§ 3. Означення тригонометричних функцій

1. Тригонометричні функції кута у межах від 0° до 180°. Нагадаємо, що у курсі геометрії синус, косинус і тангенс гострого кута спочатку означуються як відношення сторін прямокутного трикутника, а саме (див. рис. 20):

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}; \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}.$$

Було доведено також, що синус, косинус і тангенс гострого кута залежать тільки від величини кута і не залежать від лінійних розмірів прямокутного трикутника. Так, в усіх прямокутних трикутниках, що мають гострий кут α, відношення катета, протилежного куту α, до гіпотенузи дорівнює одному й тому ж числу, яке і є синусом кута α.

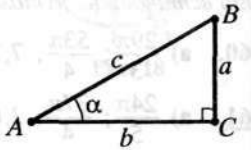

Рис. 20

Отже, кожному гострому куту відповідає єдине значення синуса, косинуса і тангенса цього кута. Тому кажуть, що $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$ — це функції кута. Ці функції називають ще *тригонометричними функціями*, оскільки вони використовуються при розв'язуванні трикутників, тобто при знаходженні невідомих елементів трикутника, якщо задані інші — відомі. У перекладі ж з грецької мови «тригонометрія» означає «вимірювання трикутників» («*trigonon*» — трикутник, «*metreo*» — вимірюю).

Крім синуса, косинуса і тангенса гострого кута, розглядатимемо ще одну тригонометричну функцію — *котангенс* кута α (позначають $\operatorname{ctg}\alpha$). *Котангенсом кута* α (рис. 20) *називають відношення прилеглого катета* (b) *до протилежного* (a): $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$. З даного означення випливає, що тангенс і

човна у стоячій воді дорівнює 18 км/год.

олотьби хліба було найнято декілька робіт-
менше, то вони б працювали на 2 дні більше.
ики більше, то робота була б закінчена на 2
обітників і скільки днів вони працювали?

течії річки, якщо швидкість

69. *Старовинна задача.* Для м
ників. Якби їх було на три
Якби найняли на 4 робітн
дні раніше. Скільки було р

Означення

Тангенсом кута α називають відношення синуса цього кута до його косинуса, а котангенсом кута α — відношення косинуса цього кута до його синуса:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Виходячи з даних означень, знайдемо синус, косинус, тангенс і котангенс кутів 270° і $-\frac{\pi}{3}$.

Точка $P_{270°}$ (рис. 24) має координати (0; –1). Тому: sin270° = –1;

21

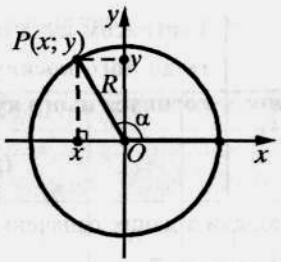

Рис. 22

тригонометричні функції кута α (рис. 21) не залежать прямокутного трикутника *ONP*, а отже — і від величи-

) визначають синус, косинус, тангенс і котангенс будь- д 0° до 180°. Зокрема якщо α — тупий кут (рис. 22), то ідно з формулами (1) синус тупого кута — додатний, а тангенс — від'ємні.

и одиничне коло ($R = 1$), то формули (1) набудуть прос-

$$= y; \quad \cos\alpha = x; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}. \qquad (2)$$

лами sinα — це ордината точки P одиничного кола, $\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Таке трактування тригонометр-

	90°	180°	270°	360°
	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	1	0	–1	0

Рис.

Зауважимо, що
від лінійних розмірів
ни радіуса R кола.

За формулами (
якого кута у межах в
$x < 0$, а $y > 0$. Тому зг
косинус, тангенс і кот

Якщо розглядат
тішого вигляду:

sinα

За цими форму

cosα — її абсциса, tg

α	0°	30°	45°	60°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

гонометричних функцій,
ь з їхніх означень

с та косинус визначені для довільного
ластю визначення функцій $y = \sin x$ *та*
. Це можна записати так:

$+\infty)$ або $D(\sin x) = R$, $D(\cos x) = R$.

становили, що тангенс не визначений

ля кутів πk, $k \in Z$. Тому:

gx є множина всіх дійсних чисел, крім

tgx є множина всіх дійсних чисел, крім

инус числа x є відповідно ординатою
ис. 31). Оскільки і ординати, і абсци-
ачень від –1 до 1, то *областю значень*
[–1; 1], тобто
$E(\cos x) = [-1; 1]$.

цис позначена
иційно позна-
значення кута
ення тригоно-
помогою оди-
означатимемо

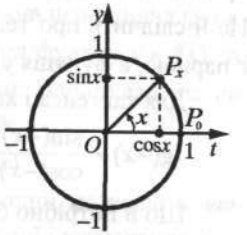

Рис. 31

та $y = \operatorname{ctg} x$ *є множина всіх дійсних*
ває з геометричного тлумачення зна-
отангенсів.