404. Знайдіть значення виразу:

а) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{4}-\arccos\frac{3}{4}\right)$; б) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\arcsin\frac{3}{5}\right)$.

405. Розв'яжіть рівняння:

а) $\arcsin(2x-1)=-\frac{\pi}{6}$; б) $\arccos\left(2x^2-x\right)=0$; в) $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=2$.

406. Розв'яжіть нерівність:

а) $\arcsin x<\frac{\pi}{3}$; б) $\arccos x\geq-\frac{\pi}{3}$; в) $\operatorname{arctg}x\leq\frac{\pi}{4}$.

407. Побудуйте графік функції:

а) $y=\sin(\arcsin x)$; б) $y=\arccos(\cos x)$.

Вправи для повторення

408. Розв'яжіть рівняння:

а) $4(3x-2)-3(4+7x)=-2$; б) $(x^2-2x+4)(x+2)=2(x-2)^2$.

409. Знайдіть усі значення x, для яких графік функції $y=\frac{3x+24}{6-x}$ розташований вище від осі абсцис.

410. Знайдіть:

а) $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\cos\alpha=-0{,}8$ і α — кут II чверті;

б) $\frac{\sin2\alpha}{1+\sin^2\alpha}$, якщо $\operatorname{tg}\alpha=2$.

411. Три велосипедисти подолали одну й ту ж дистанцію, до того ж, другий велосипедист на 0,5 год, а третій на 1,25 год приїхали швидше, ніж перший. Знайдіть довжину дистанції, якщо швидкості другого і третього велосипедистів були більші від швидкості першого велосипедиста відповідно на 2 км/год і 6 км/год.

§ 14. Найпростіші тригонометричні рівняння

У рівняннях $\sin(2x-1)=1$, $\cos^2x+3\sin x-3=0$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\sin x$ змінна стоїть під знаками тригонометричних функцій. Такі рівняння називають *тригонометричними рівняннями*.

Знайдемо формули для коренів найпростіших тригонометричних рів-

тригонометричні рівняння

$\cos^2 x + 3\sin x - 3 = 0$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \sin x$ змінна

ичних функцій. Такі рівняння називають

§ 14. Найпростіші

У рівняннях $\sin(2x-1) = 1$,

стоїть під знаками тригонометр

тригонометричними рівняннями.

Якщо пряма $t = a$, всі точки якої мають абсцису a, перетинає одиничне коло у точках P_{x_1} і P_{x_2}, то x_1 і x_2 — корені рівняння. Оскільки x_1 — це кут із проміжку $[0;\pi]$, косинус якого дорівнює a, то $x_1 = \arccos a$. Далі, обґрунтувавши, що $x_2 = -\arccos a$, одержимо формулу (1).

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\cos x = -\frac{1}{2}$.

● За формулою (1) знаходимо:

$$x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k,\ k \in Z; \qquad x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Відповідь. $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$. ●

Корені рівняння $\cos x = a$ для $a = 0$ і $a = \pm 1$ можна шукати за загальною формулою (1). Проте для цих окремих випадків прийнято простіший запис коренів:

Рівняння	Корені
$\cos x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$
$\cos x = 1$	$x = 2\pi k,\ k \in Z$
$\cos x = -1$	$x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z$

2. Рівняння $\sin x = a$.

Якщо $a > 1$ або $a < -1$, то дане рівняння коренів не має.

Нехай $-1 \le a \le 1$. На проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ функція $y = \sin x$ зростає від -1 до 1 і значення a набуває при єдиному значенні $x = x_1$ (див. рис. 69). Оскільки x_1 — це кут із проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус якого дорівнює a, то $x_1 = \arcsin a$.

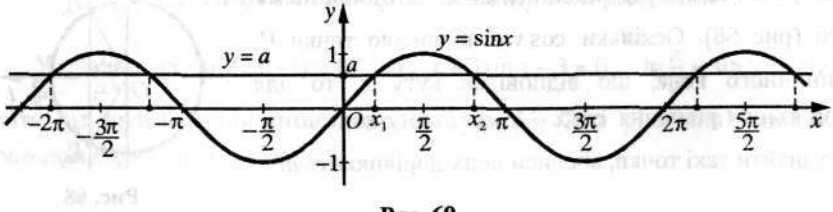

Рис. 69

На проміжку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ функція $y = \sin x$ спадає від 1 до –1 і значення a набуває також при єдиному значенні x. Покажемо, що цим значенням є $x_2 = \pi - x_1 = \pi - \arcsin a$. Справді, оскільки $\sin x_1 = a$, то

$$\sin x_2 = \sin(\pi - x_1) = \sin x_1 = a.$$

Крім того, значення x_2 належить проміжку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$. Це випливає з такого ланцюжка нерівностей:

$$-\frac{\pi}{2} \le x_1 \le \frac{\pi}{2}; \quad -\frac{\pi}{2} \le -x_1 \le \frac{\pi}{2}; \quad \pi - \frac{\pi}{2} \le \pi - x_1 \le \pi + \frac{\pi}{2}; \quad \frac{\pi}{2} \le x_2 \le \frac{3\pi}{2}.$$

Отже, якщо $-1 \le a \le 1$, то рівняння $\sin x = a$ має на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ завдовжки 2π два корені $x_1 = \arcsin a$ і $x_2 = \pi - \arcsin a$ (ці корені збігаються, якщо $a = 1$). Врахувавши, що функція $y = \sin x$ є періодичною з основним періодом 2π, одержимо такі формули для коренів рівняння:

$$x_1 = \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in Z;$$

$$x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

Запишемо x_1 та x_2 у такому вигляді:

$$x_1 = 1 \cdot \arcsin a + \pi \cdot 2n, \quad n \in Z; \tag{2}$$

$$x_2 = (-1) \cdot \arcsin a + \pi \cdot (2n+1), \quad n \in Z. \tag{3}$$

Проаналізуємо записані рівності: коли π множать на парне число, то перед $\arcsin a$ маємо множник 1, а коли π множать на непарне число, — множник –1. Тому, використавши так званий «регулятор знаку» — множник $(-1)^k$, усі корені рівняння $\sin x = a$ можна задати не двома, а однією формулою:

$$\boldsymbol{x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, \ k \in Z.} \tag{4}$$

Справді, якщо число k — парне: $k = 2n$, $n \in Z$, то одержимо корені, що визначаються формулою (2); якщо ж число k — непарне: $k = 2n+1$, $n \in Z$, — корені, що визначаються формулою (3).

Формулу (4) можна було б вивести, ілюструючи розв'язання рівняння $\sin x = a$ на одиничному колі (рис. 70). Зробіть це самостійно. Зазначимо лише, що $\sin x$ є ординатою точки P_x одиничного кола, що відповідає куту x. Тому для розв'язання рівняння $\sin x = a$ потрібно шукати точки перетину цього кола з прямою $y = a$, всі точки якої мають ординату a.

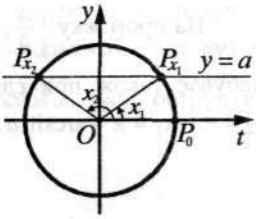

Рис. 70

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

● За формулою (4) знаходимо:

$x = (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi k,\ k \in Z;$ $\qquad x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z.$

Відповідь. $(-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z.$ ●

Для $a = 0$ і $a = \pm 1$ прийнято такий запис коренів рівняння $\sin x = a$:

Рівняння	Корені
$\sin x = 0$	$x = \pi k,\ k \in Z$
$\sin x = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$
$\sin x = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$

3. Рівняння $\mathrm{tg}x = a$.

Тангенс може набувати будь-якого дійсного значення. Тому дане рівняння має корені для будь-якого значення a.

На проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ функція $y = \mathrm{tg}x$ зростає і значення a набуває при єдиному значенні $x = x_1$ (див. рис. 71). Оскільки x_1 — це кут із проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює a, то $x_1 = \mathrm{arctg}\, a$.

Врахувавши, що функція $y = \mathrm{tg}x$ є періодичною з основним періодом π, одержимо таку формулу для запису всіх коренів рівняння:

$$x = \mathrm{arctg}\, a + \pi k,\ k \in Z. \qquad (5)$$

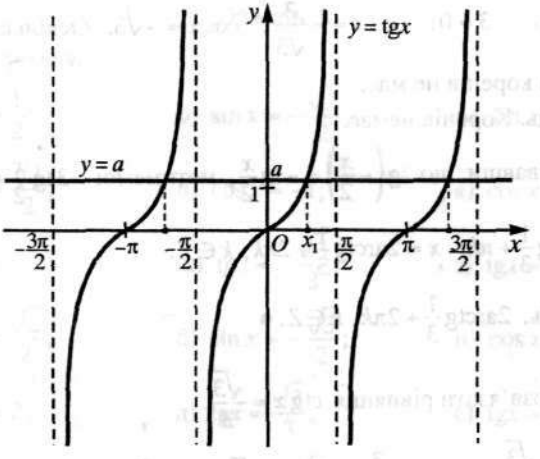

Рис. 71

Формулу (5) можна було б вивести, ілюструючи розв'язання рівняння $\operatorname{tg}x = a$ за допомогою лінії тангенсів (рис. 72).

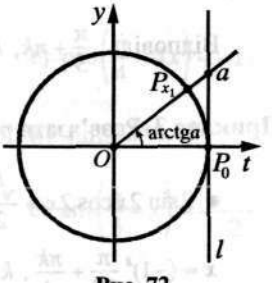

Рис. 72

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\operatorname{tg}x = \sqrt{3}$.

● За формулою (5) знаходимо:

$x = \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \pi k,\ k \in Z;$

$x = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z.$

Відповідь. $\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z.$ ●

Приклади розв'язання вправ

Приклад 1. Розв'язати рівняння:

а) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; **б)** $\sqrt{3}\cos x + 3 = 0$; **в)** $3\operatorname{tg}\left(-\frac{x}{2}\right) + 1 = 0$.

● **а)** $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $2x - \frac{\pi}{3} = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k$; $2x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + \pi k$;

$x = (-1)^k \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z.$

Відповідь. $(-1)^k \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z.$

б) $\sqrt{3}\cos x+3=0$; $\cos x=-\frac{3}{\sqrt{3}}$; $\cos x=-\sqrt{3}$. Оскільки $-\sqrt{3}<-1$, то дане рівняння коренів не має.

Відповідь. Коренів немає.

в) Врахувавши, що $\operatorname{tg}\left(-\frac{x}{2}\right)=-\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, матимемо: $-3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1=0$; $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{3}$;

$\frac{x}{2}=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k$; $x=2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+2\pi k$, $k\in Z$.

Відповідь. $2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+2\pi k$, $k\in Z$. ●

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\operatorname{ctg}x=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

● $\operatorname{ctg}x=\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\operatorname{tg}x=\frac{3}{\sqrt{3}}$; $\operatorname{tg}x=\sqrt{3}$; $x=\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in Z$.

Відповідь. $\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in Z$. ●

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\sin 2x\cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

● $2\sin 2x\cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin 4x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $4x=(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k$;

$x=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{4}$, $k\in Z$.

Відповідь. $(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{4}$, $k\in Z$. ●

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\cos(x-30^\circ)=\frac{1}{2}$.

● $\cos(x-30^\circ)=\frac{1}{2}$; $x-30^\circ=\pm 60^\circ+360^\circ\cdot k$; $x=30^\circ\pm 60^\circ+360^\circ\cdot k$, $k\in Z$.

Знайдені корені можна записати за допомогою двох формул, узявши перед 60° спочатку знак «+», а потім — знак «–»: $x=90^\circ+360^\circ\cdot m$, $m\in Z$; $x=-30^\circ+360^\circ\cdot n$, $n\in Z$.

Відповідь. $90^\circ+360^\circ\cdot m$, $m\in Z$; $-30^\circ+360^\circ\cdot n$, $n\in Z$. ●

Рівень А

Розв'яжіть рівняння:

412. а) $\sin x = \frac{1}{2}$; б) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\sin x = 0{,}1$;

г) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; д) $\cos x = -1$; е) $\cos x = -1{,}5$;

є) $\mathrm{tg}x = 1$; ж) $\mathrm{tg}x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; з) $\mathrm{tg}x = 3$.

413. а) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\cos x = \frac{1}{2}$;

г) $\cos x = 2$; д) $\mathrm{tg}x = \frac{\sqrt{3}}{3}$; е) $\mathrm{tg}x = -1$.

414. а) $\sin 4x = 0$; б) $\cos\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $2\cos 3x - 1 = 0$;

г) $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$; д) $\mathrm{tg}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$; е) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - 4x\right) = -1$.

415. а) $\cos 6x = 1$; б) $\mathrm{tg}\frac{x}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $\sin 2x - 1 = 0$;

г) $\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$; д) $\mathrm{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$; е) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Рівень Б

Розв'яжіть рівняння:

416. а) $\cos\frac{2x}{3} = \sqrt{3} - 1$; б) $\mathrm{tg}(2x - 45°) = -1$;

в) $\frac{1}{2}\sin\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$; г) $1 - \mathrm{ctg}\,x = 0$.

417. а) $\sin\frac{4x}{5} = \sqrt{2}$; б) $\cos(x + 60°) = -\frac{1}{2}$;

в) $3\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} = 0$; г) $\mathrm{ctg}\,x + \sqrt{3} = 0$.

418. Розв'яжіть рівняння та вкажіть його найбільший від'ємний корінь:

а) $\cos^2 2x - \sin^2 2x = 1$; б) $\cos x \sin x = -\frac{1}{4}$;

в) $\sin x\cos 2x-\cos x\sin 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\cos 4x\cos 2x+\sin 4x\sin 2x=-\frac{1}{2}$.

419. Розв'яжіть рівняння та вкажіть його найменший додатний корінь:

а) $4\sin x\cos x=1$; б) $\sin^2 x-\cos^2 x=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\sin 6x\cos 3x-\cos 6x\sin 3x=0$; г) $\cos x\cos 2x-\sin x\sin 2x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Рівень В

420. Для яких значень a має корені рівняння:

а) $\cos x=3-2a$; б) $\operatorname{tg}x=\sqrt{a-2}$; в) $\sin x=a^2+1$?

421. Розв'яжіть рівняння:

а) $\sin x^2=1$; б) $\cos(\sin x)=0$; в) $\sin(\sin x)=0$.

422. Рівняння $\sin(x-a)=b$ має на проміжку $[0;2\pi]$ три корені. Знайдіть a і b.

423. Для яких значень a рівняння $\sqrt{a^2-x^2}(1+\cos x)=0$ має два корені?

Вправи для повторення

424. Розв'яжіть рівняння:

а) $6x^2-x-1=0$; б) $x^3+2x^2-x-2=0$.

425. Знайдіть значення виразу:

а) $(\sqrt{7}-\sqrt{2})(\sqrt{7}+\sqrt{2})$; б) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}+\sqrt{(3-\sqrt{5})^2}$.

426. Нехай a і b — деякі числа, які одночасно не дорівнюють нулю. Доведіть, що існує кут φ, для якого $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ і $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

427. Батько хоче розподілити 36 яблук між п'ятьма дітьми. Половину всіх яблук він віддає синам, які розподіляють їх між собою порівну, а другу половину віддає дочкам, які теж розподіляють їх між собою порівну. Виявилось, що кожна дочка отримала на 3 яблука більше, ніж кожний син. Скільки синів було у батька?