§ 15. *Розв'язування тригонометричних рівнянь*

Розглянемо основні способи розв'язування тригонометричних рівнянь.

1. Спосіб розкладання на множники.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\sin 5x + \sin x = \cos 2x$.

• Використавши формулу $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$, матимемо:

$$2\sin 3x\cos 2x - \cos 2x = 0; \quad \cos 2x(2\sin 3x - 1) = 0.$$

№ 428 434

Тоді:

1) $\cos 2x = 0; \quad 2x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k; \quad x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2},\ k \in Z;$

2) $2\sin 3x - 1 = 0;\ \sin 3x = \dfrac{1}{2};\ 3x = (-1)^k\dfrac{\pi}{6} + \pi k;\ x = (-1)^k\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{\pi k}{3},\ k \in Z.$

Відповідь. $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2},\ (-1)^k\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{\pi k}{3},\ k \in Z.$ •

Примітка. **При розв'язуванні тригонометричних рівнянь може трапитися, що одна група коренів рівняння включає в себе іншу групу коренів. Розглянемо, наприклад, рівняння $\sin 2x\sin x = 0$. Прирівнявши кожний множник до нуля, матимемо:**

1) $\sin 2x = 0;\ 2x = \pi n;\ x = \dfrac{\pi n}{2},\ n \in Z;$

2) $\sin x = 0;\ x = \pi k,\ k \in Z.$

Як видно з рисунка 73, група коренів рівняння 1) включає в себе корені рівняння 2). Тому, записуючи корені рівняння $\sin 2x\sin x = 0$, можна обмежитися лише групою: $x = \dfrac{\pi n}{2},\ n \in Z$.

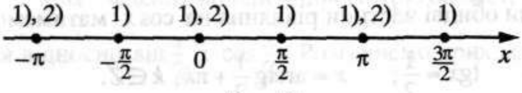

Рис. 73

2. Метод заміни змінних.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$.

№ 43 43

• Врахувавши, що $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, матимемо:

$$2(1 - \sin^2 x) + 5\sin x - 4 = 0; \quad 2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0.$$

Зробимо заміну: $\sin x = y$. Одержимо рівняння

$$2y^2 - 5y + 2 = 0,$$

кореням якого є $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = 2$. Повертаючись до заміни, матимемо:

1) $\sin x = \frac{1}{2}$; $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$;

2) $\sin x = 2$ — рівняння коренів не має.

Відповідь. $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$. •

3. Однорідні тригонометричні рівняння першого степеня відносно синуса і косинуса.

Так називають рівняння виду

$$a\sin x + b\cos x = 0, \qquad (1)$$

№433

де a і b — деякі числа, з яких хоча б одне відмінне від нуля.

Якщо одне з чисел a, b дорівнює нулю (тоді інше — відмінне від нуля), то рівняння (1) зводиться до найпростішого тригонометричного рівняння $\sin x = 0$ або $\cos x = 0$.

Якщо ж обидва числа a і b відмінні від нуля, то для розв'язання рівняння (1) обидві його частини ділять на $\cos x$ і одержують рівносильне йому рівняння

$$a\operatorname{tg} x + b = 0.$$

(Обґрунтуємо, що, поділивши обидві частини рівняння (1) на $\cos x$, отримаємо *рівносильне йому рівняння*. Виконавши ділення на $\cos x$, ми тим самим виключили з розгляду значення x, для яких $\cos x = 0$. Однак ці значення не є коренями рівняння (1). Справді, якщо $\cos x = 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$, звідки $\sin x = 1$ або $\sin x = -1$. Для таких значень x рівняння (1) перетворюється у рівність $a \cdot (\pm 1) + b \cdot 0 = 0$, яка при $a \neq 0$ і $b \neq 0$ є неправильною.)

Приклад 3. Розв'язати рівняння $2\sin x - \cos x = 0$.

• Поділивши обидві частини рівняння на $\cos x$, матимемо:

$2\operatorname{tg} x - 1 = 0$; $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$; $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi k,\ k \in Z$.

Відповідь. $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi k,\ k \in Z$. •

4. Однорідні тригонометричні рівняння другого степеня відносно синуса і косинуса.

4

Так називають рівняння виду

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0, \qquad (2)$$

де a, b і c — деякі числа, з яких хоча б одне відмінне від нуля.

Якщо $a = 0$ або $c = 0$, то рівняння (2) можна розв'язати способом розкладання на множники.

Якщо ж $a \neq 0$ і $c \neq 0$, то, поділивши обидві частини рівняння (2) на $\cos^2 x$, одержимо рівносильне йому рівняння

$$a\mathrm{tg}^2 x + b\mathrm{tg}x + c = 0.$$

(Обґрунтувати рівносильність можна так само, як це ми робили для однорідного тригонометричного рівняння першого степеня.)

Приклад 4. Розв'язати рівняння $2\sin^2 x - 3\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$.

● Поділивши обидві частини рівняння на $\cos^2 x$, одержимо рівняння:

$$2\mathrm{tg}^2 x - 3\mathrm{tg}x + 1 = 0.$$

Нехай $\mathrm{tg}x = y$. Тоді:

$$2y^2 - 3y + 1 = 0; \quad y_1 = \frac{1}{2}, \quad y_2 = 1.$$

Повертаючись до заміни, матимемо:

1) $\mathrm{tg}x = \frac{1}{2}$; $x = \mathrm{arctg}\frac{1}{2} + \pi k$, $k \in Z$; 2) $\mathrm{tg}x = 1$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$.

Відповідь. $\mathrm{arctg}\frac{1}{2} + \pi k$, $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$. ●

5. Рівняння виду $a\sin x + b\cos x = c$.

Якщо хоча б одне із чисел a, b, c дорівнює нулю, то таке рівняння зводиться до найпростішого тригонометричного рівняння або до однорідного тригонометричного рівняння першого степеня.

Якщо ж числа a, b, c відмінні від нуля, то рівняння можна розв'язати за допомогою введення допоміжного кута, поділивши обидві його частини на $\sqrt{a^2 + b^2}$, або шляхом зведення до однорідного тригонометричного рівняння другого степеня відносно $\sin\frac{x}{2}$ і $\cos\frac{x}{2}$. Розглянемо приклад розв'язання рівняння обома зазначеними способами.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $\sin x - \cos x = 1$.

1-й спосіб. ● У даному рівнянні $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Поділивши обидві його частини на $\sqrt{2}$, матимемо:

$$\sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \sin x\cos\frac{\pi}{4} - \cos x\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$x-\frac{\pi}{4}=(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k;\quad x=(-1)^k\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z.$$

Відповідь. $(-1)^k\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z.$ ●

2-й спосіб. ● Використавши формули подвійного аргументу та основну тригонометричну тотожність, запишемо рівняння у вигляді:

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)=\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2},$$

звідки:

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-2\cos^2\frac{x}{2}=0;\qquad 2\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)=0.$$

1) $\cos\frac{x}{2}=0;\ \ \frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \ x=\pi+2\pi n,\ \ n\in Z.$

2) $\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}=0;\ \ \operatorname{tg}\frac{x}{2}-1=0;\ \ \operatorname{tg}\frac{x}{2}=1;\ \ \frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \ x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \ n\in Z.$

Відповідь. $\pi+2\pi n,\ \frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z.$ ●

Примітка. Розв'язавши рівняння прикладу 5 двома способами, ми одержали одні й ті самі корені, проте з різною формою їх запису. Справді, розглядаючи спочатку парні значення k ($k=2n$), а потім непарні — $k=2n+1$, першу відповідь можна звести до двох груп коренів, зафіксованих у другій відповіді.

6. Дробові раціональні рівняння відносно тригонометричних функцій.

Приклад 6. Розв'язати рівняння $\frac{\sin 3x-\sin x}{1+\cos x}=0.$

● Дане рівняння рівносильне системі $\begin{cases}\sin 3x-\sin x=0;\\ 1+\cos x\neq 0.\end{cases}$ Розв'яжемо рівняння $\sin 3x-\sin x=0$:

$$2\sin\frac{3x-x}{2}\cos\frac{3x+x}{2}=0;\qquad 2\sin x\cos 2x=0;$$

1) $\sin x=0;\ \ x=\pi k,\ k\in Z;$

2) $\cos 2x=0;\ \ 2x=\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \ x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z.$

Розв'яжемо нерівність $1+\cos x\neq 0$: $\cos x\neq -1;\ \ x\neq \pi+2\pi m,\ m\in Z.$

Виберемо серед коренів рівнянь $\sin x=0$ і $\cos 2x=0$ ті корені, які задовольняють нерівність $\cos x\neq -1$. Для цього знайдемо спільний період функцій $y=\sin x$, $y=\cos 2x$ та $y=\cos x$, які визначаються лівими частинами обох рівнянь і нерівності. Оскільки перша із цих функцій має період 2π, друга — π, третя — 2π, то спільний період дорівнює 2π. На проміжку $[0; 2\pi)$ завдовжки 2π позначаємо корені рівнянь та закреслюємо точку, що відповідає значенню $x = \pi$, для якого $\cos x = -1$ (рис. 74).

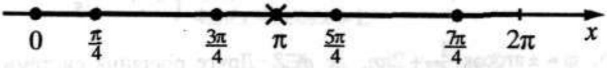

Рис. 74

Додавши до коренів, що залишилися, по $2\pi k$, де $k \in Z$, одержимо всі корені початкового рівняння: $2\pi k,\ \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ \frac{5\pi}{4} + 2\pi k,\ \frac{7\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z.$

Корені останніх чотирьох груп можна записати й так: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z.$

Відповідь. $2\pi k,\ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z.$ ●

Для тих, хто хоче знати більше

7. Формула допоміжного кута.

Розглянемо вираз $a\sin x + b\cos x$, де a і b — деякі відмінні від нуля числа. Перетворимо його так:

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\sin x \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \cos x \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right).$$

Оскільки $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1$, то існує такий кут φ, що

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},\quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Тоді

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\sin x\cos\varphi + \cos x\sin\varphi\right),$$

або

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(x + \varphi), \tag{3}$$

де допоміжний кут φ визначається із системи $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{cases}$

Формулу (3) називають *формулою допоміжного кута*.

Застосуємо цю формулу для виразу $\sin x + 2\cos x$. Спочатку знаходимо: $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5}$. Допоміжний кут шукаємо із системи $\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{5}};\\ \sin\varphi=\dfrac{2}{\sqrt{5}}.\end{cases}$ З першого рівняння знаходимо: $\varphi=\pm\arccos\dfrac{1}{\sqrt{5}}+2\pi n$, де $n\in Z$. Друге рівняння системи дозволяє визначити, кутом якої чверті є кут φ. Оскільки $\sin\varphi>0$ і $\cos\varphi>0$, то φ — кут першої чверті. Тому серед значень $\varphi=\pm\arccos\dfrac{1}{\sqrt{5}}+2\pi n$ беремо $\varphi=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{5}}+2\pi n$, $n\in Z$. Одержали всі допоміжні кути φ. Узявши $\varphi=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, матимемо:

$$\sin x+2\cos x=\sqrt{5}\sin\left(x+\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

Використовуючи одержану рівність, дайте відповіді на запитання:

1) *Яке найбільше і яке найменше значення виразу* $\sin x+2\cos x$?

2) *Для яких значень a рівняння* $\sin x+2\cos x=a$ *має корені; не має коренів?*

Формулу допоміжного кута можна використовувати при розв'язуванні рівнянь виду $a\sin x+b\cos x=c$, де $a\neq 0$, $b\neq 0$. Використовуючи формулу (3), це рівняння можна звести до вигляду

$$\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)=c \quad \text{або} \quad \sin(x+\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Розглянемо приклад.

Приклад 7. Розв'язати рівняння $4\sin x-3\cos x=1$.

• Оскільки $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$, то рівняння зводиться до вигляду $5\sin(x+\varphi)=1$, де допоміжний кут φ визначається із системи $\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{4}{5};\\ \sin\varphi=-\dfrac{3}{5}.\end{cases}$ Зі значень $\varphi=\pm\arccos\dfrac{4}{5}$ беремо $\varphi=-\arccos\dfrac{4}{5}$, бо в системі $\cos\varphi>0$, $\sin\varphi<0$, звідки φ — кут IV чверті. Розв'яжемо рівняння $5\sin(x+\varphi)=1$:

$$\sin(x+\varphi)=\frac{1}{5};\quad x+\varphi=(-1)^k\arcsin\frac{1}{5}+\pi k;\quad x=(-1)^k\arcsin\frac{1}{5}-\varphi+\pi k,\ k\in Z.$$

Відповідь. $(-1)^k\arcsin\dfrac{1}{5}+\arccos\dfrac{4}{5}+\pi k$, $k\in Z$. •

8. Розв'язування тригонометричних рівнянь за допомогою універсальної підстановки.

Формули, що виражають тригонометричні функції через тангенс половинного аргументу, називають *формулами універсальної підстановки.*

Розв'яжемо за допомогою універсальної підстановки рівняння прикладу 7:

$$4\sin x - 3\cos x = 1.$$

Використавши формули $\sin x = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, $\cos x = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$ і зробивши заміну $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = y$, одержимо рівняння $\dfrac{8y}{1+y^2} - \dfrac{3(1-y^2)}{1+y^2} = 1$, звідки:

$8y - 3(1-y^2) = 1 + y^2$; $\quad 2y^2 + 8y - 4 = 0$; $\quad y^2 + 4y - 2 = 0$; $\quad y_{1,2} = -2 \pm \sqrt{6}$.

Повернувшись до заміни, матимемо:

$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -2 \pm \sqrt{6}$; $\quad \frac{x}{2} = \operatorname{arctg}\left(-2 \pm \sqrt{6}\right) + \pi n$; $\quad x = 2\operatorname{arctg}\left(-2 \pm \sqrt{6}\right) + 2\pi n$, $n \in Z$.

Увага! Ліві частини тотожностей $\sin x = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$ і $\cos x = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$ мають зміст при будь-якому дійсному значенні x, а праві — при $x \neq \pi + 2\pi m$, $m \in Z$ (якщо $x = \pi + 2\pi m$, то вираз $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ не має змісту). Тому, використавши універсальну підстановку, ми виключили з розгляду значення $x = \pi + 2\pi m$, $m \in Z$. Обов'язково потрібно перевірити, чи немає серед цих значень коренів рівняння.

Зробимо таку перевірку для рівняння $4\sin x - 3\cos x = 1$, яке ми розглядаємо:

$4\sin(\pi + 2\pi m) - 3\cos(\pi + 2\pi m) = 4 \cdot 0 - 3 \cdot (-1) = 3$; $3 \neq 1$.

$x = \pi + 2\pi m$, $m \in Z$ — не корені рівняння.

Отже, коренями рівняння є: $2\operatorname{arctg}\left(-2 \pm \sqrt{6}\right) + 2\pi n$, $n \in \mathrm{Z}$. Зауважимо, що у відповіді до прикладу 7 маємо ті самі корені, проте з іншою формою запису.

Рівень А

Розв'яжіть рівняння:

428. а) $2\sin x - \cos x \sin x = 0$; б) $\sin 2x - \cos x = 0$;

в) $2\sin^2 x + \sin x = 0$; г) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x = 0$;

д) $\sin 5x + \sin x = 0$; е) $\cos 3x - \cos x = 0$.

429. а) $\sin x \operatorname{tg} x - \sin x = 0$; б) $\cos x + \sin 2x = 0$;

в) $2\cos^2 x - \sqrt{3}\cos x = 0$; г) $\operatorname{tg}^2 x - \sqrt{3}\operatorname{tg} x = 0$;

д) $\sin 3x - \sin x = 0$; е) $\cos 5x + \cos 3x = 0$.

430. а) $\sin^2 x - \sin x - 2 = 0$; б) $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$;

в) $\text{tg}^2 x - 4\text{tg}x + 3 = 0$; г) $\sin^2 x - 4\sin x + 5 = 0$.

<u>431</u>. а) $\cos^2 x + 5\cos x - 6 = 0$; б) $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$;

в) $3\text{tg}^2 x - 4\text{tg}x + 1 = 0$.

432. а) $\sin x - \cos x = 0$; б) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$.

<u>433</u>. а) $\sin x + \cos x = 0$; б) $3\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$.

Рівень Б

Розв'яжіть рівняння:

434. а) $1 - \sin x = \cos x - \frac{1}{2}\sin 2x$; б) $\cos 7x = \cos 2x$;

в) $\cos x - \cos 3x = \sin 2x$; г) $\sin 2x + \sin 4x = \sin 6x$;

д) $\cos\frac{x}{2} + \cos\frac{3x}{2} = 1 + \cos 2x$; е) $\sin 3x - \sin x \cos 2x = 0$;

є) $\cos x \cos 3x = \sin 2x \sin 6x$; ж) $\sin 4x = \cos 6x$.

<u>435</u>. а) $1 + \cos x = \sin x + 0{,}5\sin 2x$; б) $\sin 3x = \sin 4x$;

в) $\cos 2x + \cos 6x = 1 + \cos 8x$; г) $\sin 4x = \sin 3x + \sin 5x$;

д) $\cos 3x + \sin x \sin 2x = 0$; е) $\sin 2x \sin 5x = \sin 3x \sin 4x$.

436. а) $\sin^2 x - \sin x = 1$; б) $\sqrt{2}\cos^2 x + \cos x = \sqrt{2}$;

в) $4\,\text{tg}\,3x = 1 - 5\,\text{tg}^2\,3x$; г) $7\sin x + 3\cos^2 x = 7$;

д) $\cos 2x + 3\sin x = 2$; е) $\cos x + 3\cos\frac{x}{2} = 1$.

<u>437</u>. а) $2\cos^2 x + 1 = 5\cos x$; б) $6\sin^2 2x = 1 - \sin 2x$;

в) $3\cos x + 2\sin^2 x = 3$; г) $3\sin x + \cos 2x + 1 = 0$.

438. Знайдіть найбільший від'ємний корінь рівняння $3\sin^2 x = \cos^2 x + 4\cos x$.

<u>439</u>. Знайдіть найменший додатний корінь рівняння $\cos 4x = 5\cos 2x + 2$.

Знайдіть усі корені рівняння, що належать вказаному проміжку:

440. а) $2\sin 4x - \cos 4x = 0$; $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$;

б) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3}\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$; $[-\pi; \pi]$.

441. а) $4\sin\frac{x}{2}+3\cos\frac{x}{2}=0$; $[-\pi;\pi]$;

б) $3\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{3}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$; $(-\pi;\pi)$.

Розв'яжіть рівняння:

442. а) $\sin^2 x-3\sin x\cos x+2\cos^2 x=0$; б) $\sin^2 2x-\sin 4x-3\cos^2 2x=0$;

в) $3\sin^2 x+\frac{1}{2}\sin 2x=2$; г) $\cos 2x+\sin x\cos x+\cos^2 x=1$.

443. а) $2\sin^2 x+3\sin x\cos x+\cos^2 x=0$; б) $4\cos^2 x-\sin 2x-4\sin^2 x=1$;

в) $\cos 2x-\sin x\cos x=\sin^2 x$; г) $\sin^2 3x+\sin 6x-3\cos^2 3x=0$.

444. а) $\sin x-\cos x=-1$; б) $\sin 3x+\sqrt{3}\cos 3x=\sqrt{2}$.

445. а) $\sin x+\cos x=1$; б) $\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=1$.

446. а) $\frac{5}{3\cos x+4}=2$; б) $2+\frac{1}{\sin x}=2\sin x$;

в) $2\mathrm{tg}x-3\mathrm{ctg}x=1$.

447. а) $\frac{3}{5\mathrm{tg}x+8}=1$; б) $\frac{\cos x+1}{\cos x-1}=-3$;

в) $1+\mathrm{ctg}x=2\mathrm{tg}x$.

448. а) $\frac{\sin x+\cos x}{\cos x}=0$; б) $\frac{\sin^2 x+\cos 2x}{\cos x}=0$.

449. а) $\frac{1+\cos 2x}{1-\sin x}=0$; б) $\frac{1+\cos x}{\sin x}=0$;

в) $\frac{\sin 2x+\sin 6x}{1-\sin 2x}=0$; г) $\frac{\cos x+\cos 5x}{1-2\sin^2 x}=0$;

д) $\frac{5\sin x+\sin^2 x}{1-\cos x}=0$; е) $\frac{\cos 3x-\cos x}{\sin 3x-\sin x}=0$.

450. а) $\frac{\cos 3x-\cos x}{\sin x}=0$; б) $\frac{\sin 4x+\sin 2x}{1+\sin x}=0$;

в) $\frac{2\cos^2 x-3\cos x-5}{\sin x}=0$; г) $\frac{\sin x+\sin 3x}{\cos x+\cos 3x}=0$.

451. а) $\mathrm{tg}5x-\mathrm{tg}3x=0$; б) $\mathrm{ctg}x+\mathrm{ctg}2x=0$;

в) $\sin x\,\mathrm{ctg}x=0$; г) $\mathrm{tg}x\sin 4x=0$.

452. а) $\mathrm{tg}2x+\mathrm{tg}x=0$; б) $\mathrm{ctg}3x-\mathrm{ctg}x=0$;

в) $\cos x\,\mathrm{tg}x=0$; г) $\mathrm{ctg}x\sin 2x=0$.

Рівень В

453. Розв'яжіть рівняння:

а) $\sin 6x - 2\sin 2x = 0$; б) $1 + \frac{1}{2}\sin 2x = \sin x + \cos x$;

в) $1 - \sin 2x = \sin x - \cos x$; г) $\cos x + \cos 7x = \cos 3x + \cos 9x$.

454. Знайдіть корені рівняння $2\sin 7x\cos 4x - 2\sin 5x\cos 6x = \sin x$, що належать проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

455. Знайдіть суму усіх тих коренів рівняння $4\sin x\cos 2x\cos 3x = \sin 2x$, що належать проміжку $[-\pi; \pi]$.

Розв'яжіть рівняння:

456. а) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$; б) $\sin^3 x + \cos^3 x = \cos 2x$.

457. а) $\sin x - 3\cos x = 2$; б) $2\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} = 1$.

458. а) $\frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{1 + \cos 2x} = 0$; б) $\frac{\sqrt{2}\cos 2x - \sin x - \cos x}{1 + \operatorname{tg} x} = 0$.

459. а) $2\cos x + \cos 5x = 3$; б) $\sin\frac{x}{4}\cos x = 1$; в) $\sin\frac{8\pi^2}{x} = \frac{1}{\cos x}$.

460. Для яких значень a рівняння має корені? Знайдіть ці корені:

а) $8\sin x + 6\cos x = a$; б) $\sin^2 x + 2(a-1)\sin x - 4a = 0$.

Вправи для повторення

461. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x + 3y = 1; \\ 7x - 3y = 17; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 2y = 1; \\ xy = 10. \end{cases}$

462. Розв'яжіть графічно систему рівнянь: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1; \\ y = x^2 - 2x + 1. \end{cases}$

463. Доведіть нерівність:

а) $\frac{a+b}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$, де $a > 0$, $b > 0$; б)* $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$, якщо $a + b = 1$.

464. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = \sqrt{3 - x}$; б) $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{3x+1}$.

465*. Розв'яжіть рівняння:

а) $x^2 + 3x + 4|x - 2| - 8 = 0$; б) $|x^2 - 4| + |x| = 4$.

466. Знайдіть усі значення a, для яких рівняння $x^2 - (a + 1)x + 2a + 2 = 0$ має два різні корені.

467. Від пристані відплив пліт, а через 9 год — моторний човен, який наздогнав пліт на відстані 21 км від пристані. Знайдіть швидкість плоту, якщо вона на 12 км/год менша від швидкості човна.

468. Розчин солі загальною масою 16 кг розлили у дві посудини так, що у другій посудині солі виявилось на 0,4 кг більше, ніж у першій. Якщо у другу посудину додати 0,2 кг солі, то маса солі в ній буде удвічі більшою, ніж маса солі у першій посудині. Знайдіть масу розчину у першій посудині.

§ 16. Системи тригонометричних рівнянь

При розв'язуванні систем тригонометричних рівнянь використовують відомі вже способи розв'язування систем, а саме: спосіб підстановки, спосіб додавання, метод заміни змінних. Розглянемо приклади.

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \sin x + \sin y = \sqrt{2}; \\ x + y = \pi. \end{cases}$

• Виразимо із другого рівняння системи змінну y через змінну x: $y = \pi - x$. Підставивши в перше рівняння замість y вираз $\pi - x$, матимемо:

$$\sin x + \sin(\pi - x) = \sqrt{2}; \quad \sin x + \sin x = \sqrt{2}; \quad \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z.$$

Тоді $y = \pi - x = \pi - (-1)^k \frac{\pi}{4} - \pi k,\ k \in Z.$

Відповідь. $\left((-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k;\ \pi - (-1)^k \frac{\pi}{4} - \pi k\right),\ k \in Z.$ •

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{4}; \\ \cos x \cos y = \frac{3}{4}. \end{cases}$

• Додамо до першого рівняння системи друге рівняння, а до другого — перше, помножене на –1. Матимемо:

$$\begin{cases} \cos x \cos y + \sin x \sin y = 1; \\ \cos x \cos y - \sin x \sin y = \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} \cos(x - y) = 1; \\ \cos(x + y) = \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 2\pi k,\ k \in Z; \\ x + y = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z. \end{cases}$$