Рівень В

117. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = \dfrac{2+\sin x}{2-\sin x}$; б) $y = \operatorname{tg}\left(x^2\right)$.

118. Знайдіть область значень функції:

а) $y = 1 - 4\sin^2 x$; б) $y = \cos x + |\cos x|$.

119. Знайдіть знак добутку:

а) $\sin 2 \cdot \cos 4$; б) $\sin(-12{,}5) \cdot \operatorname{ctg} 7$; в) $\cos 10 \cdot \sin(\cos 10)$.

120. Розв'яжіть нерівність:

а) $x \cdot \cos 3 < 1$; б) $(x - \sin 2)(x - \sin 6) < 0$.

121. Доведіть, що функція є періодичною, та знайдіть її основний період:

а) $y = 1 + \sin x$; б) $y = \cos 2x$; в) $y = 2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

122. Розв'яжіть рівняння:

а) $x + 1 = 2[x]$; б) $\{x\} = \left(3 - [x]\right)^2$.

Вправи для повторення

123. Побудуйте графік функції $y = 1 - 6x - x^2$ та знайдіть її найбільше значення.

124. Побудуйте графік функції $y = 2\sqrt{x+1} - 3$ та знайдіть її найменше значення.

125. Корені x_1 та x_2 рівняння $x^2 - 16x + m = 0$ задовольняють рівність $7x_1 = x_2$. Знайдіть ці корені та коефіцієнт m.

126*. Розв'яжіть рівняння: $x^2 + 3x + 4|x - 2| - 22 = 0$.

127. Брокер купив 20 акцій підприємства X і 10 акцій підприємства Y на загальну суму 5000 грн. Коли ціна акцій підприємства X зросла на 20%, а ціна акцій підприємства Y впала на 10%, він продав усі акції за 5700 грн. Яка початкова ціна акції кожного підприємства?

§ 5. Графіки тригонометричних функцій

1. Графік функції $y = \sin x$. Побудуємо спочатку графік синуса на проміжку $[0; \pi]$. Для побудови графіка скористаємося таблицею значень функції:

таємося таблицею значень функції:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$y = \sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

2. Графік функції $y = \cos x$. Графік косинуса можна будувати у тій же послідовності, що й графік синуса. А можна використати тотожність $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, яку ми доведемо пізніше. Із цієї тотожності випливає, що графіком косинуса є синусоїда, зміщена уздовж осі x ліворуч на $\frac{\pi}{2}$ одиниць (рис. 37). Тому графік функції $y = \cos x$ теж називають синусоїдою.

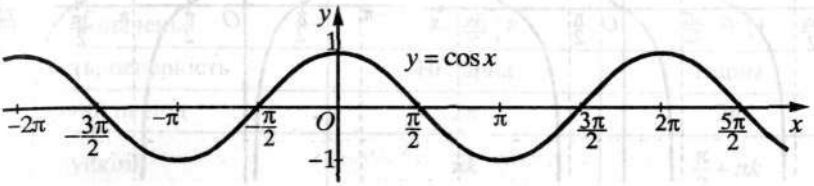


Рис. 37

3. Графік функції $y = \mathrm{tg}\,x$. Тангенс не визначений для кутів $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$. На проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ графік функції $y = \mathrm{tg}\,x$ можна побудувати, використавши таблицю її значень або лінію тангенсів (рис. 38).

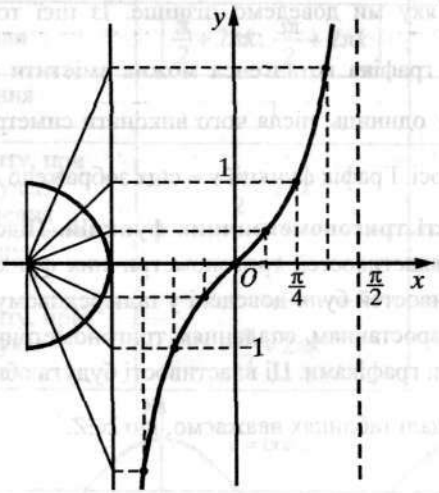


Рис. 38

Скориставшись періодичністю тангенса, отримуємо його графік на всій області визначення (рис. 39). Графік функції $y = \mathrm{tg}x$ називають *тангенсоїдою*.

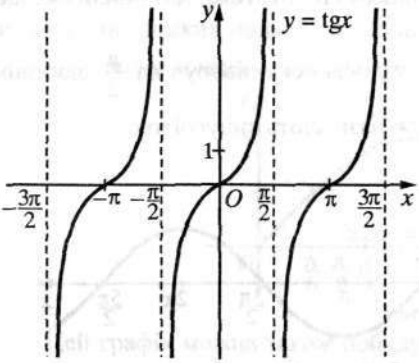


Рис. 39

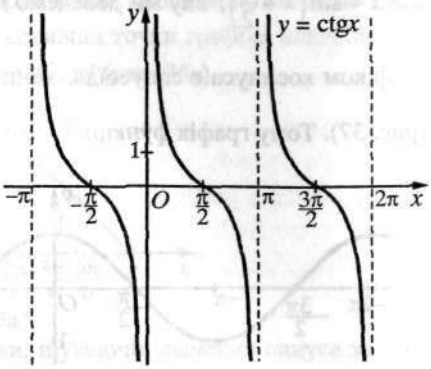


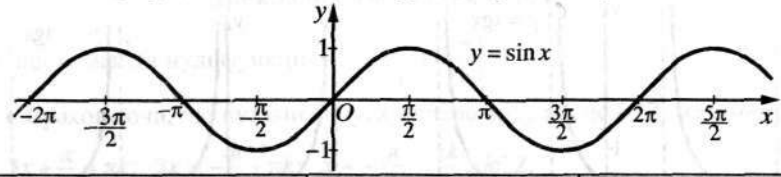
Рис. 40

4. Графік функції $y = \mathrm{ctg}x$. Котангенс не визначений для кутів πk, $k \in Z$. Його графік можна будувати у тій же послідовності, що й графік тангенса: спочатку на проміжку $(0; \pi)$, а потім, скориставшись періодичністю, — на всій області визначення. А можна використати тотожність $\mathrm{ctg}\,x = -\mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, яку ми доведемо пізніше. Із цієї тотожності випливає, що для побудови графіка котангенса можна змістити тангенсоїду вздовж осі x ліворуч на $\frac{\pi}{2}$ одиниць, після чого виконати симетрію одержаного графіка відносно цієї осі. Графік функції $y = \mathrm{ctg}x$ зображено на рисунку 40.

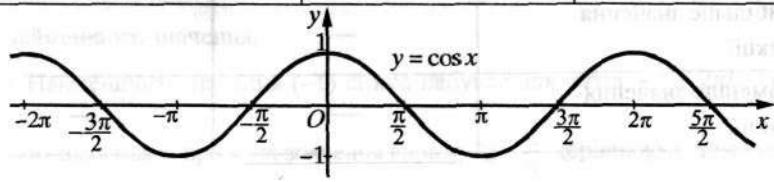
5. Властивості тригонометричних функцій. Підсумовуючи вивчене, наведемо перелік властивостей тригонометричних функцій та їхні графіки. Деякі із цих властивостей були доведені у попередньому параграфі. Властивості, пов'язані зі зростанням, спаданням тригонометричних функцій, легко читаються за їхніми графіками. Ці властивості будуть обґрунтовані у §11.

У наведених далі таблицях вважаємо, що $k \in Z$.

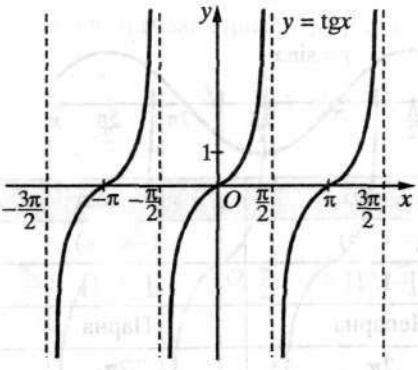
Графіки та властивості функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$

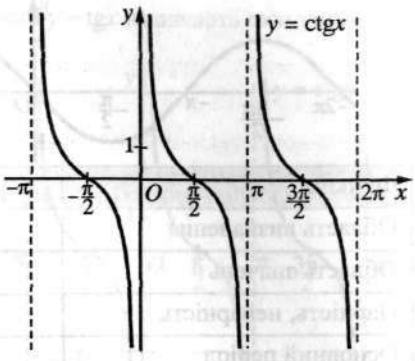


Функція	$y = \sin x$	$y = \cos x$
Область визначення	$(-\infty; \infty)$	$(-\infty; \infty)$
Область значень	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$
Парність, непарність	Непарна	Парна
Основний період	2π	2π
Нулі функції	πk	$\frac{\pi}{2} + \pi k$
Проміжки, на яких функція набуває додатних значень	$(2\pi k; \pi + 2\pi k)$	$\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$
Проміжки, на яких функція набуває від'ємних значень	$(-\pi + 2\pi k; 2\pi k)$	$\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$
Проміжки зростання	$\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$	$[-\pi + 2\pi k; 2\pi k]$
Проміжки спадання	$\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$	$[2\pi k; \pi + 2\pi k]$
Найбільше значення функції	1	1
Значення аргументу, при яких функція набуває найбільшого значення	$\frac{\pi}{2} + 2\pi k$	$2\pi k$
Найменше значення функції	-1	-1
Значення аргументу, при яких функція набуває найменшого значення	$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$	$\pi + 2\pi k$



Графіки та властивості функцій $y = \text{tg}x$ і $y = \text{ctg}x$





Функція	$y = \text{tg}x$	$y = \text{ctg}x$
Область визначення	Множина всіх дійсних чисел, крім $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$	Множина всіх дійсних чисел, крім $x = \pi k$
Область значень	$(-\infty; \infty)$	$(-\infty; \infty)$
Парність, непарність	Непарна	Непарна
Основний період	π	π
Нулі функції	πk	$\frac{\pi}{2} + \pi k$
Проміжки, на яких функція набуває додатних значень	$\left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$	$\left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$
Проміжки, на яких функція набуває від'ємних значень	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right)$
Проміжки зростання	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$	—
Проміжки спадання	—	$(\pi k; \pi + \pi k)$
Найбільше значення функції	—	—
Найменше значення функції	—	—

Приклади розв'язання вправ

Приклад 1. Знайти нулі функції $y = \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$.

● Враховуючи, що нулями синуса є числа виду πk, де $k \in Z$, матимемо:

$3x + \frac{\pi}{6} = \pi k$; $3x = -\frac{\pi}{6} + \pi k$; $x = -\frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}$; $k \in Z$.

Відповідь. $x = -\frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$. ●

Приклад 2. Знайти проміжки, на яких функція $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ набуває додатних значень.

● Косинус набуває додатних значень на проміжках $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, де $k \in Z$. Знайдемо значення x, для яких значення виразу $2x - \frac{\pi}{4}$ належать цим проміжкам:

$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < 2x - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + 2\pi k < 2x < \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$;

$-\frac{\pi}{4} + 2\pi k < 2x < \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$; $-\frac{\pi}{8} + \pi k < x < \frac{3\pi}{8} + \pi k$.

Отже, дана функція набуває додатних значень на проміжках $\left(-\frac{\pi}{8} + \pi k; \frac{3\pi}{8} + \pi k\right)$, де $k \in Z$. ●

Приклад 3. Що більше: $\sin\frac{\pi}{8}$ чи $\sin\frac{\pi}{9}$?

● Числа $\frac{\pi}{8}$ і $\frac{\pi}{9}$ належать проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, на якому синус зростає.

Оскільки $\frac{\pi}{8} > \frac{\pi}{9}$, то $\sin\frac{\pi}{8} > \sin\frac{\pi}{9}$. ●

Приклад 4. Знайти значення x, при яких функція $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ набуває найменшого значення.

● Найменшого значення (–1) синус набуває для кутів $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Знайдемо значення x, при яких значення виразу $2x - \frac{\pi}{6}$ дорівнюють цим кутам:

$$2x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \ 2x=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \ 2x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \ x=-\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z.$$

Відповідь. $-\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z.$ ●

Усно

128. Використовуючи графіки тригонометричних функцій, назвіть властивості функції:

а) $y = \sin x$; **б)** $y = \cos x$; **в)** $y = \mathrm{tg}x$; **г)** $y = \mathrm{ctg}x$.

Рівень А

Побудуйте графік функції та вкажіть: а) нулі функції; б) проміжки, на яких функція набуває додатних значень; від'ємних значень; в) проміжки зростання та проміжки спадання функції; г) значення x, при яких функція набуває найбільшого значення; найменшого значення:

129. **а)** $y = \sin x$, $0 \le x \le 2\pi$; **б)** $y = \cos x$, $-\pi \le x \le \pi$.

130. **а)** $y = \sin x$, $-\pi \le x \le \pi$; **б)** $y = \cos x$, $0 \le x \le 2\pi$.

131. Побудуйте графік функції $y = \mathrm{tg}x$. Скільки нулів має дана функція на проміжку $[-\pi; \pi]$?

132. Побудуйте графік функції $y = \mathrm{ctg}x$ та вкажіть кількість її нулів на проміжку $[-\pi; \pi]$.

Що більше:

133. **а)** $\sin\frac{\pi}{7}$ чи $\sin\frac{2\pi}{7}$; **б)** $\cos\frac{\pi}{6}$ чи $\cos\frac{\pi}{7}$; **в)** $\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{5}\right)$ чи $\mathrm{tg}\frac{\pi}{5}$?

134. **а)** $\sin\frac{\pi}{4}$ чи $\sin\frac{\pi}{5}$; **б)** $\cos\frac{\pi}{9}$ чи $\cos\frac{2\pi}{9}$; **в)** $\mathrm{ctg}\frac{\pi}{7}$ чи $\mathrm{ctg}\frac{3\pi}{7}$?

Рівень Б

135. Розв'яжіть графічно рівняння: $\cos x = x^2 - \frac{\pi^2}{4}$.

136. Розв'яжіть графічно рівняння: $\sin x = -2x$.

Знайдіть нулі функції та проміжки, на яких вона набуває додатних значень; від'ємних значень:

137. **а)** $y = \sin 2x$; **б)** $y = \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$; **в)** $y = \mathrm{tg}\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$.

138. **а)** $y = \cos\frac{x}{2}$; **б)** $y = \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$; **в)** $y = \mathrm{ctg}\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

Що більше:

139. а) $\sin\left(-\frac{3\pi}{7}\right)$ чи $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; б) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ чи $\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)$;

в) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{7}\right)$ чи $\operatorname{ctg}\left(-\frac{2\pi}{7}\right)$?

140. а) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ чи $\cos\left(-\frac{4\pi}{9}\right)$; б) $\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ чи $\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)$;

в) $\operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{8}\right)$ чи $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$?

141. Знайдіть значення x, при яких функція набуває найбільшого значення:

а) $y = \cos 3x$; б) $y = \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$.

142. Знайдіть значення x, при яких функція набуває найменшого значення:

а) $y = \sin\frac{x}{2}$; б) $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Рівень В

143. Побудуйте графік функції:

а) $y = |\sin x|$; б) $y = \sin|x|$; в) $y = |\operatorname{tg} x|$;

г) $y = |\cos x|$; д) $y = \cos|x|$; е) $y = \frac{\cos x + |\cos x|}{2}$.

144. Побудуйте графік функції $y = \frac{|\cos x|}{\cos x}$. Чи є дана функція періодичною?

145. Знайдіть проміжки, на яких функція зростає; спадає:

а) $y = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$; б) $y = \sin(-x)$; в) $y = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$.

146. Що більше:

а) $\sin\frac{\pi}{5}$ чи $\sin\frac{25\pi}{4}$; б) $\cos\left(-\frac{37\pi}{8}\right)$ чи $\cos\frac{37\pi}{3}$?

Вправи для повторення

147. Спростіть вираз: $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} + \frac{1}{\sqrt{a}+1} + \frac{1}{a-1}\right) \cdot \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+2}$.