

39. Дано функцію $f(x) = |x - 1| - 2$.
- Побудуйте графік функції та знайдіть область її значень.
 - Знайдіть усі значення a , для яких рівняння $f(x) = a$ не має коренів.
 - Розв'яжіть нерівність $f(x) \geq 0$.
40. Знайдіть усі значення a , для яких рівняння $|x^2 - 2x| = a$ має не менше трьох коренів.

Вправи для повторення

41. Розв'яжіть нерівність:
- $2(3 - 5x) > 12 - 8x$;
 - $x^2 - 10x + 16 \geq 0$;
 - $(x - 3)(x^2 + 2x - 3) < 0$;
 - $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} > 2$.
42. Знайдіть усі значення a , для яких рівняння $x^2 + 4x + a + 2 = 0$ не має коренів.
43. Знайдіть суму всіх парних натуральних чисел від 10 до 200 включно.
44. Перший член геометричної прогресії дорівнює 54, а третій член дорівнює 6. Знайдіть четвертий член прогресії.
45. Дідусь старший від свого внука у 5 разів. Якби він був молодший на 16 років, то був би старший від своєї внучки у 4 рази. Скільки років діду-сєві, онукові й внучці, якщо відомо, що відношення віку онука до віку внучки є цілим числом?
46. Магази́ну потрібно закупити сир. Одна фірма пропонує сир по 12 грн. за кілограм і 8% за транспортування, а друга — по 11 грн. за кілограм і 10% за транспортування. У якої фірми вигідніше купувати сир?
- 47*. Скільки кілограмів води потрібно випарувати із 200 кг целюлозної маси, яка містить 85% води, щоб одержати масу, що містить 75% води?

§ 2. Кути довільної величини. Радіанна міра кута

1. Кути довільної величини. Величина кута як геометричної фігури лежить у межах від 0° до 180° . Для таких кутів у курсі геометрії були введені поняття синус, косинус і тангенс. Ми ж розглядатимемо такі поняття для кутів, величини яких (у градусах) можуть виражатися будь-яким дійсним числом.

Нехай маємо промінь OA (рис. 7). Повернемо цей промінь навколо точки O проти руху стрілки годинника на 180° , а потім ще на 45° . Оскільки $180^\circ + 45^\circ = 225^\circ$, то скажемо, що здійснили поворот променя OA на кут 225° і одержали при цьому кут величини 225° .

Кут 225° можна одержати й так. Задамо на площині прямокутну систему координат і розглянемо деяке коло із центром у початку координат (рис. 8). Нехай це коло перетинає додатну піввісь абсцис у точці A . Радіус OA кола назвемо *початковим радіусом*. Повернувши початковий радіус навколо точки O проти руху стрілки годинника на 225° , одержимо кут 225° .

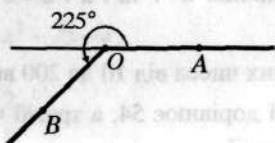


Рис. 7

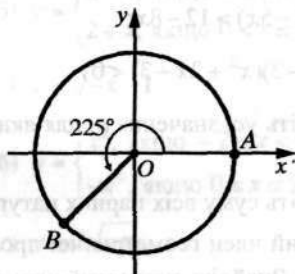


Рис. 8

Якщо при повороті проти руху стрілки годинника початковий радіус OA переходить у радіус OB (рис. 9), то одержимо кут 270° ; якщо ж початковий радіус зробить повний оберт (рис. 10), то одержимо кут 360° . На рисунку 11 стрілкою відзначено кут 450° .

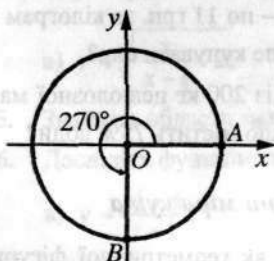


Рис. 9

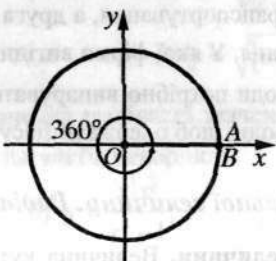


Рис. 10

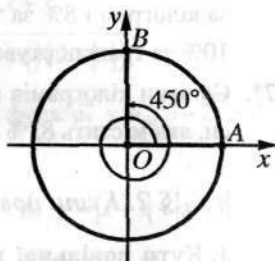


Рис. 11

Якщо повороти початкового радіуса здійснювати за рухом стрілки годинника, то вважають, що у таких випадках одержують кути від'ємної величини. На рисунках 12, 13 і 14 стрілками відзначено кути -90° , -225° і -540° .

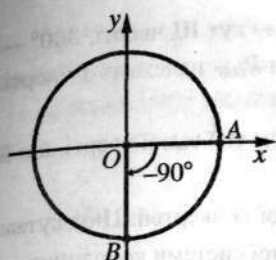


Рис. 12

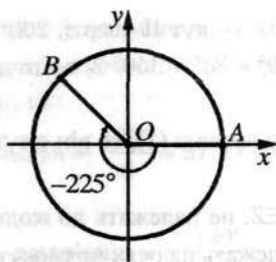


Рис. 13

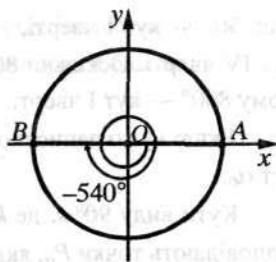


Рис. 14

Нехай при повороті на кут 30° початковий радіус OA переходить у радіус OB (рис. 15). Радіус OA перейде у радіус OB й при повороті на інші кути, наприклад, при повороті на кути $30^\circ + 360^\circ = 390^\circ$, $30^\circ + 360^\circ \cdot 2 = 750^\circ$, $30^\circ - 360^\circ = -330^\circ$. Взагалі, радіус OA перейде у радіус OB при повороті на кут $30^\circ + 360^\circ \cdot k$, де k — деяке ціле число ($k \in \mathbb{Z}$).

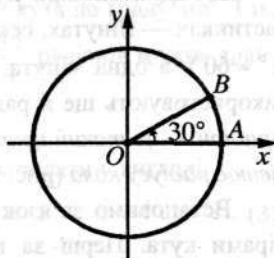


Рис. 15

Будь-який кут α можна записати у вигляді

$$\alpha = \alpha_0 + 360^\circ \cdot k, \quad (1)$$

де $0^\circ \leq \alpha_0 < 360^\circ$, а k — деяке ціле число. Наприклад, $1000^\circ = 280^\circ + 360^\circ \cdot 2$, $-1000^\circ = 80^\circ + 360^\circ \cdot (-3)$.

При введенні поняття кута довільної величини довжина радіуса кола не відіграє ніякої ролі. Тому зручно розглядати коло радіуса 1 із центром у початку координат — *одиничне коло* (рис. 16).

Нехай при повороті на кут α початковий радіус OP_0 одиничного кола переходить у радіус OP_α (рис. 16), тоді точка P_0 переходить у точку P_α . Скажемо, що куту α *відповідає* точка P_α одиничного кола, а саме — точка, одержана при повороті початкової точки P_0 навколо центра O на кут α .

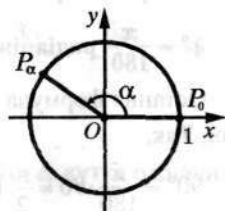


Рис. 16

Очевидно, що кожному куту α відповідає єдина точка P_α одиничного кола. Навпаки неправильно. Так, точка P_{30° відповідає багатьом кутам, а саме кутам $30^\circ + 360^\circ \cdot k$, де $k \in \mathbb{Z}$.

Якщо точка P_α належить першій координатній чверті, то кут α називають *кутом першої чверті*. Аналогічно означають кути II, III і IV чвертей.

Так, 30° — кут I чверті, 120° — кут II чверті, 200° — кут III чверті, 300° — кут IV чверті. Оскільки $800^\circ = 80^\circ + 360^\circ \cdot 2$, то точка P_{800° належить I чверті. Тому 800° — кут I чверті.

Якщо кут α записано у вигляді (1), то він є кутом тієї самої чверті, що й кут α_0 .

Кути виду $90^\circ \cdot k$, де $k \in \mathbb{Z}$, не належать до жодної із чвертей. Цим кутам відповідають точки P_∞ , які лежать на осях прямокутної системи координат.

2. Радіанна міра кута. Величину кута вимірюють у градусах та його частинках — хвилинах, секундах. Нагадаємо, що один градус містить 60 хвилин ($1^\circ = 60'$), а одна хвилина містить 60 секунд ($1' = 60''$). Крім градусної міри, використовують ще й радіанну міру кута. Як відомо з курсу геометрії, *кут 1 радіан — це такий центральний кут, що відповідає дузі, довжина якої дорівнює радіусу кола* (рис. 17).

Встановимо зв'язок між радіанною та градусною мірами кута. Перш за все зазначимо, що коли центральному куту відповідає дуга завдовжки $2R$, де R — радіус кола, то його радіанна міра дорівнює 2 радіани; якщо центральному куту відповідає дуга завдовжки πR (півколо), то його радіанна міра дорівнює π радіанів. Оскільки центральний кут, якому відповідає півколо, дорівнює 180° , то

$$180^\circ = \pi \text{ радіанів.} \quad (2)$$

З одержаної рівності випливає, що

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ радіанів;} \quad n^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot n \text{ радіанів.}$$

Остання формула дозволяє переходити від градусної міри кута до радіанної. Так,

$$90^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 90 = \frac{\pi}{2} \text{ (радіанів);} \quad 150^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 150 = \frac{5\pi}{6} \text{ (радіанів).}$$

Радіанна міра деяких кутів подана у наступній таблиці.

Градусна міра	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Радіанна міра	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

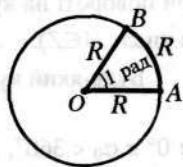


Рис. 17

При записі радіанної міри кута слово «радіан» здебільшого опускають. Так, пишуть $180^\circ = \pi$, хоча розуміють, що 180° дорівнюють π радіанів. З рівності (2) випливає, що

$$1 \text{ радіан} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45''.$$

Тоді

$$a \text{ радіанів} = a \cdot \frac{180^\circ}{\pi}.$$

Одержали формулу переходу від радіанної міри кута до градусної. Так, $\frac{3\pi}{4}$ радіанів $= \frac{3\pi}{4} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 135^\circ$. Градусну міру кута $\frac{3\pi}{4}$ радіанів можна знайти й так: оскільки $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$, то $\frac{3\pi}{4} = 3 \cdot 45^\circ = 135^\circ$.

Будь-який кут α , виміряний у радіанах, можна записати у вигляді

$$\alpha = \alpha_0 + 2\pi k, \quad (3)$$

де $0 \leq \alpha_0 < 2\pi$, а k — деяке ціле число. Наприклад,

$$\frac{21\pi}{2} = \frac{\pi + 20\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot 5; \quad -8,1\pi = 1,9\pi - 10\pi = 1,9\pi + 2\pi \cdot (-5).$$

Приклади розв'язання вправ

Приклад 1. Кутом якої чверті є кут: а) -600° ; б) $\frac{36\pi}{5}$; в) 2° ?

• а) Оскільки $-600^\circ = 120^\circ + 360^\circ \cdot (-2)$, а 120° — кут II чверті, то й кут -600° — кут II чверті.

б) $\frac{36\pi}{5} = \frac{6\pi + 30\pi}{5} = \frac{6\pi}{5} + 2\pi \cdot 3$. Оскільки $\pi < \frac{6\pi}{5} < \frac{3\pi}{2}$, то $\frac{6\pi}{5}$ — кут III чверті, тому й кут $\frac{36\pi}{5}$ — кут III чверті.

в) Враховуючи, що $\pi \approx 3,14$, маємо: $\frac{\pi}{2} < 2 < \pi$. Отже, кут 2 радіани — це кут II чверті •

Приклад 2. Знайти координати точки $P_{\frac{\pi}{3}}$ одиничного кола.

• Точку $P_{\frac{\pi}{3}}$ одержуємо шляхом повороту початкової точки P_0 одиничного кола на кут $-\frac{\pi}{3}$ (-60°) (рис. 18). Із точки $P_{\frac{\pi}{3}}$ проведемо перпендику-

ляри $P_{-\frac{\pi}{3}}N$ і $P_{-\frac{\pi}{3}}M$ до осей координат. У прямокутному трикутнику $ONP_{-\frac{\pi}{3}}$ кути $P_{-\frac{\pi}{3}}ON$ і $OP_{-\frac{\pi}{3}}N$ відповідно дорівнюють 60° і 30° .

Оскільки $OP_{-\frac{\pi}{3}} = 1$ і катет ON лежить проти кута 30° , то $ON = \frac{1}{2}OP_{-\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}$. За теоремою Піфагора знаходимо: $NP_{-\frac{\pi}{3}} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Точка $P_{-\frac{\pi}{3}}$ має додатну абсцису і від'ємну ординату, тому $P_{-\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

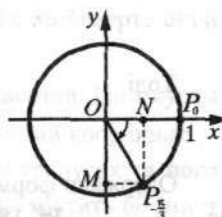


Рис. 18

Усно

48. На рисунку 19 промінь OB є бісектрисою кута MON . Знайдіть величини кутів α і β .

49. Кутом якої чверті є кут:

а) 45° ; 95° ; 170° ; 200° ; 280° ; -50° ;

б) $\frac{\pi}{8}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{4}$?

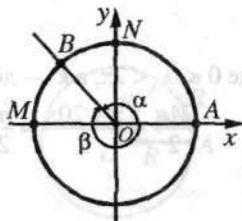


Рис. 19

Рівень А

Виразіть величину кута у радіанах:

50. а) 20° ; 75° ; 120° ; 135° ; 240° ; 720° ; б) -45° ; -90° ; -180° ; -300° ; -480° .

• 51. а) 15° ; 150° ; 210° ; 540° ; 1080° ; б) -30° ; -120° ; -360° ; -720° .

Виразіть величину кута у градусах:

52. а) $\frac{\pi}{8}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{2}$; 3π ; 5π ; б) $-\frac{\pi}{3}$; $-\frac{3\pi}{2}$; $-2,5\pi$.

• 53. а) $\frac{\pi}{10}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{3}$; 4π ; б) $-\frac{\pi}{4}$; $-\frac{3\pi}{5}$; $-\pi$.

Затишіть кут у вигляді $\alpha = \alpha_0 + 360^\circ \cdot k$, де $0 \leq \alpha_0 < 360^\circ$, а k — деяке ціле число:

54. а) 400° ; 1200° ; б) -60° ; -400° .

55. а) 380° ; 800° ; б) -100° ; -500° .

Кутом якої чверті є кут:

56. а) 405° ; 830° ; б) -175° ; -380° ?

57. а) 470° ; 570° ; б) -205° ; -470° ?

Побудуйте одиничне коло і позначте на ньому точки:

58. а) P_{30° ; б) P_{210° ; в) P_{π} ; г) $P_{\frac{\pi}{3}}$.
59. а) P_{45° ; б) P_{120° ; в) $P_{2\pi}$; г) $P_{\frac{\pi}{2}}$.

Рівень Б

Затишіть кут у вигляді $\alpha = \alpha_0 + 2\pi k$, де $0 \leq \alpha_0 < 2\pi$, а k — деяке ціле число, та встановіть, кутом якої чверті є даний кут:

60. а) $\frac{29\pi}{3}$; $\frac{53\pi}{4}$; $7,2\pi$; б) $-\frac{\pi}{4}$; $-\frac{35\pi}{6}$; $-5,2\pi$.
61. а) $\frac{24\pi}{5}$; $\frac{37\pi}{4}$; $3,6\pi$; б) $-\frac{\pi}{6}$; $-\frac{50\pi}{3}$; $-8,7\pi$.

Знайдіть координати точок одиничного кола:

62. а) P_{180° ; б) P_{450° ; в) P_{-135° ; г) $P_{\frac{5\pi}{2}}$.
63. а) P_{270° ; б) P_{-540° ; в) $P_{4\pi}$; г) $P_{\frac{\pi}{4}}$.

Рівень В

64. Кутами яких чвертей є кути з такими радіанними мірами: 3 ; 5 ; $8,5$; -3 ?
65. Точка P_α одиничного кола має координати $\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$. Знайдіть координати точок $P_{-\alpha}$ і $P_{\alpha+\pi}$.

Вправи для повторення

66. Спростіть вираз:
а) $\left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b}\right)\left(\frac{a^2}{b^2} - 2 + \frac{b^2}{a^2}\right)$; б) $\frac{m^2 - 4mn + 3n^2}{m^2 - 2mn + n^2} + \frac{m+n}{m-n}$.
67. Розв'яжіть рівняння:
а) $4x^4 + 15x^2 - 4 = 0$; б) $(x^2 + x + 1)^2 - 8x^2 - 8x - 1 = 0$.
68. Моторний човен пройшов шлях по річці від пункту A до пункту B за вдовжки 28 км і повернувся назад за 3 год 12 хв. Знайдіть швидкість течії річки, якщо швидкість човна у стоячій воді дорівнює 18 км/год.
69. Старовинна задача. Для молотьби хліба було найнято декілька робітників. Якби їх було на три менше, то вони б працювали на 2 дні більше. Якби найняли на 4 робітники більше, то робота була б закінчена на 2 дні раніше. Скільки було робітників і скільки днів вони працювали?