів, можна, не змінюючи радіуса основи, зменшити висоту конуса у 9 разів.
5. Об'єм тіла, утвореного в результаті обертання прямокутного трикутника з катетами 5 см і 12 см навколо більшого з катетів, дорівнює 100π см^3.

6. Якщо конус і циліндр мають однакові радіуси основ і висоти, то об'єм циліндра утричі менший від об'єму конуса.

VIII. Домашнє завдання

Вивчити формулу для обчислення об'єму конуса.
Виконати вправи.

1. Знайдіть об'єм конуса, висота якого дорівнює 8 см, а твірна нахилена до площини основи під кутом $60°$.
2. Осьовим перерізом конуса є прямокутний трикутник із гіпотенузою 12 см. Знайдіть об'єм цього конуса.
3. У конус вписано правильну трикутну піраміду, двогранний кут при основі якої дорівнює α, апофема піраміди — m. Знайдіть об'єм конуса.
4. Трикутник зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см обертається навколо сторони довжиною 14 см. Знайдіть об'єм тіла обертання.
5. Об'єм конуса дорівнює V. Через середину висоти проведено площину, паралельну основі конуса. Чому дорівнює об'єм утвореного зрізаного конуса?

УРОК № 53
ОБ'ЄМ КУЛІ

Мета: домогтися засвоєння формули для обчислення об'єму кулі.

Сформувати вміння розв'язувати задачі на обчислення об'єму кулі.

Тип уроку: засвоєння знань, формування вмінь.

Наочність та обладнання: моделі кулі.

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Виконання письмових вправ домашнього завдання перевіряємо за готовими стислими записами розв'язань, які виконали учні на дошці заздалегідь, або за картками, які надає вчитель (залежно від рівня знань і вмінь учнів).

Перевірку засвоєння учнями формули для обчислення об'єму конуса можна провести у формі математичного диктанту. Відповіді на запитання математичного диктанту перевіряємо і коригуємо одразу після виконання роботи.

Математичний диктант

1. Знайдіть об'єм конуса, площа основи якого дорівнює 24π см^2, а висота — 2 см.
2. Знайдіть об'єм конуса, радіус якого дорівнює 6 см, а твірна — 10 см.
3. Конус і циліндр мають рівні основи й об'єми. Знайдіть відношення висоти циліндра до висоти конуса.
4. Прямокутний трикутник із катетом $2\sqrt{3}$ см і гострим кутом $60°$ обертається навколо катета, прилеглого до цього кута. Знайдіть об'єм тіла обертання.
5. Висота конуса дорівнює 4 см. Знайдіть об'єм цього конуса, якщо його осьовим перерізом є рівносторонній трикутник.
6. У скільки разів потрібно збільшити радіус основи конуса, якщо при такій же самій висоті його об'єм збільшився у 9 разів?

III. Формулювання мети й завдань уроку

З метою створення відповідної мотивації учнів можна провести бесіду, у ході якої нагади учням, що згідно зі шкільною програмою з математики вони розглянули такі тіла обертання: циліндр, конус та куля. На попередніх уроках учні засвоїли формули для обчислення об'ємів циліндра і конуса. Тож цілком логічно, що завдання уроку — вивчити формули для обчислення об'єму кулі.

Відповідну мотивацію також можна створити, запропонувавши учням розв'язати задачу практичного змісту.

Задача. За замислом архітектора вхід до Палацу молоді мають прикрашати дві кулі діаметром 0,8 м, які розміщено по обидва боки від сходів. Ці кулі виготовляють із природного каменю, густина якого дорівнює $4{,}5\times10^3$ кг/м^3. Чи можна обидві виготовлені у майстерні кулі доставити до місця будівництва на одній вантажівці, вантажопідйомність якої дорівнює 3 т?

Учні мають зрозуміти, що для відповіді на запитання задачі необхідно знайти об'єм кулі.

IV. Актуалізація опорних знань

Актуалізація опорних знань і подальше вивчення нового матеріалу цілком залежить від рівня математичної підготовки учнів. Якщо на уроках алгебри і початків аналізу учні ознайомилися з інтегральною формулою для обчислення об'ємів тіл у рамках вивчення теми «Інтеграл та його застосування» (що згідно з чинною програмою не є обов'язковим), то можна повторити цю формулу та приклади її застосування, а також означення кулі та її елементів і їх властивості. Якщо ж ця формула учням невідома, то повторюємо означення кулі, її елементів і їх властивості, а формулу, про яку йдеться, просто повідомляємо учням безпосередньо під час виведення формули для обчислення об'єму кулі.

Фронтальне опитування

[1. Криволінійна трапеція, обмежена графіком функції $y = f(x)$, віссю Ox та прямими $x = a$ і $x = b$, обертається навколо осі Ox. Запишіть інтегральну формулу для обчислення об'єму тіла, утвореного у результаті такого обертання.]
2. Запишіть рівняння кола із центром у початку координат, радіус якого дорівнює R.
3. Сформулюйте означення кулі.
4. Що називають радіусом кулі?
5. Що таке великий круг?
6. Чому кулю можна вважати тілом обертання? (Результатом обертання якої фігури і навколо якої осі є куля?)

V. Засвоєння знань

План вивчення теми

1. Формула для обчислення об'єму кулі.
2. Приклад застосування формули для обчислення об'єму кулі.

Як уже зазначалось, викладення нового матеріалу залежить від рівня математичної підготовки учнів. Якщо учні володіють інтегральною формулою для обчислення об'єму, то виведення формули можна провести у формі фронтальної бесіди. В іншому випадку викладення цього матеріалу доцільно провести лекційним способом.

Метод, який було застосовано до виведення формул для обчислення об'ємів циліндра і конуса, до виведення формули для обчислення об'єму кулі застосувати не можна, оскільки серед многогранників, які вивчають у школі, немає таких, які б наближали кулю. Тому використовують той факт, що куля є тілом обертання, й застосовують зазначену формулу для обчислення об'єму тіла, утвореного в результаті обертання півкола з радіусом R, центр якого знаходиться в початку координат, навколо осі Ox. Цей принцип виведення потрібної формули є яскравим прикладом застосування методів математичного аналізу до «потреб» геометрії.

Традиційно прикладом задачі на обчислення об'єму кулі може бути задача, яку пропонуємо учням на етапі формулювання мети й завдань уроку.

Задача. За замислом архітектора вхід до Палацу молоді мають прикрашати дві кулі діаметром 0,8 м, які розміщено по обидва боки від сходів. Ці кулі виготовляють із природного каменю, густина якого дорівнює $4{,}5\times10^3$ кг/м³. Чи можна обидві виготовлені у майстерні кулі доставити до місця будівництва однією вантажівкою, вантажопідйомність якої дорівнює 3 т?

Розв'язання. Радіус кулі дорівнює 0,4 м. За формулою

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

обчислимо об'єм кожної кулі:

$$V = \frac{4}{3}\cdot 3{,}14\cdot 0{,}4^3 \approx 0{,}268 \text{ м}^3.$$

Знайдемо масу кожної кулі:

$$0{,}268\cdot 4{,}5\cdot 10^3 = 1\,206 \text{ кг}.$$

Тоді маса двох таких куль дорівнює

$$1206\cdot 2 = 2412 \text{ кг} = 2 \text{ т } 412 \text{ кг},$$

тобто обидві кулі можна перевозити однією вантажівкою зазначеної вантажопідйомності.

VI. Формування вмінь

Виконання усних вправ

1. Радіус кулі дорівнює 1 м. Знайдіть об'єм кулі.
2. Діаметр кулі дорівнює 6 см. Знайдіть об'єм кулі.
3. Із кулі, діаметр якої дорівнює 20 см, виготовляють кульки з діаметром у 10 разів меншим. Скільки таких кульок одержать?
4. Об'єм однієї кулі у 8 разів більший від об'єму другої кулі. У скільки разів радіус першої кулі більший від радіуса другої кулі?

Виконання письмових вправ

1. Радіуси трьох куль дорівнюють 3 см, 4 см і 5 см. Знайдіть радіус кулі, об'єм якої дорівнює сумі об'ємів поданих куль.
2. Модель кулі з діаметром 12 см і модель куба з ребром 10 см виготовлено з одного й того самого матеріалу. Маса якої моделі менша?
3. Свинцеву кулю з радіусом 6 см переплавили у циліндр, діаметр основи якого дорівнює 12 см. Знайдіть висоту циліндра.
4. Доведіть, що якщо радіуси трьох куль відносяться як $1:2:3$, то об'єм найбільшої кулі дорівнює сумі об'ємів менших куль.

5. Маса металевої кулі дорівнює 37 г, діаметр кулі — 2 см. Обчисліть густину металу.
6. Знайдіть діаметр чавунної кулі масою 1 кг, якщо густина чавуну дорівнює 7 г/ см^3.

Задачі, що заплановані для розв'язування на уроці, сприяють засвоєнню формули для обчислення об'єму кулі та формуванню вміння учнів розв'язувати задачі на обчислення об'ємів куль.

Під час розв'язування задачі № 3 звертаємо увагу учнів на те, що радіуси кулі і циліндра рівні і, для того щоб знайти висоту циліндра, потрібно прирівняти об'єми циліндра і конуса.

У письмових задачах № 5 і 6 фігурує поняття густини речовини. За необхідності можна нагадати учням, що густину ρ деякої речовини обчислюють за формулою:

$$\rho = \frac{m}{V},$$

де m — маса тіла, виготовленого з цієї речовини, V — об'єм цього тіла.

VII. Підсумки уроку

Контрольні запитання

1. Запишіть формулу для обчислення об'єму кулі.
2. Знайдіть об'єм кулі, радіус якої дорівнює 6 см.
3. Знайдіть діаметр кулі, об'єм якої дорівнює 36π см^3.

VIII. Домашнє завдання

Вивчити формулу для обчислення об'єму кулі.

Виконати вправи.

1. Яке тіло має більший об'єм: куля радіуса 1 см чи правильна трикутна призма, кожне ребро якої дорівнює 2 см?
2. Потрібно виготовити свинцеву кулю з діаметром 3 см. Скільки свинцевих кульок з діаметром 5 мм для цього необхідно взяти?
3. Переріз кулі площиною, віддаленою від центра кулі на відстань 2 см, має площу 12π см^2. Знайдіть об'єм кулі.
4. Латунну кулю з діаметром 8 см переплавили в конус, радіус основи якого дорівнює 4 см. Знайдіть висоту конуса.

УРОК № 54
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Мета: працювати над засвоєнням учнями формул для обчислення об'ємів тіл обертання (циліндра, конуса, кулі); продовжити роботу з формування вмінь використовувати набуті знання під час розв'язування задач.

Тип уроку: застосування знань, формування вмінь і навичок.

Наочність та обладнання: конспект «Об'єми тіл обертання», моделі циліндрів, конусів, куль.

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Організовуємо роботу з перевірки домашнього завдання за зразком з обов'язковим коментуванням учнями змісту наданих учителем правильних розв'язань домашніх задач. Після виконання роботи за зразком учні за необхідності виконують корекцію своїх розв'язань у робочих зошитах.

III. Формулювання мети й завдань уроку

Мета уроку безпосередньо випливає з його теми. Оскільки на попередніх уроках було вивчено формули для обчислення об'ємів тіл обертання, то необхідно продовжити роботу над засвоєнням знань цих формул, сформувати сталі навички застосовувати їх до розв'язування задач на обчислення об'ємів циліндрів, конусів і куль.

IV. Відтворення та систематизація опорних знань

Під час вивчення теми «Об'єми та площі поверхонь геометричних тіл» учні насамперед повинні засвоїти формули для обчислення об'ємів та площ поверхонь геометричних тіл і навчитися застосовувати їх до розв'язування задач. Протягом останніх уроків вони вивчали формули для обчислення об'ємів тіл обертання. Тому, як і на попередньому уроці, присвяченому розв'язуванню задач, можна запропонувати учням повторити зазначені формули, користуючись підручником або записами у зошитах, і створити опорний конспект з цієї теми.

Конспект 37

Об'єми тіл обертання

Тіло обертання	Формула для обчислення об'єму
Циліндр	$V=\pi R^2 H$, де R — радіус основи, H — висота циліндра
Конус	$V=\frac{1}{3}\pi R^2 H$, де R — радіус основи, H — висота конуса
Куля	$V=\frac{4}{3}\pi R^3$, де R — радіус кулі

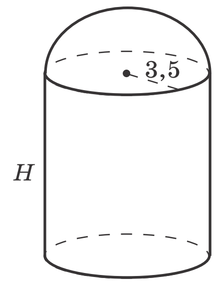
V. Формування вмінь і навичок

Виконання усних вправ

1. Площа основи циліндра дорівнює 144π см², а площа його осьового перерізу — 72 см². Знайдіть об'єм циліндра.
2. Прямокутник зі сторонами 23 см і 37 см обертається спочатку навколо меншої, а потім — навколо більшої сторони. У якому разі об'єм тіла обертання буде більшим?
3. Радіус основи конуса дорівнює 5 см, а висота — $\frac{3}{\pi}$ см. Чому дорівнює об'єм конуса?
4. Знайдіть об'єм конуса, діаметр основи якого дорівнює 6 см, а кут між твірною і площиною основи — $30°$.
5. Чому дорівнює об'єм кулі, якщо площа її великого круга дорівнює 81π см²?
6. Радіус кулі збільшили на 10 %. На скільки відсотків збільшився об'єм кулі?

Виконання письмових вправ

1. У циліндрі, об'єм якого дорівнює 35 см³, висоту збільшили утричі, а радіус основи зменшили утричі. Чому дорівнює об'єм нового циліндра?
2. В основі циліндра проведено хорду, яка стягує дугу α. Відрізок, що сполучає центр другої основи із серединою цієї хорди, дорівнює l і утворює з площиною основи кут β. Обчисліть об'єм циліндра.
3. Товщина стінок сталевої труби дорівнює 5 мм, довжина зовнішнього кола поперечного перерізу труби — 160 мм. Знайдіть масу одного погонного метра труби, якщо густина сталі дорівнює 7,8 г/см³.
4. Через вершину конуса проведено площину під кутом α до площини основи. Ця площина перетинає основу конуса по хорді, яку видно із центра основи під кутом β. Знайдіть об'єм конуса, якщо центр його основи знаходиться на відстані d від хорди.
5. Конічна вирва в землі має довжину кола основи 45 м, а глибину 6 м. Скільки потрібно тонн ґрунту для заповнення вирви, якщо густина ґрунту дорівнює 2 г/см³?
6. Рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює a і кут при основі α, обертається навколо осі, яка проходить через вершину трикутника паралельно основі. Знайдіть об'єм тіла обертання.
7. Яке тіло має більший об'єм: куля з діаметром 6 см чи циліндр, діаметр основи якого дорівнює 6 см, а висота — 4 см?
8. Резервуар для води складається з півкулі з радіусом 3,5 м і циліндра з таким же радіусом основи (*див. рисунок*). Чому має дорівнювати висота його циліндричної частини, щоб об'єм усього резервуару дорівнював 200 м³?



VII. Підсумки уроку

Підсумком уроку може бути усвідомлення учнями основного кола задач, які вони зможуть розв'язати, використовуючи вивчені формули.

VIII. Домашнє завдання

Повторити формули (*див. конспект 36*).

Виконати домашню самостійну роботу.

Домашня самостійна робота

1. Радіус основи циліндра дорівнює 5 см. Знайдіть об'єм циліндра, якщо його осьовим перерізом є прямокутник, одна зі сторін якого дорівнює 8 см.

2. В основі циліндра проведено хорду, яку видно із центра цієї основи під кутом β. Відстань від цього центра до хорди дорівнює d. Відрізок, що сполучає центр однієї основи з точкою кола другої основи, утворює з площиною основи кут α. Обчисліть об'єм циліндра.
3. У конусі об'єму 12 см^3 висоту збільшили в 4 рази, а радіус основи зменшили удвічі. Чому дорівнює об'єм утвореного конуса?
4. Через вершину конуса проведено площину під кутом α до площини основи. Ця площина перетинає основу конуса по хорді, яку видно із центра основи під кутом β. Знайдіть об'єм конуса, якщо відстань від його вершини до хорди дорівнює l.
5. Знайдіть радіус основи циліндра з квадратним осьовим перерізом, якщо об'єм циліндра дорівнює об'єму кулі з радіусом 3 см.
6. Маса дерев'яної кулі дорівнює 315 г, а її діаметр — 10 см. Яку масу має куля, виготовлена з такого ж дерева, об'єм якої дорівнює 1 см^3?

УРОК № 55
ПЛОЩА БІЧНОЇ ТА ПОВНОЇ ПОВЕРХОНЬ ЦИЛІНДРА

Мета: домогтися засвоєння формул для обчислення площі бічної та повної поверхонь циліндра. Сформувати вміння розв'язувати задачі на обчислення площ бічної та повної поверхонь циліндра.

Тип уроку: засвоєння знань, формування вмінь.

Наочність та обладнання: моделі циліндрів.

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Збираємо зошити з виконаною домашньою роботою для перевірки й оцінювання. З метою надання учням можливості скоригувати свої знання та вміння, роздаємо правильні розв'язання домашніх задач для самостійного опрацювання вдома.

III. Формулювання мети й завдань уроку

Створюємо проблемну ситуацію, запропонувавши учням задачу практичного змісту.

Задача. На вулицях міста встановили тумби циліндричної форми для розклеювання реклами. Чи поміститься реклама продукції

деякої фірми на одній такій тумбі, якщо загальна площа її рекламних плакатів 5 м^2, а висота та діаметр тумби відповідно дорівнюють 2 м і 0,8 м?

Після обговорення ситуації, з'ясовуємо, що, для того щоб дати відповідь на запитання задачі, необхідно знайти площу бічної поверхні тумби, про яку йдеться в задачі. Оскільки тумба має циліндричну форму, то треба знайти площу бічної поверхні циліндра.

Нагадуємо учням, що поверхня циліндра складається з бічної поверхні і двох основ циліндра. Отже, завдання уроку — засвоїти формули для обчислення площі бічної та повної поверхонь циліндра.

IV. Актуалізація опорних знань

У виведенні формули для обчислення площі бічної поверхні циліндра більшість авторів підручників використовують поняття вписаної призми. Сама формула аналогічна до відповідної формули площі бічної поверхні прямої призми. Тому з метою свідомого засвоєння учнями матеріалу, що вивчається, доцільно повторити поняття вписаної призми та формулу для обчислення площі її бічної поверхні.

Фронтальне опитування

1. Запишіть формулу для обчислення довжини кола. Чому дорівнює довжини кола, якщо:
   а) радіус кола дорівнює 5 см;
   б) діаметр кола дорівнює 12 см?
2. Запишіть формулу для обчислення площі круга. Чому дорівнює площа круга, якщо:
   а) радіус круга дорівнює 2 см;
   б) діаметр круга дорівнює 2 см?
3. Запишіть формулу для обчислення площі бічної поверхні прямої призми. Чому дорівнює площа бічної поверхні правильної шестикутної призми, сторона основи якої дорівнює 2 см, а висота — 5 см?
4. Яку призму називають вписаною у циліндр?
5. У коло вписано правильний чотирикутник та двадцятичотирикутник. У якому випадку периметр вписаного многокутника буде менше відрізнятися від довжини кола?

V. Засвоєння знань

План вивчення теми

1. Формула для обчислення площі бічної поверхні циліндра.
2. Формула для обчислення площі повної поверхні циліндра.

3. Приклад застосування формули для обчислення площі бічної поверхні циліндра.

Залежно від рівня математичної підготовки учнів викладення нового матеріалу можна провести або у формі фронтальної бесіди, або запропонувати учням самостійно обґрунтувати формулу для обчислення площі бічної поверхні циліндра, або самостійно опрацювати відповідний матеріал за підручником. У разі самостійної роботи учнів бажано по закінченні роботи викликати одного учня до дошки для запису виведення формули площі бічної поверхні циліндра.

Прикладом застосування формули для обчислення бічної поверхні циліндра може бути задача, наведена на етапі формулювання мети й завдань уроку.

Задача. На вулицях міста встановили тумби циліндричної форми для розклеювання реклами. Чи поміститься реклама продукції деякої фірми на одній такій тумбі, якщо загальна площа її рекламних плакатів 5 м^2, а висота та діаметр тумби відповідно дорівнюють 2 м і 0,8 м?

Розв'язання. Обчислимо площу бічної поверхні циліндра, форму якого має тумба:

$$S = \pi \cdot 0{,}8 \cdot 2 \approx 3{,}14 \cdot 0{,}8 \cdot 2 \approx 5{,}024 \text{ м}^2.$$

Оскільки загальна площа рекламних плакатів дорівнює 5 м^2, то вони всі помістяться на цій тумбі.

VI. Формування вмінь

Виконання усних вправ

1. Сторони прямокутника дорівнюють 3 см і 4 см. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, утвореного в результаті обертання цього прямокутника навколо сторони, що дорівнює 3 см.
2. Знайдіть площу бічної поверхні рівностороннього циліндра, висота якого дорівнює 5 см.
3. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо площа його осьового перерізу дорівнює Q.
4. Радіус основи циліндра дорівнює R, а площа бічної поверхні дорівнює сумі площ основ. Знайдіть висоту циліндра.
5. Діаметр основи циліндра дорівнює 1 м, а висота циліндра дорівнює довжині кола основи циліндра. Чому дорівнює площа бічної поверхні циліндра?
6. Площа основи циліндра дорівнює Q, а площа осьового перерізу циліндра — M. Чому дорівнює площа повної поверхні циліндра?

Виконання письмових вправ

1. Висота циліндра на 10 см більша від радіуса основи, а площа повної поверхні циліндра дорівнює 144π см^2. Знайдіть радіус основи циліндра і його висоту.
2. Висота циліндра дорівнює 7 см, а радіус основи — 2 см. Знайдіть радіус круга, рівновеликого площі повної поверхні цього циліндра.
3. У циліндр вписано правильну шестикутну призму. Знайдіть відношення площ бічних поверхонь циліндра і призми.
4. Менша сторона прямокутника дорівнює a, кут між його діагоналями — α. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, утвореного у результаті обертання прямокутника навколо цієї сторони.
5. Бічна поверхня циліндра складає половину його повної поверхні. Знайдіть повну поверхню циліндра, якщо діагональ осьового перерізу дорівнює 5 см.
6. У циліндрі паралельно його осі проведено переріз, діагональ якого утворює з площиною нижньої основ кут φ. Переріз перетинає основу по хорді, яка стягує дугу α. Обчисліть площу бічної поверхні циліндра, якщо радіус його основи дорівнює R.

Задачі, що заплановані для розв'язування на уроці, сприяють засвоєнню формул для обчислення площ бічної та повної поверхонь циліндра. Крім того, розв'язування цих задач передбачає вільне володіння учнями означенням циліндра та його елементів (основ, радіусів основ, висоти, твірних, осі, осьового перерізу), а також знання їх властивостей. З метою свідомого засвоєння учнями зазначених формул бажано під час розв'язування задач вимагати від учнів формулювання відповідного правила та обґрунтування дій щодо ходу розв'язування задачі.

VII. Підсумки уроку

Контрольні запитання

1. Запишіть формулу для обчислення площі бічної поверхні циліндра.
2. Сформулюйте правило обчислення площі бічної поверхні циліндра.
3. Чому дорівнює площа повної поверхні циліндра?
4. Запишіть формулу для обчислення площі повної поверхні циліндра.

VIII. Домашнє завдання

Вивчити формули для обчислення площі бічної та повної поверхонь циліндрів.

Виконати вправи.

1. Діагональ прямокутника дорівнює d і утворює з його стороною кут α. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, утвореного в результаті обертання прямокутника навколо цієї сторони.
2. Площа основи циліндра дорівнює 9π см^2, а його об'єм — 18π см^3. Знайдіть площу повної поверхні циліндра.
3. У нижній основі циліндра проведено хорду, довжина якої дорівнює a. Ця хорда стягує дугу α. Відрізок, що сполучає центр верхньої основи із серединою хорди, утворює з площиною основи кут φ. Обчисліть площу бічної поверхні циліндра.
4. У циліндрі паралельно його осі проведено площину так, що перерізом є квадрат із діагоналлю $a\sqrt{2}$. Цей переріз відтинає від кола основи дугу $60°$. Знайдіть площу повної поверхні циліндра.

УРОК № 56
ПЛОЩА БІЧНОЇ ТА ПОВНОЇ ПОВЕРХОНЬ КОНУСА

Мета: домогтися засвоєння формул для обчислення площ бічної та повної поверхонь конуса. Сформувати вміння розв'язувати задачі на обчислення площ бічної та повної поверхонь конуса.

Тип уроку: засвоєння знань, формування вмінь.

Наочність та обладнання: моделі конусів.

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Форма проведення цього етапу уроку значною мірою залежить від рівня знань і вмінь учнів. Учням можна запропонувати перевірити домашнє завдання за зразком або під час фронтальної роботи прокоментувати розв'язання домашніх задач за записами, які виконали на дошці учні з високим рівнем навчальних досягнень.

Перевірити засвоєння учнями формул для обчислення площі бічної та повної поверхонь циліндра та вміння застосовувати їх до розв'язування задач можна шляхом проведення тестової роботи.

Тестові завдання

1. Чому дорівнює площа бічної поверхні циліндра, твірна якого дорівнює 14 см, а діаметр основи — 8 см?
   А) 22π см^2; Б) 56π см^2; В) 112π см^2; Г) 224π см^2.
2. Обчисліть площу бічної поверхні циліндра, осьовим перерізом якого є квадрат зі стороною 8 см.
   А) 32π см^2; Б) 64π см^2; В) 128π см^2; Г) 256π см^2.
3. Площа основи циліндра дорівнює 64π см^2, а його висота — 10 см. Обчисліть площу бічної поверхні циліндра.
   А) 160π см^2; Б) 640π см^2; В) 320π см^2; Г) 80π см^2.
4. Висота циліндра дорівнює 12 см, а діаметр його основи — 10 см. Обчисліть площу повної поверхні циліндра.
   А) 120π см^2; Б) 140π см^2; В) 170π см^2; Г) 210π см^2.

III. Формулювання мети й завдань уроку

Мотивацією для вивчення нового матеріалу може бути задача практичного змісту.

Задача. За замислом архітектора будівлю Палацу молоді прикрашають дві вежі, дах яких має форму конуса. Висота даху дорівнює 4 м, а діаметр вежі — 6 м. Будівельна фірма одержала замовлення на покриття дахів черепицею. Скільки листів черепиці необхідно для покриття цих дахів, якщо один лист черепиці має розміри 0,1 м $\times$ 0,3 м?

Після обговорення ситуації учні доходять висновку, що для відповіді на запитання задачі необхідно знати площу поверхні кожного з дахів. Оскільки дах має форму конуса, то необхідно вміти обчислювати площу бічної поверхні конуса.

Нагадуємо учням, що поверхня конуса складається з бічної поверхні та основи, і формулюємо завдання на урок — вивчити формули для обчислення площі бічної та повної поверхонь конуса.

IV. Актуалізація опорних знань

Більшість авторів підручників для виведення формули для обчислення площі бічної поверхні конуса використовують поняття вписаної піраміди. Сама формула для обчислення площі бічної поверхні конуса аналогічна до відповідної формули площі бічної поверхні правильної піраміди. Тому з метою свідомого засвоєння учнями матеріалу, що вивчається, доцільно повторити поняття вписаної піраміди та формулу для обчислення її бічної поверхні.

Математичний диктант

Продовжте речення.

1. Довжина кола з радіусом 2 см дорівнює…
2. Площа круга з радіусом 3 см дорівнює…
3. Якщо висота конуса дорівнює 3 см, а радіус основи — 4 см, то його твірна дорівнює…
4. Піраміду називають вписаною в конус, якщо…
5. Піраміду називають правильною, якщо…
6. Площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює…

V. Засвоєння знань

План вивчення теми

1. Формула для обчислення площі бічної поверхні конуса.
2. Формула для обчислення площі повної поверхні конуса.
3. Приклад застосування формули для обчислення площі бічної поверхні конуса.

Оскільки формулу для обчислення площі бічної поверхні конуса можна вивести способом, аналогічним до способу виведення формули для обчислення бічної поверхні циліндра, то вивчення нового матеріалу можна організувати як самостійну роботу учнів. Якщо рівень математичної підготовки учнів дозволяє, то можна запропонувати їм самостійно вивести цю формулу. В іншому випадку можна запропонувати учням самостійно опрацювати відповідний параграф підручника і зробити у зошитах необхідні записи. В обох випадках після закінчення роботи доцільно викликати учня і відтворити на дошці виведення формули. У разі необхідності учні зможуть скоригувати свої записи в зошитах.

Як приклад застосування формули для обчислення площі бічної поверхні конуса можна використати задачу, наведену на етапі формулювання мети й завдань уроку.

Задача. За замислом архітектора будівлю Палацу молоді прикрашають дві вежі, дах яких має форму конуса. Висота даху дорівнює 4 м, а діаметр вежі — 6 м. Будівельна фірма одержала замовлення на покриття дахів черепицею. Скільки листів черепиці необхідно для покриття цих дахів, якщо один лист черепиці має розміри 0,15 м × 0,3 м?

Розв'язання. Для обчислення площі бічної поверхні конуса, форму якого має дах вежі, спочатку необхідно знайти його твірну. Оскільки висота конуса дорівнює 4 м, а радіус основи — 3 м, то

$$L=\sqrt{4^2+3^2}=5 \text{ м}.$$

Тоді площа бічної поверхні конуса дорівнює:

$$S=\pi RL\approx 3{,}14\cdot 3\cdot 5\approx 47{,}1 \text{ м}^2.$$

Один лист черепиці має площу 0,045 м^2. Для покриття одного даху потрібно

$$47{,}1:0{,}045\approx 1\,047 \text{ листів черепиці.}$$

Тоді всього потрібно

$$1047\cdot 2=2\,094 \text{ листів черепиці.}$$

Відповідь. 2 094 листів.

VI. Формування вмінь

Виконання усних вправ

1. Висота конуса дорівнює 6 м, а діаметр основи — 16 м. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.
2. Висота конуса дорівнює 4 см, а твірна — 5 см. Знайдіть площу повної поверхні конуса.
3. Твірна конуса дорівнює 8 см і утворює з площиною основи конуса кут 45°. Чому дорівнює площа бічної поверхні конуса?
4. Осьовим перерізом конуса є рівносторонній трикутник зі стороною 4 см. Обчисліть площу повної поверхні конуса.
5. Площа основи конуса дорівнює 36π см^2, а його твірна — 10 см. Обчисліть площу бічної поверхні конуса.
6. Площа основи конуса дорівнює 9π см^2, а площа його бічної поверхні — 15π см^2. Чому дорівнює висота цього конуса?

Виконання письмових вправ

1. Прямокутний трикутник із катетами 5 см і 12 см обертається навколо більшого катета. Обчисліть площу бічної поверхні конуса, утвореного в результаті цього обертання.
2. Туристичний намет, що має форму конуса з діаметром 4 м і висотою 3,5 м, покритий парусиною. Скільки квадратних метрів парусини знадобилося для покриття намету?
3. Площа поверхні конічного шпиля вежі дорівнює 250 м^2, діаметр основи — 9 м. Знайдіть висоту шпиля.
4. Хорда кола основи конуса дорівнює 6 см і стягує дугу $90°$. Площина, що проходить через цю хорду і вершину конуса, утворює з площиною основи кут $60°$. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.
5. В основі конуса проведено хорду, яку видно із центра основи під кутом α, а з вершини конуса — під кутом β. Знайдіть площу бічної поверхні конуса, якщо радіус його основи дорівнює R.

6. Відрізок, що сполучає центр основи конуса із серединою твірної, нахилений до площини основи під кутом α. Довжина цього відрізка дорівнює m. Знайдіть площу повної поверхні конуса.

Запропоновані вправи сприяють засвоєнню учнями формул для обчислення площі бічної і повної поверхонь конуса та формуванню вмінь застосовувати ці формули до розв'язування задач.

Крім того, задачі, заплановані для розв'язування на уроці, передбачають вільне володіння учнями поняттям конуса, його елементів та їх властивостей. З метою свідомого засвоєння учнями зазначених формул бажано під час розв'язування задач вимагати від учнів формулювання відповідних правил. Також слід мати на увазі, що неформальний підхід до розв'язування задач передбачає обґрунтування всіх необхідних елементів. Так, під час розв'язування письмової вправи № 4 необхідно обґрунтувати кут між площинами. Під час розв'язування письмової задачі № 6 необхідно обґрунтувати кут нахилу поданого відрізка до площини основи конуса; також можна звернути увагу учнів на те, що необхідно показати, що довжина твірної конуса дорівнює подвоєній довжині поданого відрізка.

VII. Підсумки уроку

Контрольні запитання

1. Запишіть формулу для обчислення площі бічної поверхні конуса.
2. Сформулюйте правило обчислення площі бічної поверхні конуса.
3. Чому дорівнює площа повної поверхні конуса?
4. Запишіть формулу для обчислення повної поверхні конуса.

VIII. Домашнє завдання

Вивчити формули для обчислення площі бічної та повної поверхні конуса.

Виконати вправи.

1. Висота конуса дорівнює 6 см, твірна утворює з площиною основи конуса кут 45°. Знайдіть площу повної поверхні конуса.
2. Площа бічної поверхні конуса дорівнює 65π см^2. Знайдіть об'єм конуса, якщо його радіус дорівнює 5 см.
3. Прямокутний трикутник із катетом a і прилеглим кутом α обертається навколо цього катета. Знайдіть площу повної поверхні тіла обертання.

4. В основі конуса проведено хорду, яку видно із центра основи під кутом α, а з вершини конуса — під кутом β. Знайдіть площу бічної поверхні конуса, якщо відрізок, що сполучає вершину конуса із серединою хорди, дорівнює l.

УРОК № 57
ПЛОЩА СФЕРИ

Мета: домогтися засвоєння формули для обчислення площі сфери.

Сформувати вміння розв'язувати задачі на обчислення площі сфери.

Тип уроку: засвоєння знань, формування вмінь.

Наочність та обладнання: моделі сфери.

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Правильність виконання домашнього завдання перевіряємо за зразком (готові розв'язання роздаємо учням для самостійного опрацювання, порівняння з результатами, одержаними під час виконання вправ удома). Можливі питання висвітлюємо під час фронтальної роботи.

Засвоєння учнями формул для обчислення площі бічної та повної поверхонь конуса і вміння застосовувати їх до розв'язування задач можна перевірити шляхом проведення самостійної роботи з подальшою перевіркою та обговоренням.

Самостійна робота

Варіант 1

1. Обчисліть площу бічної поверхні конуса, радіус основи якого дорівнює 3 см, а твірна в 3 більша за радіус.
2. Твірна конуса дорівнює 14 см, кут при вершині осьового перерізу конуса — $60°$. Знайдіть площу повної поверхні конуса.

Варіант 2

1. Обчисліть площу бічної поверхні конуса, діаметр основи якого дорівнює 12 см, а твірна — 17 см.
2. Твірна конуса дорівнює 8 см і утворює з площиною основи кут $60°$. Знайдіть площу повної поверхні конуса.

III. Формулювання мети й завдань уроку

З метою формування усвідомленого ставлення учнів до необхідності вивчення формули для обчислення площі сфери можна створити проблемну ситуацію, запропонувавши задачу практичного змісту.

Задача. На фабриці дитячих іграшок було виготовлено партію гумових м'ячів із діаметром 10 см. Скільки фарби треба закупити для фарбування 1 000 таких м'ячів, якщо на 1 дм^2 поверхні потрібно 1,2 г фарби?

Зрозуміло, що для обчислення кількості фарби необхідно знати площу поверхні м'яча, тобто необхідно знати формулу для обчислення площі поверхні сфери. Вивчення цієї формули і є основним завданням уроку.

IV. Актуалізація опорних знань

Виконання усних вправ

1. Діаметр сфери дорівнює 4 см. Чому дорівнює радіус цієї сфери?
2. Площа великого круга дорівнює 36π см^2. Чому дорівнює діаметр кулі?
3. Довжина великого кола дорівнює 14π см. Чому дорівнює радіус сфери?
4. Площа перерізу кулі площиною, віддаленою від центра кулі на 3 см, дорівнює 16π см^2. Знайдіть радіус кулі.
5. На відстані 8 см від центра сфери проведено площину, яка перетинає сферу по колу, довжина якого дорівнює 20π см. Чому дорівнює радіус сфери?

V. Засвоєння знань

План вивчення теми

1. Формула для обчислення площі сфери.
2. Приклад застосування формули для обчислення площі сфери.

Для виведення формули площі сфери деякі автори підручників використовують поняття вписаного в сферу многокутника, а деякі — поняття площі поверхні тіла. (Площею поверхні тіла називають границю відношення об'єму шару завтовшки h до його товщини, якщо товщини цього шару прямує до нуля:

$$S = \lim_{h\to 0}\frac{V(h)}{h},$$

де S — площа поверхні тіла; $V(h)$ — об'єм шару завтовшки h.) За будь-якого підходу до виведення формули для обчислення площі сфери викладення нового матеріалу бажано провести у формі лекції близько до тексту підручника.

Прикладом застосування формули для обчислення площі сфери може бути задача, наведена на етапі формулювання мети й завдань уроку.

Задача. На фабриці дитячих іграшок було виготовлено партію гумових м'ячів діаметром 20 см. Скільки фарби треба закупити для фарбування 1 000 таких м'ячів, якщо на 1 дм^2 поверхні потрібно 1,2 г фарби?

Розв'язання. Обчислимо площу поверхні одного м'яча, тобто площу сфери:

$$S = 4\pi R^2 \approx 4\cdot 3{,}14\cdot 10^2 \approx 1\,256 \text{ см}^2.$$

Тоді площа поверхні 1 000 таких м'ячів дорівнює 1 256 000 см^2 або 125 600 дм^2. Враховуючи, що на 1 дм^2 поверхні потрібно 1,2 г фарби, дістанемо $125\,600\cdot 1{,}2 = 150\,720$ г або 150,72 кг фарби.

VI. Формування вмінь

Виконання усних вправ

1. Обчисліть площу поверхні сфери, радіус якої дорівнює 5 см.
2. У скільки разів треба збільшити радіус сфери, щоб її площа збільшилася у 10 разів?
3. Об'єми двох куль відносяться як $1:8$. Знайдіть відношення площ їх поверхонь.
4. Площа великого круга дорівнює 1 м^2. Знайдіть площу сфери.

Виконання письмових вправ

1. Довжина великого кола сфери дорівнює 10π см. Знайдіть площу цієї сфери.
2. Лінія перетину сфери і площини, віддаленої від центра сфери на 8 см, має довжину 12π см. Знайдіть площу сфери.
3. Площа поверхні кулі дорівнює 393 см^2. Знайдіть площу поверхні другої кулі, радіус якої у $\sqrt{3}$ разів менший, ніж у поданої.
4. Відношення площ двох сфер дорівнює $\frac{1}{3}$. Знайдіть відношення довжин великих кіл цих сфер.
5. Скільки кульок діаметром 0,5 дм можна пофарбувати одним кілограмом фарби, якщо на 1 м^2 потрібно 100 г фарби?

6. У кулі по один бік від центру проведено два паралельних перерізи. Площі перерізів дорівнюють 49π см^2 і 4π см^2, а відстань між ними — 9 см. Обчисліть площу поверхні кулі.

VII. Підсумки уроку

Гра «Вірю — не вірю»

Які з наведених тверджень правильні?

1. Площу сфери обчислюють за формулою $S=4\pi R^2$.
2. Площу сфери можна обчислити за формулою $S=\pi d^2$, де d — діаметр сфери.
3. Якщо площа сфери дорівнює 40π см^2, то радіус сфери дорівнює 10 см.
4. Площа поверхні кулі у 4 рази більша за площу великого круга цієї кулі.
5. Якщо радіус однієї сфери удвічі більший за радіус другої сфери, то площа першої сфери у 8 разів більша за площу другої сфери.
6. Якщо об'єм кулі дорівнює 36π см^3, то площа поверхні цієї кулі — 36π см^2.

VIII. Домашнє завдання

Вивчити формулу для обчислення площі сфери.

Виконати вправи.

1. Довжина лінії перетину сфери і площини, яка віддалена від її центра на 12 см, дорівнює 10π см. Знайдіть площу сфери.
2. Сталеву кульку діаметром 10 мм покрито тонким шаром нікелю. Обчисліть масу покриття для 1 000 таких кульок, якщо на 1 дм^2 площі покриття витрачено 0,22 г нікелю.
3. Площа поверхні кулі дорівнює 225π см^2. Знайдіть об'єм кулі.
4. Доведіть, що площа повної поверхні рівностороннього конуса дорівнює площі сфери, діаметр якої дорівнює висоті конуса.

УРОК № 58
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Мета: працювати над засвоєнням учнями формул для обчислення площ поверхонь тіл обертання (циліндра, конуса, кулі); продовжити роботу з формування вмінь використовувати набуті знання під час розв'язування задач.

Тип уроку: застосування знань, умінь і навичок.

Наочність та обладнання: конспект «Площі поверхонь тіл обертання», моделі циліндрів, конусів, куль.

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Організовуємо роботу з перевірки домашнього завдання за зразком з обов'язковим коментуванням учнями змісту наданих учителем правильних розв'язань домашніх задач. Після виконання роботи за зразком учні за необхідності виконують корекцію своїх розв'язань у робочих зошитах.

Перевіряємо засвоєння формули для обчислення площі сфери та вміння застосовувати її до розв'язування задач шляхом проведення тестової роботи.

Тестові завдання

1. Радіус сфери дорівнює 5 см. Чому дорівнює площа сфери?
   А) 25π см^2; Б) 50π см^2; В) 75π см^2; Г) 100π см^2.
2. Знайдіть площу сфери, діаметр якої дорівнює 7 см.
   А) 14π см^2; Б) 49 см^2; В) 28π см^2; Г) 49π см^2.
3. Площа сфери дорівнює 16π см^2. Чому дорівнює радіус сфери?
   А) 4 см; Б) 2 см; В) 2π см; Г) 8 см.
4. Об'єми двох куль відносяться як $27:64$. Як відносяться площі їх поверхонь?
   А) $9:16$; Б) $3:4$; В) $3:8$; Г) $2:3$.

III. Формулювання мети й завдань уроку

Мета уроку безпосередньо випливає з його теми. Оскільки на попередніх уроках було вивчено формули для обчислення площ поверхонь тіл обертання, то необхідно продовжити роботу над засвоєнням знань цих формул, сформувати сталі навички застосовувати їх до розв'язування задач на обчислення площ поверхонь циліндрів, конусів і куль.

IV. Відтворення та систематизація опорних знань

Під час вивчення теми «Об'єми та площі поверхонь геометричних тіл» учні насамперед повинні засвоїти формули для обчислення об'ємів та площ поверхонь геометричних тіл і навчитися застосовувати їх до розв'язування задач. Протягом останніх уроків вони вивчали формули для обчислення площ поверхонь тіл обертання. Тому, як і на попередніх уроках, присвячених розв'язуванню задач, можна запропонувати учням повторити зазначені формули, користуючись підручником або записами у зошитах, і створити опорний конспект з цієї теми.

Конспект 38

Площі поверхонь тіл обертання

Тіло обертання	Формула для обчислення площі	
	бічної поверхні	повної поверхні
Циліндр (R — радіус основи, H — висота)	$S_{\text{біч.}} = 2\pi RH$	$S = 2S_{\text{осн.}} + S_{\text{біч.}}$ або $S = 2\pi R^2 + 2\pi RH = 2\pi R(R+H)$
Конус (R — радіус основи, L — твірна)	$S_{\text{біч.}} = \pi RL$	$S = S_{\text{осн.}} + S_{\text{біч.}}$ або $S = \pi R^2 + \pi RL = \pi R(R+L)$
Сфера (R — радіус сфери)	$S = 4\pi R^2$	

V. Формування вмінь і навичок

Виконання усних вправ

1. Обчисліть площу бічної поверхні циліндра, твірна якого дорівнює 13 см, а діагональ осьового перерізу — 5 см.
2. Чому дорівнює площа повної поверхні циліндра, якщо діагональ його осьового перерізу дорівнює $10\sqrt{2}$ і утворює з площиною основи кут 45°?
3. Знайдіть площу бічної поверхні тіла, утвореного обертанням прямокутника зі стороною 8 см і діагоналлю 10 см навколо цієї сторони.
4. Знайдіть площу бічної поверхні конуса, твірна якого дорівнює 12 см, а діаметр основи — 6 см.
5. Площа бічної поверхні конуса дорівнює 65π см^2. Знайдіть площу його повної поверхні, якщо твірна конуса дорівнює 13 см.
6. Знайдіть площу бічної поверхні тіла, утвореного обертанням прямокутного трикутника з катетами 10 см і 24 см навколо більшого катета.
7. Знайдіть площу сфери, якщо її радіус дорівнює $\sqrt{2}$ см.
8. Знайдіть радіус сфери, площа якої дорівнює π см^2.

Виконання письмових вправ

1. У нижній основі циліндра проведено хорду, яку видно із центра нижньої основи під кутом $90°$, а із центра верхньої основи — під кутом $60°$. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо радіус його основи дорівнює 4 см.
2. Паралельно осі циліндра проведено переріз, який є квадратом і відтинає від кола основи дугу, градусна міра якої дорівнює $90°$. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо радіус основи дорівнює $2\sqrt{2}$ см.
3. У циліндрі паралельно його осі проведено площину, що перетинає нижню основу циліндра по хорді, яку видно із центра цієї основи під кутом α. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо площа утвореного перерізу дорівнює S.
4. Висота конуса дорівнює 10 см, а кут, який утворює твірна конуса з площиною основи, — $45°$. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.
5. Площа повної поверхні конуса дорівнює 90π см^2, а його твірна більша за радіус основи на 8 см. Знайдіть об'єм конуса.
6. Площа бічної поверхні конуса утричі більша від площі основи. Знайдіть об'єм конуса, якщо радіус його основи дорівнює 2 см.
7. Через вершину конуса, радіус основи якого дорівнює R, проведено площину, що перетинає його основу по хорді, яку видно із центра основи під кутом 2α, а з вершини конуса — під кутом 2β. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.
8. Переріз кулі площиною, що віддалена від її центра на 15 см, має площу 64π см^2. Знайдіть площу поверхні кулі.

VI. Підсумки уроку

Підсумком уроку може бути усвідомлення учнями основного кола задач, які вони зможуть розв'язати, використовуючи вивчені формули.

VII. Домашнє завдання

Повторити формули для обчислення площ поверхонь тіл обертання (*див. конспект 37*).

Виконати домашню самостійну роботу.

Умова домашньої самостійної роботи

1. Об'єм циліндра дорівнює 100π см^3. Знайдіть площу повної поверхні циліндра, якщо його висота дорівнює 4 см.
2. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює d і утворює з твірною циліндра кут α. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

3. Висота конуса дорівнює 6 см, а кут при вершині осьового перерізу — $120°$. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.
4. Через вершину конуса проведено площину, що перетинає основу по хорді, яка стягує дугу $90°$. Знайдіть площу повної поверхні конуса, якщо його твірна дорівнює l, а кут у перерізі при вершині конуса — $60°$.
5. Осьовим перерізом конуса є рівносторонній трикутник. Знайдіть діаметр основи конуса, якщо площа його повної поверхні дорівнює 363π см^2.
6. Через кінець радіуса кулі проведено переріз, який утворює із цим радіусом кут $30°$. Знайдіть площу поверхні кулі, якщо площа перерізу дорівнює 36π см^2.

УРОК № 59
ПІДСУМКОВИЙ УРОК ІЗ ТЕМИ «ОБ'ЄМИ ТА ПЛОЩІ ПОВЕРХОНЬ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ»

Мета: повторити, систематизувати й узагальнити знання учнями:
- ✓ формул для обчислення об'ємів паралелепіпеда, призми, піраміди, циліндра, конуса, кулі;
- ✓ формул для обчислення площі бічної та повної поверхонь циліндра і конуса;
- ✓ формули для обчислення площі сфери.

Систематизувати вміння учнів застосовувати набуті знання до розв'язування задач, передбачених програмою.

Тип уроку: узагальнення і систематизація знань, умінь і навичок.

Наочність та обладнання: конспекти 35–38.

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Збираємо зошити з виконаною домашньою самостійною роботою для перевірки й оцінювання. З метою надання учням можливості скоригувати свої знання та вміння роздаємо правильні розв'язання домашніх задач для самостійного опрацювання вдома.

III. Формулювання мети й завдань уроку

Основна дидактична мета і завдання на урок логічно випливають із його місця в темі. Оскільки урок є останнім, підсумковим, то увагу слід приділити повторенню, узагальненню й систематизації знань і вмінь учнів, набутих під час вивчення теми. Таке формулювання мети створює відповідну мотивацію діяльності учнів.

IV. Повторення і систематизація знань

Залежно від рівня підготовки учнів можна організувати роботу різними способами: або як самостійну роботу з довідковим матеріалом (наприклад, із конспектом або підручником), або учні мають самостійно повторити зміст основних понять теми, скласти схему, що відображає логічний зв'язок між основними поняттями теми, тощо. Можна розпочати урок з традиційного фронтального опитування за контрольними запитаннями до теми.

Контрольні запитання

1. Сформулюйте основні властивості об'єму.
2. Чому дорівнює об'єм прямокутного паралелепіпеда?
3. Запишіть формулу для обчислення об'єму призми.
4. Запишіть формулу для обчислення об'єму піраміди.
5. Чому дорівнює об'єм циліндра?
6. Запишіть формулу для обчислення об'єму конуса.
7. Запишіть формулу для обчислення об'єму кулі.
8. За якою формулою обчислюють площу бічної поверхні циліндра?
9. Як знайти площу повної поверхні циліндра?
10. Запишіть формулу для обчислення площі бічної поверхні конуса.
11. Запишіть формулу для обчислення площі повної поверхні конуса.
12. Запишіть формулу для обчислення площі сфери.

V. Повторення і систематизація вмінь

Традиційно цей етап уроку проводимо у формі групової роботи, мета якої полягає в тому, щоб учні самостійно сформулювали та випробували узагальнену схему дій, якої вони будуть дотримуватися під час розв'язування типових задач, подібні до яких будуть винесені на контроль.

Перед виконанням практичного завдання проводимо роботу з виділення основних видів задач на застосування вивчених у темі понять. Такими видами можуть бути задачі на обчислення:
- ✓ об'єму призми;
- ✓ об'єму піраміди;
- ✓ об'єму циліндра;
- ✓ об'єму конуса;
- ✓ об'єму кулі;

✓ площі бічної та повної поверхонь циліндра;
✓ площі бічної та повної поверхонь конуса;
✓ площі сфери.

Після складання переліку основних видів задач учитель об'єднує учнів у робочі групи (за кількістю видів завдань). Кожна група отримує завдання: «Скласти план розв'язання задачі...». На складання плану відведено певний час, за який учасники групи мають обговорити план розв'язання задачі, записати його у вигляді послідовних кроків, реалізувати та підготовити презентацію своєї роботи. Після презентації проводимо обговорення, під час якого учитель (або учні інших груп) ставлять запитання або пропонують замінити яку-небудь із заданих величин і пояснити, як зміниться розв'язання задачі. Потім, у разі необхідності, проводимо корекцію складених планів.

VII. Підсумки уроку

Підсумком уроку узагальнення й систематизації знань і вмінь учнів є, по-перше, складені самими учнями узагальнені схеми дій під час розв'язування типових завдань, по-друге, здійснення учнями необхідної частини свідомої розумової діяльності (рефлексії), усвідомлення кожним учнем особистих успіхів та, найголовніше, — проблем, над якими слід ще попрацювати.

VIII. Домашнє завдання

Повторити зміст вивчених у ході засвоєння теми 4 понять.
Вивчити складені на уроці схеми дій.
Розв'язати задачі домашньої контрольної роботи.

Умова домашньої контрольної роботи № 4

1. Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює 4 см, висота призми — $4\sqrt{3}$ см. Знайдіть об'єм призми.
2. Основою піраміди є ромб із діагоналями 6 см і 10 см. Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює 9 см.
3. Прямокутник зі сторонами 6 см і 4см обертається навколо меншої сторони. Обчисліть об'єм тіла обертання.
4. Знайдіть об'єм конуса, висота якого дорівнює 12 см, а твірна нахилена до площини основи під кутом $60°$.
5. Знайдіть радіус сфери, якщо її площа дорівнює площі бічної поверхні циліндра з радіусом основи 2 см і висотою 16 см.
6. Через вершину конуса проведено площину, яка відсікає від кола основи його чверть. Знайдіть площу повної поверхні конуса, якщо радіус основи дорівнює R, а кут у перерізі при вершині конуса дорівнює $60°$.

УРОК № 60
КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 4

Мета: перевірити рівень засвоєння учнями знань, умінь і навичок із теми «Об'єми та площі поверхонь тіл обертання».
Тип уроку: контроль знань і вмінь.

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Збираємо зошити з виконаною домашньою контрольною роботою № 4. Оцінки за роботу враховуємо під час виставлення тематичного бала.

III. Формулювання мети й завдань уроку

Метою контрольної роботи є демонстрація учнями своїх навчальних досягнень, тобто знань змісту основних понять теми та володіння прийомами їх застосування під час розв'язування задач.

IV. Текст контрольної роботи № 4

Варіант 1

1. Основою прямої призми є паралелограм зі сторонами 3 см і 4 см та гострим кутом $30°$. Знайдіть об'єм призми, якщо її бічне ребро дорівнює 8 см.
2. Одна зі сторін основи трикутної піраміди дорівнює 6 см, а висота, що проведена до неї, — 5 см. Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює 12 см.
3. Прямокутник зі сторонами 3 см і 7см обертається навколо більшої сторони. Обчисліть об'єм тіла обертання.
4. Знайдіть об'єм конуса, твірна якого дорівнює $6\sqrt{2}$ см і нахилена до площини основи під кутом $45°$.
5. Площа бічної поверхні циліндра дорівнює площі сфери з радіусом 4 см. Знайдіть висоту циліндра, якщо вона удвічі більша від його радіуса.
6. Через дві твірні конуса проведено площину, яка нахилена до площини його основи під кутом α. Ця площина перетинає основу конуса по хорді, яку видно із центра його основи під кутом β. Знайдіть площу бічної поверхні конуса, якщо його твірна дорівнює m.

Варіант 2

1. Основою прямої призми є ромб зі стороною 4 см і гострим кутом $30°$. Знайдіть об'єм призми, якщо її бічне ребро дорівнює 6 см.
2. Основою піраміди є прямокутний трикутник із катетами 5 см і 12 см. Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює 12 см.
3. Прямокутник зі сторонами 5 см і 8см обертається навколо меншої сторони. Обчисліть об'єм тіла обертання.
4. Знайдіть об'єм конуса, радіус основи якого дорівнює $6\sqrt{3}$ см, а твірна нахилена до площини основи під кутом $30°$.
5. Площа бічної поверхні циліндра дорівнює площі сфери з радіусом 5 см. Знайдіть висоту циліндра, якщо вона удвічі менша від його радіуса.
6. Площина, що проходить через дві твірні конуса, перетинає основу конуса по хорді, яку видно із центра основи під кутом α. Площина перерізу утворює з висотою конуса кут β. Знайдіть площу бічної поверхні конуса, якщо його висота дорівнює H.

V. Підсумки уроку

На цьому етапі уроку, після того, як будуть зібрані зошити, відповідаємо на запитання учнів, які виникли в процесі виконання контрольної роботи, і роздаємо учням для опрацювання вдома зразки правильних розв'язань завдань контрольної роботи (заготовлених учителем заздалегідь).

VI. Домашнє завдання

Виконати аналіз контрольної роботи (за розданими розв'язаннями).

ПОВТОРЕННЯ, УЗАГАЛЬНЕННЯ ТА СИСТЕМАТИЗАЦІЯ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Методику проведення уроків повторення, систематизації та узагальнення знань і вмінь учнів описано вище (*див. підсумкові уроки з вивчених тем*). За бажання вчитель може урізноманітнити форму проведення цих уроків. Добирає задачі відповідно до рівня навчальних досягнень учнів, але незалежно від цього бажано учням пропонувати цікаві задачі, різні за рівнем складності. Як і на попередніх уроках, під час повторення бажано приділяти увагу усній роботі учнів, а також проводити діагностику роботи учнів. Тому пропонуємо матеріал для підготовки та проведення вчителем уроків повторення і систематизації знань у вигляді набору опорних конспектів, усних вправ, завдань на встановлення відповідностей, вправ для письмового виконання, тестових завдань для підсумкової діагностики.

УРОКИ № 61, 62
ПОВТОРЕННЯ СТЕРЕОМЕТРІЇ ЗА КУРС 10 КЛАСУ

Мета: узагальнити та систематизувати знання учнів про:
- ✓ взаємне розміщення прямих і площин у просторі;
- ✓ відстані та кути в просторі.

Опорний конспект

Взаємне розміщення прямих і площин у просторі

Взаємне розміщення	Означення	Ознака
Двох прямих:		
✓ паралельні	Лежать в одній площині і не перетинаються	Дві прямі, паралельні третій, паралельні
✓ мимобіжні	Не лежать в одній площині	Якщо одна пряма лежить у деякій площині, а друга пряма перетинає цю площину,

Взаємне розміщення	Означення	Ознака
		але не перетинає першої прямої, то ці прямі мимобіжні
✓ перетинаються ↓ (окремий випадок) перпендикулярні		
Прямої і площини:		
✓ пряма лежить у площині		
✓ пряма паралельна площині	Не мають спільних точок	Якщо пряма, яка не лежить у площині, паралельна якій-небудь прямій цієї площини, то вона паралельна і самій площині
✓ пряма перетинає площину ↓ (окремий випадок) пряма перпендикулярна до площини	Мають тільки одну спільну точку. Пряма перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить у цій площині	Якщо пряма перпендикулярна до двох прямих, що лежать у площині і перетинаються, то вона перпендикулярна до цієї площини
Двох площин:		
✓ паралельні	Не мають спільних точок	Якщо дві прямі, які перетинаються і лежать у деякій площині, паралельні двом прямим іншої площини, то ці площини паралельні
✓ перетинаються по прямій ↓ (окремий випадок) перпендикулярні	Кут між ними дорівнює $90°$ або третя площина, перпендикулярна до прямої перетину цих площин, перетинає їх по перпендикулярних прямих	Якщо площина проходить через пряму, перпендикулярну до другої площини, то ці площини перпендикулярні

Відстані та кути в просторі

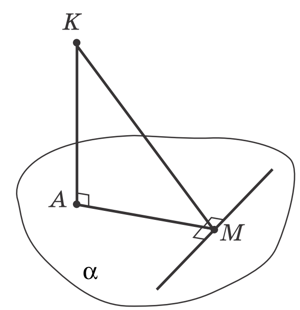
	Означення
Відстані в просторі	
✓ між мимобіжними прямими	— довжина відрізка, який перпендикулярний до кожної з них і кінці якого лежать на цих прямих (довжина спільного перпендикуляра)
✓ від точки до площини	— довжина перпендикуляра, проведеного з цієї точки до площини
✓ від прямої до паралельної їй площини	— відстань від будь-якої точки цієї прямої до площини
✓ між паралельними площинами	— відстань від будь-якої точки однієї площини до другої площини
Кути в просторі	
✓ між двома прямими, що перетинаються	— не більший із кутів, що утворилися в результаті перетину прямих
✓ між мимобіжними прямими	— кут між прямими, які перетинаються і паралельні поданим мимобіжним прямим
✓ між прямою і площиною	— кут між прямою і її проекцію на площину
✓ між площинами	— кут між двома прямими, які лежать у цих площинах і перпендикулярні до прямої перетину площин;
✓ двогранний кут	— фігура, утворена двома півплощинами зі спільною прямою, що їх обмежує;
✓ лінійний кут двогранного кута	— кут, вершина якого лежить на ребрі двогранного кута, а сторони перпендикулярні до ребра і лежать у гранях цього двогранного кута

Теорема про три перпендикуляри

Будь-яка пряма на площині, яка перпендикулярна до проекції похилої на цю площину, перпендикулярна і до самої похилої.

І навпаки, якщо пряма на площині перпендикулярна до похилої, то вона перпендикулярна і до проекції похилої.

AK — перпендикуляр до площини α,
KM — похила до площини α,
AM — проекція похилої KM на площину α



Вправи для усного розв'язування

1. Прямі AB і CD паралельні. Як можуть бути розміщеними прямі AC і BD? Відповідь обґрунтуйте.
2. Пряма a проходить через середину сторони AB трикутника ABC. Яким може бути взаємне розміщення прямих a і BC? Укажіть усі варіанти.
3. У трикутній піраміді $PABC$ $PA \perp ABC$, $\angle ACB = 90°$. Скільки граней піраміди є прямокутними трикутниками? Назвіть ці грані.
4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Чому дорівнює кут між:

   а) прямими AB і CB_1; б) прямими AD і CB_1; в) прямою AC_1 і площиною $ABCD$; г) площинами $ABCD$ і CDA_1B_1?
5. Відстань від точки M до всіх сторін квадрата дорівнює 10 см, а до площини квадрата — 6 см. Знайдіть радіус кола, вписаного в цей квадрат, і радіус кола, описаного навколо цього квадрата.
6. Точка K рівновіддалена від усіх вершин рівностороннього трикутника зі стороною 6 см. Відстань від точки K до площини трикутника дорівнює 2 см. Знайдіть кут, що утворює пряма KA з площиною ABC.

Вправи для письмового виконання

1. З центра круга проведено перпендикуляр до його площини. Знайдіть відстань від кінця цього перпендикуляра до точок кола, якщо довжина перпендикуляра дорівнює a, а площа круга дорівнює Q.
2. З точки M, віддаленої від площини α на відстань 4 см, проведено до цієї площини похилі MA, MB і MC під кутами $30°$, $45°$ і $60°$. Знайдіть довжини похилих MA, MB і MC.
3. У рівнобедреному трикутнику основа і висота дорівнюють по 4 см. Точка A віддалена на відстань 6 см від площини трикутника і на однакову відстань від його вершин. Знайдіть цю відстань.
4. Відрізок довжиною 10 см перетинає площину. Його кінці віддалені від площини на відстані 3 см і 2 см. Знайдіть кут між цим відрізком і площиною.
5. Доведіть, що якщо в правильній трикутній піраміді висота дорівнює стороні основи, то бічні ребра утворюють із площиною основи кут $60°$.
6. З точки A до площини α проведену похилу і на ній позначено точки B і C, причому $AB = 8$ см і $AC = 14$ см. Точка B віддалена від площини α на 6 см. Знайдіть відстань від точки C до площини α.
7. З точок A і B площини α проведено поза нею паралельні між собою відрізки: $AC = 8$ см і $BD = 6$ см. Пряма, що проведена через точки C і D, перетинає площину α (чому?) в точці E. Знайдіть відстань BE, якщо $AB = 4$ см.
8. AB і CD — паралельні відрізки, які лежать у двох площинах, що перетинаються. AE і DF — перпендикуляри, проведені до лінії перетину площин. Знайдіть відстань між прямими AB і CD, якщо $AD = 5$ см, $EF = 4$ см.
9. Основа AD трапеції $ABCD$ лежить у площині α, а основа CB віддалена від неї на відстань 5 см. Знайдіть відстань від площини α до точки M перетину діагоналей цієї трапеції, якщо
$$DA : CB = 7 : 3.$$
10. З кінців відрізка AB, паралельного площині α, проведено до неї перпендикуляр AC і похилу BD, причому $BD \perp AB$. Знайдіть відстань CD, якщо
$$AB = a,\ AC = b,\ BD = c.$$
11. Відстань між паралельними площинами дорівнює 8 см. Відрізок довжиною 10 см своїми кінцями впирається в ці площини. Знайдіть проекції відрізка на кожну з площин.
12. Площини α і β паралельні. З точок A і B площини α проведено до площини β похилі: $AC = 37$ см і $BD = 125$ см. Проекція похилої AC на одну з площин дорівнює 12 см. Чому дорівнює проекція похилої BD?
13. Між двома паралельними площинами α і β проведено відрізки AC і BD (точки A і B лежать у площині α); $AC = 13$ см; $BD = 15$ см; сума проекцій на одну з площин дорівнює 14 см. Знайдіть довжини цих проекцій і відстань між площинами.
14. Знайдіть величину двогранного кута, якщо точка, позначена на одній із граней, віддалена від ребра на відстань удвічі більшу, ніж від другої грані.
15. Точка, взята всередині двогранного кута, віддалена від обох граней на відстань a. Знайдіть відстань від цієї точки до ребра кута, якщо його величина дорівнює $60°$.
16. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 7 см і 24 см. Знайдіть відстань від вершини прямого кута до площини, яка проходить через гіпотенузу і утворює кут $30°$ з площиною трикутника.

Тестові завдання

Варіант 1

1. Точка M не належить площині α. Скільки існує прямих, які проходять через точку M і паралельні площині α?
А) Жодної; Б) безліч; В) одна;
Г) одна або безліч.

2. Прямі a і b мимобіжні. Скільки існує пар паралельних площин, одна з яких проходить через пряму a, а друга — через пряму b?
А) Одна; Б) жодної; В) безліч;
Г) жодної або безліч.

3. Площини α, β і γ паралельні. Відстань між α і β дорівнює 3, відстань між β і γ — 5. Чому дорівнює відстань між площинами α і γ?
А) 2; Б) 4; В) 8; Г) 2 або 8.

4. Пряма a паралельна прямій b, а пряма b перетинає площину γ. Яке взаємне розміщення прямої a і площини γ?
А) Обов'язково перетинаються;
Б) обов'язково паралельні;
В) перетинаються або паралельні;
Г) визначити неможливо.

5. Точка M не належить жодній із мимобіжних прямих a і b. Скільки існує площин, які проходять через точку M і паралельні прямим a і b?
А) Жодної; Б) одна; В) безліч; Г) одна або жодної.

6. Прямі a і b мимобіжні. Скільки існує площин, які проходять через пряму a і перпендикулярні до прямої b?
А) Жодної; Б) одна; В) безліч; Г) одна або жодної.

7. Кут між перпендикуляром і похилою дорівнює $60°$, а довжина перпендикуляра — 20 см. Чому дорівнює довжина похилої?
А) $20\sqrt{2}$ см; Б) $10\sqrt{3}$ см; В) $20\sqrt{3}$ см; Г) 40 см.

8. Точка P віддалена від усіх вершин правильного трикутника зі стороною $\sqrt{3}$ см на відстань $\sqrt{2}$ см. Чому дорівнює відстань від точки P до площини трикутника?
А) 0,5 см; Б) 1 см; В) $\sqrt{2}$ см; Г) $\sqrt{3}$ см.

9. Точка P віддалена від усіх сторін квадрата на відстань $\sqrt{2}$ см, а від площини квадрата на відстань 1 см. Чому дорівнює сторона квадрата?
А) 1 см; Б) $\sqrt{2}$ см; В) 2 см; Г) $2\sqrt{2}$ см.

10. Пряма a перпендикулярна до площини β, а площина β перпендикулярна до площини γ. Яке взаємне розміщення прямої a і площини γ?
А) Перпендикулярні;
Б) паралельні;
В) пряма a паралельна площині γ або лежить у ній;
Г) пряма a перетинає площину γ або лежить у ній.

11. На ребрах AD, AB і CD тетраедра $ABCD$ позначено точки K, E, M. Які ребра тетраедра, крім зазначених, перетинають площину KEM?
А) AC; Б) BC; В) BD; Г) жодні.

12. Площини α і β перетинаються по прямій c і утворюють кут $30°$. Точка A лежить у площині α і віддалена від площини β на відстань 10 см. Чому дорівнює відстань від точки A до прямої c?
А) 10 см; Б) $10\sqrt{2}$ см; В) $10\sqrt{3}$ см; Г) 20 см.

Варіант 2

1. Точка M не належить прямій a. Скільки існує площин, які проходять через точку M і паралельні прямій a?
А) Одна; Б) жодної; В) безліч;
Г) жодної або безліч.

2. Точка M не належить жодній із паралельних прямих a і b. Скільки існує площин, які проходять через точку M і паралельні прямим a і b?
А) Жодної; Б) безліч; В) одна;
Г) одна або безліч.

3. Площини α, β і γ паралельні. Відстань між α і β дорівнює 2, відстань між β і γ — 6. Чому дорівнює відстань між площинами α і γ?
А) 2; Б) 4; В) 8; Г) 4 або 8.

4. Пряма a перетинає площину β, а площина β паралельна площині γ. Яке взаємне розміщення прямої a і площини γ?
А) Обов'язково перетинаються;
Б) обов'язково паралельні;
В) перетинаються або паралельні;
Г) визначити неможливо.

5. Точка M не належить жодній із мимобіжних прямих a і b. Скільки існує прямих, які проходять через точку M і перетинають a і b?

А) Безліч; Б) жодної; В) одна;
Г) жодної або безліч.

6. Прямі a і b мимобіжні. Скільки існує пар взаємно перпендикулярних площин, одна з яких проходить через пряму a, а друга — через пряму b?
А) Жодної; Б) одна; В) безліч;
Г) одна або жодної.

7. Кут між перпендикуляром і похилою дорівнює $60°$, довжина перпендикуляра 20 см. Чому дорівнює довжина проекції похилої?
А) $20\sqrt{2}$ см; Б) $10\sqrt{3}$ см; В) $\frac{20}{\sqrt{3}}$ см; Г) 40 см.

8. Точка P віддалена від усіх вершин квадрата зі стороною $\sqrt{6}$ см на відстань 2 см. Чому дорівнює відстань від точки P до площини квадрата?
А) 1 см; Б) $\sqrt{2}$ см; В) $\sqrt{3}$ см; Г) $\sqrt{6}$ см.

9. Точка P віддалена від усіх сторін правильного трикутника на відстань $\sqrt{12}$ см, а від площини трикутника на відстань 3 см. Чому дорівнює сторона трикутника?
А) 3 см; Б) $\sqrt{12}$ см; В) 6 см; Г) 12 см.

10. Пряма перпендикулярна до прямої b, а пряма b перпендикулярна до площини γ. Яке взаємне розміщення прямої a і площини γ?
А) Перпендикулярні;
Б) паралельні;
В) пряма a паралельна площині γ або лежить у ній;
Г) пряма a перетинає площину γ або лежить у ній.

11. На ребрах AD, DB і CD тетраедра $ABCD$ позначено точки K, E, M. Які ребра тетраедра, крім зазначених, перетинають площину KEM?
А) AB; Б) BC; В) AC; Г) жодні.

12. Площини α і β перетинаються по прямій c і утворюють кут $60°$. Точка A лежить у площині α і віддалена від площини β на відстань 10 см. Чому дорівнює відстань від точки A до прямої c?
А) 10 см; Б) $\frac{20}{\sqrt{3}}$ см; В) $10\sqrt{3}$ см; Г) 20 см.

УРОК № 63
КООРДИНАТИ ТА ВЕКТОРИ У ПРОСТОРІ

Мета: повторити:
- ✓ будову прямокутної системи координат у просторі;
- ✓ формули для обчислення відстані між двома точками;
- ✓ координати середини відрізка;
- ✓ означення вектора, його координат, довжини;
- ✓ правила виконання дій над векторами;
- ✓ скалярний добуток векторів.

Опорний конспект

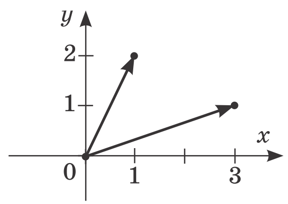
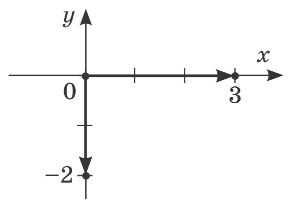
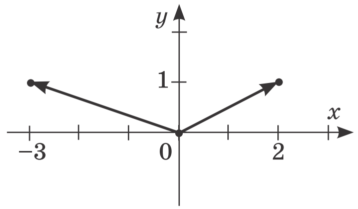
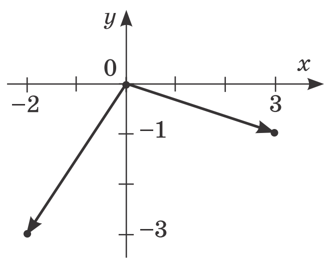
Відстань між точками $A(x_1;y_1;z_1)$ і $B(x_2;y_2;z_2)$	$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$
Координати середини відрізка AB, де $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$	$x=\frac{x_1+x_2}{2}$; $y=\frac{y_1+y_2}{2}$; $z=\frac{z_1+z_2}{2}$
Координати вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, де $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$	$\vec{a}(a_1;a_2;a_3)=\vec{a}(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$
Модуль (довжина) вектора $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$	$\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$
Сума векторів $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ і $\vec{b}(b_1;b_2;b_3)$	$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}(a_1+b_1;a_2+b_2;a_3+b_3)$
Добуток вектора $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ на число λ	$\lambda\vec{a}=\vec{c}(\lambda a_1;\lambda a_2;\lambda a_3)$
Скалярний добуток векторів $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ і $\vec{b}(b_1;b_2;b_3)$	$\vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert\cdot\cos\varphi$, де φ — кут між векторами; $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3$
Умова перпендикулярності ненульових векторів $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ і $\vec{b}(b_1;b_2;b_3)$	$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. І навпаки, якщо $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ ($\vec{a}\neq 0$, $\vec{b}\neq 0$), то $\vec{a}\perp\vec{b}$
Умова колінеарності векторів $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ і $\vec{b}(b_1;b_2;b_3)$	$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$

Завдання на встановлення відповідності

1. Установіть відповідність між серединою відрізка AB (1–4) і місцем її розміщення в системі координат (А–Д).

1	$A(2;-3;-4)$, $B(-3;1;4)$	А	Вісь Oy
2	$A(2;-3;5)$, $B(-3;3;-5)$	Б	Площина yz
3	$A(-1;2;3)$, $B(1;2;-3)$	В	Вісь Oz
4	$A(-2;3;5)$, $B(2;3;5)$	Г	Площина xy
		Д	Вісь Ox

2. Установіть відповідність між векторами, зображеними на рисунку (1–4), та їх скалярним добутком (А–Д).

1		А	–3
2		Б	5
3		В	3
4		Г	–5
		Д	0

Вправи для письмового виконання

1. У площині xy знайдіть точку D, рівновіддалену від трьох точок: $A(0;1;-1)$, $B(-1;0;1)$, $C(0;-1;0)$.

2. Доведіть, що трикутник із вершинами в точках $A(3;-1;6)$, $B(-1;7;-2)$, $C(1;-3;2)$ прямокутний.

3. Знайдіть кут між векторами $2\vec{a}$ і $\frac{1}{2}\vec{b}$, якщо:

$$\vec{a}(-4;2;4),\ \vec{b}\left(\sqrt{2};-\sqrt{2};0\right).$$

4. Доведіть, що вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ колінеарні, якщо:

$$A(-2;-3;8),\ B(2;1;7),\ C(1;4;5),\ D(-7;-4;7).$$

5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — паралелепіпед, $\overrightarrow{B_1A_1}=\vec{a}$, $\overrightarrow{B_1C_1}=\vec{b}$, $\overrightarrow{B_1B}=\vec{c}$. Виразіть вектор $\overrightarrow{B_1M}$ через вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, якщо M — точка перетину відрізків AC і BD.

Тестові завдання

Варіант 1

1. Знайдіть суму $\vec{c}$ векторів $\vec{a}(1;2;3)$ і $\vec{b}(3;2;1)$.

А) $\vec{c}(2;2;2)$; Б) $\vec{c}(4;4;4)$;

В) $\vec{c}(3;3;3)$; Г) $\vec{c}(1;1;1)$.

2. Знайдіть відстань між точками $A(1;1;1)$ і $B(2;2;2)$.

А) $\sqrt{2}$; Б) $\sqrt{3}$; В) $\sqrt{5}$; Г) 1.

3. Яка з точок $A(1;2;3)$, $B(0;1;2)$, $C(0;0;3)$, $D(1;2;0)$ лежить у площині xy?

А) A; Б) B; В) C; Г) D.

4. Точка $C(1;1;1)$ — середина відрізка AB. Знайдіть координати точки B, якщо $A(2;3;-1)$.

А) $B(0;-1;3)$; Б) $B(-1;0;3)$;

В) $B(3;0;-1)$; Г) $B(1;-3;0)$.

5. На осі ординат знайдіть точку $M(x;y;z)$ рівновіддалену від точок $A(-3;2;4)$ і $B(2;1;-3)$.

А) $M(0;0;7,5)$; Б) $M(0;7,5;0)$;

В) $M(7,5;0;0)$; Г) $M(7;5;0)$.

6. У трикутнику з вершинами в точках $M(-1;2;0)$, $N(0;3;-1)$ і $P(2;1;-3)$ знайдіть довжину медіани MK.

А) 3; Б) $\sqrt{6}$; В) $\sqrt{7}$; Г) $2\sqrt{2}$.

7. Вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ рівні. Знайдіть координати точки D, якщо

$$A(1;0;1),\ B(-1;1;2),\ C(0;2;-1).$$

А) $D(2;3;0)$; Б) $D(-2;3;0)$;

В) $D(-2;0;3)$; Г) $D(2;-3;0)$.

8. Обчисліть: $|\vec{a}-\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}|=13$, $|\vec{b}|=19$, $|\vec{a}+\vec{b}|=24$.

А) 23; Б) 22; В) 21; Г) 20.

9. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні, причому $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=12$. Обчисліть: $|\vec{a}+\vec{b}|$.

А) 11; Б) 12; В) 13; Г) 14.

10. Обчисліть косинус кута між векторами

$$\vec{a}(-1;2;-2) \text{ і } \vec{b}(6;3;-6).$$

А) $\frac{1}{9}$; Б) $\frac{2}{9}$; В) $\frac{3}{9}$; Г) $\frac{4}{9}$.

11. При якому значенні n вектори $\vec{a}(n;-2;1)$ і $\vec{b}(n;2n;4)$ перпендикулярні?

А) 1; Б) 2; В) 3; Г) 4.

12. При якому значенні n вектори $\vec{a}(8;-12;20)$ і $\vec{b}(2;n;5)$ колінеарні?

А) 3; Б) -3; В) -4; Г) 4.

Варіант 2

1. Знайдіть суму $\vec{c}$ векторів $\vec{a}(-1;-2;-3)$ і $\vec{b}(-3;-2;-1)$.

А) $\vec{c}(-2;-2;-2)$; Б) $\vec{c}(-4;-4;-4)$;

В) $\vec{c}(-3;-3;-3)$; Г) $\vec{c}(-1;-1;-1)$.

2. Знайдіть відстань між точками $A(2;2;2)$ і $B(3;3;3)$.

А) $\sqrt{2}$; Б) $\sqrt{3}$; В) $\sqrt{5}$; Г) 1.

3. Яка з точок $A(1;2;3)$, $B(0;1;2)$, $C(0;0;3)$, $D(1;2;0)$ лежить у площині yz?

А) A; Б) B; В) C; Г) D.

4. Точка M — середина відрізка AB. Знайдіть координати точки M, якщо $A(1;-1;-1)$, $B(1;-1;1)$.

А) $M(2;-2;0)$; Б) $M(1;-1;0)$; В) $M(-1;1;1)$; Г) $M(0;0;-1)$.

5. На осі абсцис знайдіть точку $M(x;y;z)$, рівновіддалену від точок $A(1;5;-3)$ і $B(-3;0;4)$.

А) $(1;0;0)$; Б) $(0;0;1,25)$; В) $(0;1,25;0)$; Г) $(1,25;0;0)$.

6. У трикутнику з вершинами в точках $A(2;1;3)$, $B(2;1;5)$ і $C(0;1;1)$ знайдіть довжину медіани AM.

А) 1; Б) 2; В) 3; Г) 4.

7. Сума векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ дорівнює нулю. Знайдіть координати точки D, якщо $A(1;0;1)$, $B(-1;1;2)$, $C(0;2;-1)$.

А) $D(-2;1;2)$; Б) $D(2;1;-2)$;

В) $D(2;-1;-2)$; Г) $D(-2;-1;2)$.

8. Обчисліть: $|\vec{a}+\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}|=11$, $|\vec{b}|=23$, $|\vec{a}-\vec{b}|=30$.

А) 23; Б) 22; В) 21; Г) 20.

9. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $60°$, причому $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=8$. Обчисліть: $|\vec{a}-\vec{b}|$.

А) 6; Б) 7; В) 8; Г) 9.

10. Обчисліть косинус кута між векторами $\vec{a}(6;-2;-3)$ і $\vec{b}(5;0;0)$.

А) $\frac{6}{7}$; Б) $\frac{5}{7}$; В) $\frac{4}{7}$; Г) $\frac{3}{7}$.

11. При якому значенні n вектори $\vec{a}(4;2n;-1)$ і $\vec{b}(-1;1;n)$ перпендикулярні?

А) 1; Б) 2; В) 3; Г) 4.

12. При якому значенні n вектори $\vec{a}(3;-2;n)$ і $\vec{b}(-9;6;-12)$ колінеарні?

А) 3; Б) -3; В) -4; Г) 4.

УРОК № 64
ПРИЗМА

Мета: повторити означення та основні властивості призми; види призм; формули для обчислення площ бічної і повної поверхонь призми; формули для обчислення об'єму призми. Відтворити вміння учнів розв'язувати задачі на використання цих понять, властивостей та формул.

Опорний конспект

Геометричні тіла	Площа бічної поверхні	Площа повної поверхні	Об'єм
Призма Основи — рівні многокутники, бічні грані — паралелограми, бічні ребра паралельні	$S_{біч.}=P_{\perp}\cdot l$ ($P_{\perp}$ — периметр перпендикулярного перерізу, l — довжина ребра)	$S_n=2S_{осн.}+S_{біч.}$	$V=S_{осн.}\cdot H$, (H — висота призми)
Пряма призма Бічні ребра перпендикулярні до площини основ, бічні грані — прямокутники	$S_{біч.}=P_{осн.}\cdot H$		
Прямокутний паралелепіпед Усі грані — прямокутники		$S_п=2(ab+ac+bc)$ (a, b, c — лінійні виміри)	$V=abc$ (a, b, c — лінійні виміри)
Куб Усі грані — квадрати		$S_п=6a^2$ (a — ребро куба)	$V=a^3$ (a — ребро куба)

Вправи для усного розв'язування

1. Площі трьох граней паралелепіпеда дорівнюють 2 м^2, 3 м^2 і 3 м^2. Чому дорівнює площа повної поверхні паралелепіпеда?
2. Діагональ куба дорівнює 9 см. Чому дорівнює ребро куба?
3. Діагональ грані куба дорівнює $\sqrt{6}$ см. Чому дорівнює діагональ куба?
4. Основою прямої призми є квадрат зі стороною 3 см. Чому дорівнює висота призми, якщо її об'єм дорівнює 54 см^3?

5. Периметр основи прямої трикутної призми дорівнює 4 м, а бічне ребро призми — 25 см. Чому дорівнює площа бічної поверхні призми?
6. Площі трьох граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 2 см^2, 4 см^2 і 8 см^2. Чому дорівнює його об'єм?

Вправи для письмового виконання

1. В основі прямої призми лежить ромб. Діагоналі призми дорівнюють 8 см і 5 см, висота призми — 2 см. Знайдіть сторону основи призми.
2. Площа діагонального перерізу правильної чотирикутної призми дорівнює $10\sqrt{2}$ см^2, а висота призми — 2 см. Знайдіть площу повної поверхні призми.
3. Сторони основи прямої трикутної призми дорівнюють 25 см, 29 см і 36 см, а площа повної поверхні дорівнює 1620 см^2. Знайдіть площу бічної поверхні призми.
4. В основі паралелепіпеда лежить квадрат. Одна з вершин верхньої основи однаково віддалена від усіх вершин нижньої основи. Знайдіть площу повної поверхні паралелепіпеда, якщо сторона його основи дорівнює a, а бічне ребро — b.
5. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює l і утворює з площиною основи кут α. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда, якщо площа його основи дорівнює S.
6. В основі прямої призми лежить рівнобічна трапеція $ABCD$ зі сторонами
$$AB=CD=13 \text{ см},\ BC=11 \text{ см},\ AD=21 \text{ см}.$$
Площа діагонального перерізу призми дорівнює 180 см^2. Знайдіть площу повної поверхні призми.
7. В основі прямої призми лежить трикутник ABC, у якого
$$AC=b,\ BC=a,\ \angle ACB=\alpha.$$
Бічне ребро призми дорівнює висоті трикутника ABC, проведеній із вершини C. Знайдіть площу повної поверхні призми.
8. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює 13 см, а діагоналі його бічних граней — $4\sqrt{10}$ см і $3\sqrt{17}$ см. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
9. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда, якщо його висота дорівнює h, діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут α, а діагональ бічної грані — кут β.
10. Площі трьох граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 2 м^2, 4 м^2 і 8 м^2. Знайдіть об'єм цього паралелепіпеда.

11. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб із ребром 2 см. У центрі грані ABB_1A_1 знаходиться павук. Яку найменшу довжину може мати шлях павука по поверхні куба у вершину C_1?

Тестові завдання

Варіант 1

1. Основа прямої трикутної призми — прямокутний трикутник із гіпотенузою 5 см і катетом 4 см. Висота призми дорівнює 3 см. Знайдіть площу повної поверхні призми.
А) 47 см^2; Б) 48 см^2; В) 49 см^2; Г) 50 см^2.

2. В основі прямокутного паралелепіпеда лежить прямокутник зі сторонами 3 см і 4 см. Діагональ паралелепіпеда дорівнює $\sqrt{50}$ см. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
А) 50 см^3; Б) 60 см^3;
В) 70 см^3; Г) 80 см^3.

3. В основі прямокутного паралелепіпеда лежить прямокутник, діагональ якого дорівнює $\sqrt{2}$ см, а кут між діагоналями — $45°$. Висота паралелепіпеда дорівнює 10 см. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
А) $5\sqrt{2}$ см^3; Б) $\sqrt{2}$ см^3;
В) $3\sqrt{2}$ см^3; Г) $2\sqrt{2}$ см^3.

4. Діагональ куба дорівнює 5 см. Знайдіть площу його повної поверхні.
А) 30 см^2; Б) 40 см^2;
В) 50 см^2; Г) 60 см^2.

5. Площа поверхні куба дорівнює 216 см^2. Знайдіть об'єм куба.
А) 116 см^3; Б) 216 см^3;
В) 316 см^3; Г) 416 см^3.

6. В основі призми лежить трикутник зі сторонами 5 см, 12 см, 13 см. Висота призми дорівнює 4 см. Знайдіть об'єм призми.
А) 60см^3; Б) 80 см^3;
В) 100 см^3; Г) 120 см^3.

7. Бічне ребро похилої призми дорівнює 15 см і нахилене до площини основи під кутом $30°$. Знайдіть висоту призми.
А) 6,5 см; Б) 7,5 см; В) 8,5 см; Г) 9,5 см.

8. Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює 2 см, а бічне ребро — 3 см. Знайдіть площу повної поверхні призми.
А) $\sqrt{3}$ см^2; Б) $2\sqrt{3}$ см^2;
В) $2\sqrt{3}+18$ см^2; Г) 18 см^2.

9. В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник із бічною стороною 4 см. Кут між бічними сторонами дорівнює $30°$, висота призми — 5 см. Знайдіть об'єм призми.
А) 16 см^3; Б) 18 см^3;
В) 20 см^3; Г) 22 см^3.

10. Знайдіть кут нахилу діагоналі куба до площини його основи.
А) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$; Б) $\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{2}}$;
В) $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$; Г) $\operatorname{arctg}2$.

11. У прямому паралелепіпеді сторони основи дорівнюють 3 см і 8 см, кут між ними — $60°$. Площа бічної поверхні паралелепіпеда дорівнює 220 см^2. Знайдіть меншу діагональ паралелепіпеда.
А) $\sqrt{51}$ см; Б) $\sqrt{149}$ см;
В) 13 см; Г) 12 см.

12. Кожне ребро прямокутного паралелепіпеда збільшили на 2 см. На скільки збільшився його об'єм?
А) На 2 см^3; Б) на 4 см^3;
В) на 8 см^3; Г) визначити неможливо.

Варіант 2

1. Основа прямої трикутної призми — прямокутний трикутник із катетами 3 см і 4 см. Висота призми дорівнює 5 см. Знайдіть площу повної поверхні призми.
А) 72 см^2; Б) 60 см^2;
В) 66 см^2; Г) 84 см^2.

2. В основі прямокутного паралелепіпеда лежить прямокутник зі стороною 3 см і діагоналлю 5 см. Діагональ паралелепіпеда дорівнює $\sqrt{50}$ см. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
А) 50 см^3; Б) 60 см^3;
В) 70 см^3; Г) 80 см^3.

3. В основі прямокутного паралелепіпеда лежить прямокутник, діагональ якого дорівнює $\sqrt{3}$ см, а кут між діагоналями — $60°$. Висота паралелепіпеда дорівнює 4 см. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
А) $5\sqrt{3}$ см^3; Б) $3\sqrt{3}$ см^3;
В) $2\sqrt{3}$ см^3; Г) $\sqrt{3}$ см^3.

4. Діагональ куба дорівнює 5 см. Знайдіть його об'єм.
А) $\frac{5\sqrt{3}}{9}$ см^3; Б) $\frac{15\sqrt{3}}{9}$ см^3;

В) $\frac{25\sqrt{3}}{9}$ см^3; Г) $\frac{125\sqrt{3}}{9}$ см^3.

5. Об'єм куба дорівнює 216 см^3. Знайдіть площу поверхні куба.
А) 116 см^2; Б) 216 см^2;
В) 316 см^2; Г) 416 см^2.

6. В основі призми лежить трикутник зі сторонами 3 см, 4 см, 5 см. Висота призми дорівнює 4 см. Знайдіть об'єм призми.
А) 21 см^3; Б) 22 см^3;
В) 23 см^3; Г) 24 см^3.

7. Бічне ребро похилої призми дорівнює 15 см і утворює з висотою призми кут $30°$. Знайдіть висоту призми.
А) $6{,}5\sqrt{3}$ см; Б) $7{,}5\sqrt{3}$ см;
В) $8{,}5\sqrt{3}$ см; Г) $9{,}5\sqrt{3}$ см.

8. Сторона основи правильної шестикутної призми дорівнює 3 см, а бічне ребро — 2 см. Знайдіть площу повної поверхні призми.
А) $27\sqrt{3}+36$ см^2; Б) $36\sqrt{3}+27$ см^2;
В) $\sqrt{3}+36$ см^2; Г) $27\sqrt{3}$ см^2.

9. В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник із катетами 6 см і 8 см. Висота призми дорівнює 5 см. Знайдіть об'єм призми.
А) 60 см^3; Б) 80 см^3;
В) 100 см^3; Г) 120 см^3.

10. Знайдіть кут між діагоналлю куба і його ребром.
А) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$; Б) $\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{2}}$;
В) $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$; Г) $\operatorname{arctg}2$.

11. У прямому паралелепіпеді сторони основи дорівнюють 3 см і 5 см, а одна з діагоналей основи — 4 см. Знайдіть більшу діагональ паралелепіпеда, якщо менша діагональ утворює з площиною основи кут $60°$.
А) 10 см; Б) 20 см;
В) 30 см; Г) 40 см.

12. Ребро куба збільшили на 2 см. На скільки збільшився його об'єм?
А) На 2 см^3; Б) на 4 см^3;
В) на 8 см^3; Г) визначити неможливо.

УРОК № 65
ПІРАМІДА

Мета: повторити означення та основні властивості піраміди; види пірамід; формули для обчислення площ бічної і повної поверхонь піраміди; формули для обчислення об'єму піраміди. Відтворити вміння учнів розв'язувати задачі на використання цих понять, властивостей та формул.

Опорний конспект

Геометричні тіла	Площа бічної поверхні	Площа повної поверхні	Об'єм
Піраміда Основа — многокутник, бічні грані — трикутники	Сума площ усіх бічних граней	$S_п = S_{осн.} + S_{біч.}$	$V = \frac{1}{3}S_{осн.} \cdot H$, ($H$ — висота піраміди)
Правильна піраміда Основа — правильний многокутник, а основа висоти — центр цього многокутника	$S_{біч.} = \frac{1}{2}P_{осн.} \cdot l$ (l — апофема) або $S_{біч.} = \frac{S_{осн.}}{\cos\alpha}$ (α — кут нахилу бічних граней до площини основи		
Зрізана піраміда*		$S_п = S_{біч.} + S_1 + S_2$ (S_1, S_2 — площі основ піраміди)	$V = \frac{1}{3}H\left(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2\right)$ (S_1, S_2 — площі основ, H — висота піраміди)

Вправи для усного розв'язування

1. Основою піраміди є прямокутний трикутник із катетами 6 см і 8 см. Усі бічні ребра піраміди дорівнюють 13 см. Чому дорівнює висота піраміди?

2. Усі бічні грані чотирикутної піраміди нахилені до площини основи під кутом $45°$. Знайдіть висоту цієї піраміди, якщо площа її основи дорівнює 12 см^2, а периметр основи — 8 см.

3. Основою піраміди є квадрат зі стороною $3\sqrt{2}$ см. Дві бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи. Знайдіть висоту піраміди, якщо довжина найбільшого бічного ребра дорівнює 10 см.
4. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 3 м, апофема — 1 м. Чому дорівнює площа бічної поверхні піраміди?
5. Чому дорівнює площа поверхні правильного тетраедра з ребром 2 см?
6. Площа осьового перерізу правильної чотирикутної піраміди дорівнює 18 см^2. Чому дорівнює площа основи цієї піраміди, якщо її висота 3 см?

Вправи для письмового виконання

1. Плоский кут при вершині правильної трикутної піраміди дорівнює $60°$, а бічне ребро — 6 см. Знайдіть об'єм піраміди.
2. Основою правильної піраміди є многокутник, сума внутрішніх кутів якого дорівнює $720°$. Обчисліть об'єм піраміди, якщо її бічне ребро дорівнює l і утворює з висотою піраміди кут $30°$.
3. Апофема правильної шестикутної піраміди дорівнює h, а двогранний кут при основі — $60°$. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.
4. Основою піраміди є прямокутний трикутник. Периметри бічних граней піраміди дорівнюють 32 см, 34 см, 36 см. Знайдіть об'єм піраміди, якщо всі бічні ребра однаково нахилені до площини основи.
5. Основою піраміди є трикутник зі сторонами 13 см, 20 см і 21 см. Знайдіть об'єм піраміди, якщо всі двогранні кути при основі дорівнюють $30°$.
6. Об'єм правильної трикутної піраміди дорівнює $4\sqrt{3}$ см^3. Знайдіть сторону основи піраміди, якщо її висота дорівнює 3 см.
7. Бічні грані трикутної піраміди взаємно перпендикулярні, а їх площі дорівнюють 8 см^2, 9 см^2 і 16 см^2. Знайдіть об'єм піраміди.
8. Площа бічної поверхні правильної чотирикутної піраміди дорівнює 4 см^2, а площа основи — 2 см^2. Знайдіть кут між бічною гранню та основою піраміди.
9. Основою піраміди є прямокутний трикутник із гострим кутом α. Висота піраміди дорівнює H. Усі бічні ребра утворюють із площиною основи кут β. Знайдіть об'єм піраміди.

Тестові завдання

Варіант 1

1. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди в $\sqrt{2}$ рази більше від сторони основи. Чому дорівнює кут між бічним ребром і площиною основи?
А) $30°$; Б) $45°$;
В) $60°$; Г) $\operatorname{arctg} 2$.
2. Знайдіть об'єм правильної трикутної піраміди зі стороною основи $4\sqrt{3}$ см і висотою $12\sqrt{3}$ см.
А) 144 см^3; Б) 288 см^3;
В) 432 см^3; Г) 576 см^3.
3. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює 5 см, а сторона основи — $4\sqrt{2}$ см. Знайдіть об'єм піраміди.
А) 96 см^3; Б) 31 см^3;
В) 32 см^3; Г) 33 см^3.
4. Апофема правильної трикутної піраміди дорівнює 4 см і утворює з площиною основи кут $60°$. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
А) 48 см^2; Б) $12\sqrt{3}$ см^2;
В) 24 см^2; Г) $24\sqrt{3}$ см^2.
5. Висота правильної трикутної піраміди дорівнює $2\sqrt{3}$ см, а двогранний кут при основі — $45°$. Знайдіть об'єм піраміди.
А) 27 см^3; Б) 72 см^3;
В) 22 см^3; Г) 77 см^3.
6. В основі піраміди лежить трикутник зі сторонами 3 см, 4 см, 5 см. Висота піраміди дорівнює 10 см. Знайдіть об'єм піраміди.
А) 60 см^3; Б) 40 см^3;
В) 20 см^3; Г) 10 см^3.
7. Основою піраміди є прямокутник зі сторонами 8 см і 6 см. Дві бічні грані перпендикулярні до площини основи. Найбільше бічне ребро нахилене до площини основи під кутом $60°$. Знайдіть об'єм піраміди.
А) $160\sqrt{3}$ см^3; Б) $144\sqrt{3}$ см^3;
В) 160 см^3; Г) 144 см^3.
8. Основою є піраміди є ромб із гострим кутом $30°$ і стороною 4 см. Обчисліть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює 15 см.
А) $40\sqrt{3}$ см^3; Б) 40 см^3;
В) $4\sqrt{3}$ см^3; Г) 20 см^3.

9. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник із катетом 8 см. Основою висоти піраміди є центр кола, описаного навколо цього трикутника. Знайдіть об'єм піраміди, якщо радіус кола дорівнює 5 см, а висота піраміди — 7 см.
А) 28 см^3; Б) 56 см^3;
В) 84 см^3; Г) 112 см^3.

10. У скільки разів збільшиться площа бічної поверхні правильної трикутної піраміди, якщо сторони основи збільшити у 2 рази, апофему — у 3 рази?
А) У 2 рази; Б) у 3 рази,
В) у 6 разів; Г) визначити неможливо.

11. Кут між бічної гранню правильної чотирикутної піраміди і її основою дорівнює $60°$. Площа основи піраміди — 16 см^2. Знайдіть апофему піраміди.
А) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ см; Б) 4 см;
В) $4\sqrt{3}$ см; Г) 8 см.

12. Апофема правильної трикутної піраміди дорівнює 6 см, а радіус кола, вписаного в її основу, дорівнює $\sqrt{3}$ см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
А) 36 см^2; Б) 54 см^2;
В) 72 см^2; Г) 108 см^2.

Варіант 2

1. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює стороні основи. Чому дорівнює кут між бічним ребром і площиною основи?
А) $30°$; Б) $45°$;
В) $60°$; Г) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

2. Основою піраміди є прямокутник зі сторонами 3 см і 4 см; кожне з бічних ребер дорівнює 6,5 см. Знайдіть об'єм піраміди.
А) 24 см^3; Б) 36 см^3;
В) 48 см^3; Г) 12 см^3.

3. Бічне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює 5 см, а сторона основи — $3\sqrt{3}$ см. Знайдіть об'єм піраміди.
А) $9\sqrt{3}$ см^3; Б) $10\sqrt{3}$ см^3;
В) $11\sqrt{3}$ см^3; Г) $12\sqrt{3}$ см^3.

4. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює 4 см і утворює з площиною основи кут $60°$. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

А) $6\sqrt{7}$ см^2; Б) $8\sqrt{7}$ см^2;
В) $10\sqrt{7}$ см^2; Г) $12\sqrt{7}$ см^2.

5. Висота правильної трикутної піраміди дорівнює $2\sqrt{3}$ см, а двогранний кут при основі — $60°$. Знайдіть об'єм піраміди.
А) 42 см^3; Б) 24 см^3;
В) 22 см^3; Г) 44 см^3.

6. В основі піраміди лежить трикутник зі сторонами 6 см, 8 см, 10 см. Висота піраміди дорівнює 5 см. Знайдіть об'єм піраміди.
А) 60 см^3; Б) 40 см^3; В) 20 см^3; Г) 10 см^3.

7. Основою піраміди є прямокутник зі сторонами 4 см і 3 см. Дві бічні грані перпендикулярні до площини основи. Найбільше бічне ребро нахилене до площини основи під кутом $30°$. Знайдіть об'єм піраміди.
А) $20\frac{\sqrt{3}}{3}$ см^3; Б) $20\sqrt{3}$ см^3;
В) 20 см^3; Г) 10 см^3.

8. Основою піраміди є ромб із діагоналями 6 см і 9 см. Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює 11 см.
А) $99\sqrt{3}$ см^3; Б) 99 см^3;
В) $99\sqrt{2}$ см^3; Г) $9\sqrt{3}$ см^3.

9. В основі піраміди лежить прямокутник зі стороною 6 см. Основою висоти піраміди є центр кола, описаного навколо цього прямокутника. Знайдіть об'єм піраміди, якщо радіус кола дорівнює 5 см, а висота піраміди — 9 см.
А) 144 см^3; Б) 12 см^3;
В) 288 см^3; Г) 24 см^3.

10. У скільки разів збільшиться об'єм правильної чотирикутної піраміди, якщо сторону основи збільшити в 3 рази, а висоту — у 2 рази?
А) У 6 разів; Б) у 9 разів;
В) у 12 разів; Г) у 18 разів.

11. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 3 см. Бічна грань утворює з площиною основи кут $45°$. Знайдіть сторону основи піраміди.
А) $\frac{6}{\sqrt{3}}$ см; Б) 6 см;
В) $6\sqrt{3}$ см; Г) 12 см.

12. Радіус кола, описаного навколо основи правильної чотирикутної піраміди, дорівнює $3\sqrt{2}$ см, а апофема — 10 см. Знайдіть площу бічної піраміди.
А) 90 см^2; Б) 120 см^2;
В) 180 см^2; Г) 360 см^2.

УРОК № 66
ТІЛА ОБЕРТАННЯ

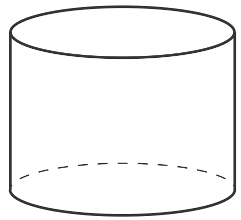
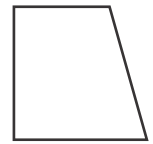
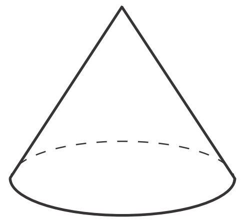
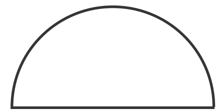
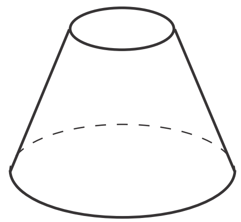
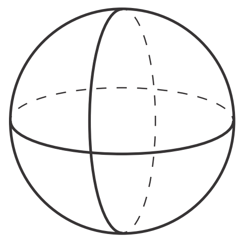
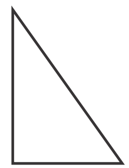
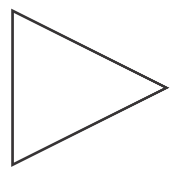
Мета: повторити означення, основні властивості та формули для обчислення площ поверхні й об'ємів циліндра, конуса, кулі. Відтворити вміння учнів розв'язувати задачі на використання цих понять, властивостей та формул.

Опорний конспект

Геометричні тіла	**Площа бічної поверхні**	**Площа повної поверхні**	**Об'єм**
Циліндр (R — радіус основи, H — висота)	$S_{біч.}=2\pi RH$	$S=2S_{осн.}+S_{біч.}$ або $S=2\pi R^2+2\pi RH=$ $=2\pi R(R+H)$	$V=S_{осн.}\cdot H$ або $V=\pi R^2H$
Конус (R — радіус основи, H — висота, L — твірна)	$S_{біч.}=\pi RL$	$S=S_{осн.}+S_{біч.}$ або $S=\pi R^2+\pi RL=$ $=\pi R(R+L)$	$V=\frac{1}{3}S_{осн.}\cdot H$ або $V=\frac{1}{3}\pi R^2H$
Зрізаний конус (R і r — радіуси основ, H — висота, L — твірна)	$S_{біч.}=$ $=\pi L(R+r)$	$S=S_{біч.}+\pi\left(R^2+r^2\right)$ або $S=\pi\left(R^2+r^2+L(R+r)\right)$	$V=\frac{1}{3}\pi H\left(R^2+Rr+r^2\right)$
Куля (R — радіус кулі)		$S=4\pi R^2$	$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

Завдання на встановлення відповідності

Установіть відповідність між геометричним тілом (1–4) і фігурою, у результаті обертання якої утворене це тіло (А–Д).

1		А	
2		Б	
3		В	
4		Г	
		Д	

Вправи для усного розв'язування

1. Осьовим перерізом циліндра є квадрат із діагоналлю $8\sqrt{2}$ см. Чому дорівнюють висота і радіус основи циліндра?
2. Висота конуса дорівнює 1 м, а радіус основи змінюється в межах від 1 м до 2 м. Як при цьому змінюється площа бічної поверхні конуса?
3. Об'єм конуса дорівнює 9 см^3. Чому дорівнює об'єм циліндра з такими ж основою і висотою?
4. Діаметр кулі дорівнює 2 м. Деяка пряма віддалена від центра кулі на відстань 10 дм. Яке взаємне розміщення цих кулі й прямої?
5. Об'єм кулі дорівнює 36π см^3. Чому дорівнює діаметр кулі?
6. Чи можуть дві кулі, поверхні яких мають різні площі, мати рівні об'єми?

Вправи для письмового виконання

1. Висота циліндра дорівнює 6 см, а радіус основи — 5 см. Знайдіть площу перерізу, проведеного паралельно осі циліндра на відстані 4 см від неї.
2. У нижній основі циліндра проведено хорду, яку видно з центра цієї основи під кутом $120°$, а з центра верхньої основи — під кутом $60°$. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо довжина хорди дорівнює 6 см.
3. Діагональ прямокутника дорівнює d і утворює з його більшою стороною кут α. Знайдіть об'єм циліндра, утвореного в результаті обертання цього прямокутника навколо його меншої сторони.
4. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює l, а один із гострих кутів — α. Знайдіть об'єм конуса, утвореного в результаті обертання цього трикутника навколо катета, протилежного поданому куту.
5. Площа бічної поверхні конуса дорівнює 240π см^2. Знайдіть об'єм цього конуса, якщо радіус його основи дорівнює 12 см.
6. В основі конуса проведено хорду, яку видно із центра основи під кутом α, а з вершини конуса — під кутом β. Знайдіть площу бічної поверхні конуса, якщо радіус його основи дорівнює R.
7. У кулі на відстані 12 см від її центра проведено переріз, площа якого дорівнює 64π см^2. Знайдіть площу поверхні кулі.
8. Радіус кулі дорівнює 9 см. На відстані 7 см і 1 см від центра кулі проведено дві паралельні площини. Знайдіть площу перерізу цієї кулі площиною, паралельною двом поданим площинам і рівновіддаленою від них.
9. До кулі радіуса R проведено дотичну площину. Знайдіть площу перерізу кулі площиною, яка проходить через точку дотику й утворює з дотичною площиною кут α.

Тестові завдання

Варіант 1

1. Осьовим перерізом циліндра є квадрат, площа якого дорівнює Q. Знайдіть площу основи циліндра.
   А) $\frac{\pi Q}{2}$; Б) $\frac{\pi Q}{4}$;
   В) $\frac{\pi Q}{6}$; Г) $\frac{\pi Q}{8}$.
2. Площа бічної поверхні циліндра дорівнює 24π см^2, а його об'єм — 48π см^3. Знайдіть висоту циліндра.
   А) 3 см; Б) 4 см;
   В) 5 см; Г) 6 см.
3. Осьовим перерізом циліндра є прямокутник, площа якого дорівнює 72 см^2. Знайдіть об'єм циліндра, якщо радіус його основи дорівнює 3 см.
   А) 100π см^3; Б) 108π см^3;
   В) 110π см^3; Г) 112π см^3.
4. Радіус основи конуса дорівнює 3 см, а висота — 4 см. Знайдіть твірну конуса.
   А) 3 см; Б) 4 см;
   В) 5 см; Г) 6 см.
5. Радіус основи конуса дорівнює R. Осьовим перерізом конуса є прямокутний трикутник. Знайдіть його площу.
   А) R^2; Б) $2R^2$;
   В) $3R^2$; Г) $4R^2$.
6. Твірна конуса дорівнює 14 см, а кут при вершині осьового перерізу — $60°$. Знайдіть площу повної поверхні циліндра.
   А) 147π см^2; Б) 174 см^2;
   В) 147 см^2; Г) 147π см^2.
7. Осьовим перерізом конуса є прямокутний трикутник із гіпотенузою 12 см. Знайдіть об'єм конуса.
   А) 64π см^3; Б) 68π см^3;
   В) 70π см^3; Г) 72π см^3.
8. У скільки разів збільшиться об'єм конуса, якщо радіус основи збільшити в 4 рази, а висоту — у 2 рази?
   А) У 32 рази; Б) у 16 разів;
   В) у 12 разів; Г) у 48 разів.

9. Висота конуса дорівнює 64 см. Площина, паралельна основі, ділить бічну поверхню конуса у відношенні $1:63$, починаючи від вершини. Чому дорівнює відстань від вершини конуса до цієї площини?
А) 1 см; Б) 4 см;
В) 8 см; Г) 16 см.

10. Об'єми двох куль відносяться як $27:64$. Як відносяться площі їхніх поверхонь?
А) $9:16$; Б) $27:64$;
В) $54:72$; Г) $81:192$.

11. Знайдіть діаметр кулі, якщо його об'єм дорівнює $\frac{2048\pi}{3}$ см^3.
А) 16 см; Б) 24 см;
В) 32 см; Г) 48 см.

12. У скільки разів треба збільшити радіус кулі, щоб її об'єм збільшився у 8 разів?
А) У 2 рази; Б) у 4 рази;
В) у 8 разів; Г) у 16 разів.

Варіант 2

1. Осьовим перерізом циліндра є квадрат, площа якого дорівнює Q. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.
А) πQ; Б) $2\pi Q$;
В) $4\pi Q$; Г) $8\pi Q$.

2. Об'єм циліндра дорівнює $8\pi\sqrt{5}$ см^3, а його висота — $2\sqrt{5}$ см. Знайдіть діагональ осьового перерізу.
А) 3 см; Б) 4 см;
В) 5 см; Г) 6 см.

3. Осьовим перерізом циліндра є прямокутник, площа якого дорівнює 54 см^2. Знайдіть об'єм циліндра, якщо його висота дорівнює 9 см.
А) 80π см^3; Б) 81π см^3;
В) 82π см^3; Г) 100π см^3.

4. Твірна конуса l нахилена до площини основи під кутом $30°$. Знайдіть висоту конуса.
А) l; Б) $2l$;
В) $\frac{l}{2}$; Г) $\frac{\sqrt{3}l}{2}$.

5. Радіус основи конуса дорівнює R. Осьовим перерізом конуса є рівносторонній трикутник. Знайдіть його площу.
А) $R^2\sqrt{3}$; Б) $2R^2\sqrt{3}$;
В) $3R^2\sqrt{3}$; Г) $4R^2\sqrt{3}$.

6. Твірна конуса дорівнює 8 см і утворює з площиною основи кут $60°$. Знайдіть площу повної поверхні конуса.
А) 48π см^2; Б) 60π см^2;
В) 39π см^2; Г) 52π см^2.

7. Осьовим перерізом конуса є прямокутний трикутник із катетом 6 см. Знайдіть об'єм конуса.
А) 18π см^3; Б) $18\sqrt{2}\pi$ см^3;
В) $9\sqrt{3}\pi$ см^3; Г) $9\sqrt{2}\pi$ см^3.

8. У скільки разів збільшиться площа бічної поверхні конуса, якщо радіус основи збільшити в 3 рази, а твірну — в 2 рази?
А) У 3 рази; Б) у 6 разів;
В) у 9 разів; Г) у 18 разів.

9. Висота конуса дорівнює 64 см. Площина, паралельна основі, ділить об'єм конуса у відношенні $1:63$, починаючи від вершини. Чому дорівнює відстань від вершини конуса до цієї площини?
А) 2 см; Б) 4 см;
В) 8 см; Г) 16 см.

10. Площі поверхонь двох куль відносяться як $9:16$. Як відносяться об'єми куль?
А) $9:16$; Б) $27:64$;
В) $54:72$; Г) $81:192$.

11. Площа поверхні кулі дорівнює 393 см^2. Знайдіть площу поверхні іншої кулі, радіус якої у $\sqrt{3}$ разів менший, ніж радіус поданої кулі.
А) 130 см^2; Б) 131 см^2;
В) 132 см^2; Г) 133 см^2.

12. У скільки разів збільшиться об'єм кулі, якщо її радіус збільшити в 3 рази?
А) У 3 рази; Б) у 6 разів;
В) у 9 разів; Г) у 27 разів.

УРОК № 67
ПІДСУМКОВА КОНТРОЛЬНА РОБОТА

Мета: перевірити рівень засвоєння знань і вмінь учнів із курсу стереометрії 11 класу.

Текст підсумкової контрольної роботи

Варіант 1

1. На осі абсцис знайдіть точку, рівновіддалену від точок
$$A(-2;1;4) \text{ і } B(1;2;2).$$
2. Знайдіть скалярний добуток векторів $2\vec{a}$ і $-3\vec{b}$, якщо
$$\vec{a}(-2;3;1),\ \vec{b}(-1;1;4).$$
3. Обчисліть площу поверхні куба, об'єм якого дорівнює 64 см^3.
4. Усі бічні ребра правильної трикутної піраміди нахилені до площі основи під кутом $60°$. Знайдіть об'єм піраміди, якщо сторона основи дорівнює 2 см.
5. Площі повних поверхонь рівностороннього конуса і рівностороннього циліндра рівні. Знайдіть відношення радіусів їх основ.
6. Зовнішній діаметр порожнистої кулі дорівнює 18 см, а товщина стінок — 3 см. Знайдіть об'єм стінок.

Варіант 2

1. На осі ординат знайдіть точку, рівновіддалену від точок $A(-2;3;1)$ і $B(1;2;5)$.
2. Знайдіть скалярний добуток векторів $\frac{1}{2}\vec{a}$ і $-\vec{b}$, якщо
$$\vec{a}(4;-6;2),\ \vec{b}(-2;3;-1).$$
3. Обчисліть об'єм куба, площа поверхні якого дорівнює 150 см^2.
4. Усі бічні ребра правильної чотирикутної піраміди нахилені до площі основи під кутом $60°$. Знайдіть об'єм піраміди, якщо сторона основи дорівнює 4 см.
5. Об'єми рівносторонніх циліндра і конуса рівні. Знайдіть відношення радіусів їх основ.
6. Внутрішній діаметр порожнистої кулі дорівнює 8 см, а зовнішній — 10 см. Знайдіть об'єм стінок.

УРОК № 68
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Мета: виконати аналіз підсумкової контрольної роботи; підбити підсумки вивчення геометрії в 11 класі; розглянути приклади задач підвищеної складності та задач за курс стереометрії, що виносяться на ДПА і ЗНО з математики.

Вправи для письмового виконання

1. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням круга навколо свого діаметра, довжина якого дорівнює a см.
2. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням куба навколо свого ребра, довжина якого дорівнює a см.
3. Паралельно осі циліндра на відстані 2 см від неї проведено площину. Утворений переріз циліндра є квадратом. Знайдіть його площу, якщо площа бічної поверхні циліндра дорівнює $8\sqrt{3}$ см^2.
4. Металеву кулю радіуса $R=\sqrt[3]{16}$ переплавили в конус, висота якого дорівнює 8. Знайдіть відношення площі бічної поверхні конуса до площі його основи.
5. Основою піраміди є прямокутний трикутник, гіпотенуза якого дорівнює $2\sqrt{3}$ см, гострий кут — $30°$. Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом $45°$. Знайдіть об'єм піраміди.
6. Основою піраміди є ромб, гострий кут якого дорівнює $30°$. Усі бічні грані піраміди нахилені до площини її основи під кутом $60°$. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо радіус кола вписаного в її основу, дорівнює 4 см.
7. Основою піраміди є прямокутний трикутник із катетом a і прилеглим до нього гострим кутом β. Бічні грані піраміди, що містять катети цього трикутника, перпендикулярні до площини основи, а третя бічна грань нахилена до площини основи під кутом φ. Знайдіть довжину висоти піраміди.
8. У правильній трикутній піраміді $SABC$ через її висоту SO і бічне ребро SB проведено площину. Площа утвореного перерізу в 4 рази менша за площу повної поверхні піраміди. Знайдіть величину двогранного кута при основі піраміди.
9. У правильній чотирикутній піраміді $SABCD$ (S — вершина) бічне ребро удвічі більше за сторону основи. Знайдіть величину кута між медіаною трикутника SDC, проведеною з вершини D, та середньою лінією трикутника ASC.

10. Основою прямого паралелепіпеда є квадрат $ABCD$ зі стороною 3 см. Бічне ребро AA_1 дорівнює 4 см. Знайдіть площу перерізу паралелепіпеда площиною, що проходить через вершину A перпендикулярно до прямої BA_1.

11. Радіус основи конуса дорівнює R, твірна нахилена до площини основи під кутом α. Через вершину конуса проведено площину під кутом φ до його висоти. Ця площина перетинає основу конуса по хорді. Знайдіть площу утвореного перерізу.

12. Основою піраміди є рівносторонній трикутник зі стороною a. Одна з бічних граней перпендикулярна до площини основи, а дві інші — нахилені до площини основи під кутом α. Знайдіть об'єм піраміди.

13. У циліндрі паралельно його осі проведено площину, що перетинає нижню основу циліндра по хорді, яку видно з центра цієї основи під кутом α. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо площа утвореного перерізу дорівнює S.

14. Через дві твірні конуса проведено площину, яка утворює з площиною основи конуса кут β. Знайдіть об'єм конуса, якщо його твірна дорівнює a.

15. Кут між діагоналями основи прямокутного паралелепіпеда дорівнює α. Діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут β. Знайдіть висоту паралелепіпеда, якщо його об'єм дорівнює V.

Відповідь. $\sqrt[3]{\dfrac{2V}{\operatorname{ctg}^2\beta\sin\alpha}}$.

16. Діагоналі AB_1 і CB_1 двох суміжних бічних граней прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ утворюють з діагоналлю AC основи $ABCD$ кути, які відповідно дорівнюють α і β. Знайдіть кут між площиною трикутника AB_1C і площиною основи.

Відповідь. $\arccos\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta}$.

17. Основою прямої призми є ромб із гострим кутом α. Відношення висоти призми до сторони основи дорівнює k. Через сторону основи призми і середину її бічного ребра проведено площину. Знайдіть кут між цією площиною і площиною основи.

Відповідь. $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{k}{2\sin\alpha}\right)$.

18. Відрізок прямої, що сполучає точку кола верхньої основи циліндра з точкою кола нижньої основи, дорівнює l і утворює з площиною основи кут α. Знайдіть відстань від цієї прямої до осі циліндра, якщо осьовим перерізом циліндра є квадрат.

Відповідь. $\dfrac{1}{2}\sqrt{-\cos 2\alpha}$, $\dfrac{\pi}{4}\le\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

19. Відношення поверхні кулі, вписаної в конус, до площі основи конуса дорівнює k. Знайдіть косинус кута між твірною конуса і площиною його основи і допустимі значення k.

Відповідь. $\dfrac{4-k}{4+k}$, $0<k<4$.

УРОКИ № 69, 70 (РЕЗЕРВНІ ГОДИНИ) РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА КОМБІНАЦІЮ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ

Розв'язування задач на комбінацію геометричних тіл не передбачено чинною програмою з математики. Проте залежно від рівня математичної підготовки учнів і наявності часу такі задачі корисно розглянути, оскільки вони якнайкраще розвивають просторову уяву учнів і навички зображувати просторові фігури на площині. Серед таких задач найбільш поширеними є задачі на вписані й описані тіла.

Розв'язання задачі на вписані й описані тіла розпочинається з виконання рисунка. Від цього значною мірою залежить успішне розв'язування задачі. Зображення виконується методом паралельного проектування, і необхідною умовою правильності рисунка є дотримання правил паралельного проектування.

Вправи для письмового виконання

1. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо куба зі стороною a.

Відповідь. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

2. Знайдіть радіус кулі, вписаної в куб, діагональ якого дорівнює a.

Відповідь. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

3. Знайдіть радіус сфери, вписаної в правильний тетраедр з ребром a.

Відповідь. $\frac{a}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}$.

4. Знайдіть радіус сфери, описаної навколо правильного тетраедра з ребром a.

Відповідь. $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$.

5. У кубі з ребром a розміщено правильну чотирикутну піраміду так, що її вершина збігається з точкою перетину діагоналей верхньої основи куба, а основа збігається з нижньою основою куба. Знайдіть об'єм піраміди.

Відповідь. $\frac{a^3}{3}$.

6. Центр верхньої основи правильної чотирикутної призми і середини сторін нижньої основи є вершинами вписаної в призму піраміди, об'єм якої дорівнює V. Знайдіть об'єм призми.
Відповідь. $6V$.

7. Конус і півкуля мають спільну основу, радіус основи якої дорівнює R. Знайдіть площу бічної поверхні конуса, якщо його об'єм дорівнює об'єму півкулі.
Відповідь. $\pi R^2\sqrt{5}$.

8. Висота конуса і його твірна дорівнюють відповідно 4 см і 5 см. Знайдіть об'єм вписаної в конус півкулі, основа якої лежить на основі конуса.

Відповідь. $\frac{1152\pi}{125}$ см^3.

9. У конус, осьовим перерізом якого є рівносторонній трикутник, вписано кулю. Знайдіть об'єм конуса, якщо об'єм кулі дорівнює $\frac{32\pi}{3}$ см^3.

Відповідь. 24π см^3.

10. Навколо конуса, осьовим перерізом якого є рівносторонній трикутник, описано кулю. Знайдіть об'єм конуса, якщо об'єм кулі дорівнює $\frac{32\pi}{3}$ см^3.

Відповідь. 3π см^3.

11. У кулю вписано правильну чотирикутну піраміду, сторона основи якої дорівнює a. Знайдіть площу поверхні кулі, якщо

бічне ребро піраміди нахилене до площини основи під кутом a.

Відповідь. $\frac{2\pi a^2}{\sin^2 2\alpha}$.

12. У правильній чотирикутній піраміді двогранний кут при основі дорівнює α. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо радіус вписаної в неї кулі дорівнює r.

Відповідь. $\frac{4r^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$.

13. У правильній трикутній піраміді бічне ребро дорівнює b і нахилене до площини основи під кутом α. Знайдіть площу сфери, описаної навколо цієї піраміди.

Відповідь. $\frac{\pi b^2}{\sin^2\alpha}$.

14. Прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють 12 см і 16 см, обертається навколо гіпотенузи. Знайдіть площу поверхні й об'єм тіла обертання.
Відповідь. $268{,}8\pi$ см^2; $614{,}4\pi$ см^3.

15. Прямокутний трикутник із катетом a і прилеглим до нього кутом $60°$ обертається навколо осі, що містить його гіпотенузу. Знайдіть площу поверхні тіла обертання.

Відповідь. $\frac{\pi a^2\left(3+\sqrt{3}\right)}{2}$.

16. Рівнобедрений трикутник з основою a і протилежним до неї кутом $120°$ обертається навколо осі, що містить його основу. Знайдіть площу поверхні тіла обертання.

Відповідь. $\frac{\pi a^2}{3}$.

Література

1. *Система* задач по теме «Двугранные углы» // Математика в школе. — 1986. — № 4. — С. 35–36.
2. *Веселовский С. Б., Рябчинская В. Д.* Дидактические материалы по геометрии для 10 класса. — 2-е изд: — М. : Просвещение, 1991.
3. *Рыбкин Н. А.* Сборник задач по геометрии. Стереометрия для 9 и 10 классов. — издание 36-е. — М. : Просвещение, 1970.
4. *Підручна М. В., Янченко Г. М.* Дидактичні матеріали з геометрії для 10 класу. — Тернопіль : Підручники і посібники.
5. *Земляков А. Н.* Геометрия в 11 классе: методические рекомендации к преподаванию геометрии по учебному пособию А. В. Погорелова: пособие для учителя. — 2-е изд., дораб. — М. : Просвещение, 1991.
6. *Тестові* задачі з математики: геометрія: навчальний посібник / Мазур К. І., Мазур О. К., Ясінський В. В./ за ред. В. В. Ясінського. — К. : Фенікс, 2002.
7. *Веселовский С. Б., Колесникова Л. В., Рябчинская В. Д.* Изучение геометрии в 10 классе: методическое пособие / Под ред. проф. И. Ф. Тесленко. — К. : Радянська школа, 1985.
8. *Литвиненко Г. М., Федченко Л. Я., Швець В. О.* Збірник завдань з математики на атестат про середню освіту. Геометрія. Частина ІІ. — Львів : ВНТЛ, 1997.
9. *Раухман А. С., Сень Я. Г.* Устные упражнения для 7–11 классов: пособие для учителя. — К. : Радянська школа, 1989.
10. *Баум И. В., Брызгалов К. Н., Горзий Т. А.* Задания по геометрии для 9 и 10 классов: метод. пособие. — К. : Радянська школа, 1987.
11. *Роганин А. Н.* Геометрия. 11 класс: Планы-конспекты уроков. — Х. : Ранок, 2004.
12. *Збірник* завдань для державної підсумкової атестації з математики. 11 клас: у 2 книгах. Книга 1 / М. І. Бурда, О. Я. Біляніна, О. П. Вашуленко та ін. Х. : Гімназія, 2008.
13. *Збірник* завдань для державної підсумкової атестації з математики. 11 клас: у 2 книгах. Книга 2 / М. І. Бурда, О. Я. Біляніна, О. П. Вашуленко та ін. Х. : Гімназія, 2008.
14. *Завдання* для тематичного оцінювання з математики. 11 клас / укладачі М. С. Возна, Я. С. Семчишин, І. М. Пришляк. — Тернопіль : СМП «Астон», 2000.
15. *Стадник Л. Г., Маркова І. С.* Алгебра і початки аналізу. Геометрія. 11 клас. Варіанти завдань для тематичного оцінювання навчальних досягнень учнів. — Х. : Ранок, 2002.
16. *Старова О. О., Маркова І. С.* Готуємось до державної підсумкової атестації, зовнішнього незалежного оцінювання з математики. Посібник для вчителя– Х.: Вид група «Основа», 2008.

Навчальне видання

БАБЕНКО Світлана Павловна

УСІ УРОКИ ГЕОМЕТРІЇ. 11 КЛАС.
АКАДЕМІЧНИЙ РІВЕНЬ

Навчально-методичний посібник

Головний редактор *І. С. Маркова*
редактор *Г. А. Новак*
Коректор *О. М. Журенко*
Комп'ютерне верстання *О. В. Лєбєдєва*

Підп. до друку 01.07.2011. Формат 60×90/16. Папір газет.
Гарнітура Шкільна. Друк офсет. Ум. друк. арк. 19,0. Зам. № 11-07/11-05.

ТОВ «Видавнича група "Основа"».
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2911 від 25.07.2007.
Україна, 61001 Харків, вул. Плеханівська, 66.
Тел. (057) 731-96-32. E-mail: math@osnova.com.ua

Віддруковано з готових плівок ПП «Тріада+»
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1870 від 16.07.2007.
Харків, вул. Киргизька, 19. Тел.: (057) 757-98-16, 757-98-15.

ДЛЯ НОТАТОК

ДЛЯ НОТАТОК

ДЛЯ НОТАТОК