§ 17. Тригонометричні нерівності

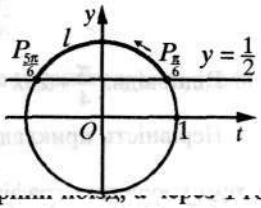
У нерівностях $\sin x > \frac{1}{2}$; $2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \le \sqrt{3}$; $\sin x \cdot \operatorname{tg} x < 0$ змінна стоїть під знаками тригонометричних функцій. Такі нерівності називають *тригонометричними нерівностями.*

Розв'язування тригонометричних нерівностей можна врешті-решт звести до розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей виду $\sin x \ge a$, $\sin x < a$, $\cos x \ge a$, $\operatorname{tg} x \le a$ тощо.

Розв'язуючи найпростіші тригонометричні нерівності, використовують властивості відповідних тригонометричних функцій, а для наочності розв'язання — одиничне коло або графіки тригонометричних функцій. Розглянемо приклади.

Приклад 1. Розв'язати нерівність $\sin x \ge \frac{1}{2}$.

• Оскільки $\sin x$ — це ордината точки одиничного кола, що відповідає куту x, то для розв'язання нерівності знайдемо спочатку на одиничному колі точки, ординати яких не менші від $\frac{1}{2}$. Усі такі точки утворюють дугу l, розташовану над прямою $y = \frac{1}{2}$ (рис. 75). Якщо рухатися по колу проти руху стрілки годинника, то початкова точка дуги l відповідає куту $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, а кінцева — куту $\frac{5\pi}{6}$. Тому точки дуги l відповідають кутам, які можна задати подвійною нерівністю $\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{5\pi}{6}$.



Враховуючи періодичність синуса, одержимо такі розв'язки нерівності $\sin x \ge \frac{1}{2}$:

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi k \le x \le \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z.$$

...ані 140 км від
...якщо вона на

...станції B — пасажирський. Поїзди зустрілися на відс...
...станції A. Знайдіть швидкість пасажирського поїзда, ...
20 км/год більша від швидкості товарного.

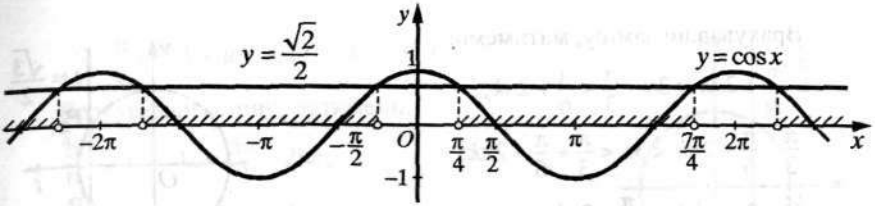


Рис. 77

Приклад 3. Розв'язати нерівність $\operatorname{tg} x \geq -1$.

• Знайдемо спочатку розв'язки даної нерівності на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Враховуючи, що $\operatorname{tg} x$ — це ордината точки лінії тангенсів, що відповідає куту x, позначимо на цій лінії точку, ордината якої дорівнює -1 (рис. 78). Ця точка відповідає куту $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$, а точки лінії тангенсів, ординати яких більші від -1, — кутам від $-\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{2}$. Отже, на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ нерівність $\operatorname{tg} x \geq -1$ виконується для кутів $-\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2}$.

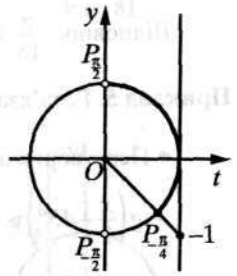


Рис. 78

Врахувавши, що основний період тангенса дорівнює π, одержимо такі розв'язки заданої нерівності:

$$-\frac{\pi}{4} + \pi k \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi k, \ \ k \in Z.$$

Відповідь. $-\frac{\pi}{4} + \pi k \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi k, \ \ k \in Z.$ •

Нерівність $\operatorname{tg} x \geq -1$ можна було б розв'язати, використовуючи графіки функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = -1$.

Приклад 4. Розв'язати нерівність $2\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) > \sqrt{3}$.

• Зробивши заміну $3x - \frac{\pi}{3} = u$, прийдемо до нерівності $\cos u > \frac{\sqrt{3}}{2}$. Розв'язками одержаної нерівності є (див. рис. 79):

$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi k < u < \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \ \ k \in Z.$$

Врахувавши заміну, матимемо:

$$-\frac{\pi}{6}+2\pi k<3x-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{6}+2\pi k;$$

$$\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}+2\pi k<3x<\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}+2\pi k;$$

$$\frac{\pi}{6}+2\pi k<3x<\frac{\pi}{2}+2\pi k;$$

$$\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi k}{3}<x<\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3},\ \ k\in Z.$$

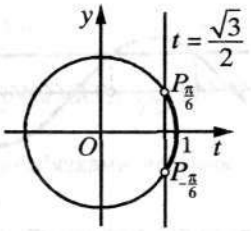


Рис. 79

Відповідь. $\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi k}{3}<x<\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3},\ \ k\in Z.$ ●

Приклад 5. Розв'язати нерівність $\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{x}{2}\right)+\sqrt{3}\ge 0.$

● Перетворимо нерівність так:

$$-\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-45^\circ\right)\ge-\sqrt{3};\ \ \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-45^\circ\right)\le\sqrt{3}.$$

Нехай $\frac{x}{2}-45^\circ=u$, тоді матимемо нерівність $\operatorname{tg}u\le\sqrt{3}$, розв'язками якої є (див. рис. 80):

$$-90^\circ+180^\circ\cdot k<u\le 60^\circ+180^\circ\cdot k,\ \ k\in Z.$$

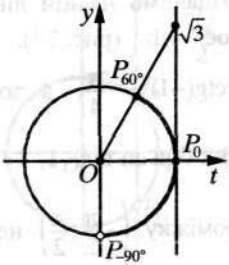


Рис. 80

Врахувавши заміну, матимемо:

$$-90^\circ+180^\circ\cdot k<\frac{x}{2}-45^\circ\le 60^\circ+180^\circ\cdot k;$$

$$45^\circ-90^\circ+180^\circ\cdot k<\frac{x}{2}\le 45^\circ+60^\circ+180^\circ\cdot k;$$

$$-45^\circ+180^\circ\cdot k<\frac{x}{2}\le 105^\circ+180^\circ\cdot k;$$

$$-90^\circ+360^\circ\cdot k<x\le 210^\circ+360^\circ\cdot k,\ \ k\in Z.$$

Відповідь. $-90^\circ+360^\circ\cdot k<x\le 210^\circ+360^\circ\cdot k,\ \ k\in Z.$ ●

Приклад 6. Розв'язати нерівність $\sin^2 2x>\frac{1}{4}.$

● Використавши формулу пониження степеня, матимемо:

$$\frac{1-\cos 4x}{2}>\frac{1}{4};\ \ 1-\cos 4x>\frac{1}{2};\ \ -\cos 4x>-\frac{1}{2};\ \ \cos 4x<\frac{1}{2}.$$

Нехай $4x=u$. Відносно змінної u маємо нерівність $\cos u<\frac{1}{2}$, розв'язками якої є (див. рис. 81):

490. а) $\sin 4x > 0$; б) $\cos\frac{x}{2} \le 0$; в) $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \le 0$.

491. а) $\cos 3x \le 0$; б) $\operatorname{tg}\frac{x}{3} \ge 0$; в) $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) < 0$.

492. а) $\cos^2 x - \sin^2 x \le \frac{1}{2}$; б) $\sin 3x\cos x - \cos 3x\sin x > 0$.

493. а) $2\sin x\cos x \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos 4x\cos x + \sin 4x\sin x < 0$.

Рівень Б

Розв'яжіть нерівність:

494. а) $2\cos 2x - 1 > 0$; б) $\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) > \sqrt{3}$;

в) $\cos\frac{x}{2} < \frac{1}{3}$; г) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}-3x\right) \ge \sqrt{2}$;

д) $\operatorname{tg}\left(\frac{2x}{3}-60^\circ\right) > \sqrt{3}$; е) $\operatorname{ctg} x < 1$.

Вказівка. е) Скористайтесь тотожністю $\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

495. а) $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \le -\frac{1}{2}$; б) $2\cos\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right) > \sqrt{3}$;

в) $2\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \le 1$; г) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$;

д) $2\sin(4x+30^\circ)+1 \ge 0$; е) $\operatorname{ctg} 2x > -1$.

496. а) $\cos^2 x \le \frac{1}{4}$; б) $2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \le 1$.

497. а) $\sin^2 x > \frac{1}{2}$; б) $\cos^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) \ge \frac{3}{4}$.

498. а) $\sin x + \sqrt{3}\cos x < 0$; б) $\sin x - \cos x > 1$.

Вказівка. Введіть допоміжний кут.

499. а) $\sqrt{3}\sin x - \cos x > 0$; б) $\sin x + \cos x < 1$.

Рівень В

500. Розв'яжіть нерівність:

а) $\cos 3x < \sin 3x$; б) $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x < -\sqrt{2}$;

в) $(2\cos x - 1)(2\sin x - 1) \ge 0$; г) $\sin 2x + \sqrt{3}\cos x < 0$;

д) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 < 0$; е) $\cos 2x + \cos x > 0$.

501. Розв'яжіть систему нерівностей:

а) $\begin{cases} \sin x < 0{,}5; \\ \cos x < 0{,}5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2\cos x \le \sqrt{2}; \\ \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\, x > 1. \end{cases}$

502. Знайдіть розв'язки нерівності $\cos x + \sin x < \dfrac{1}{\cos x}$, що належать проміжку $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

503. Розв'яжіть нерівність з параметром: $\cos x < a$.

Вправи для повторення

504. Спростіть вираз:

а) $3\sqrt{8} - 5\sqrt{32} + \sqrt{128}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt{15}-\sqrt{14}} - \dfrac{1}{\sqrt{16}-\sqrt{15}}$.

505. Знайдіть значення виразу $\sqrt{(1-x)^2} - \sqrt{(x-3)^2}$, якщо $x = \sqrt{10}$.

506. Розв'яжіть графічно рівняння $x^3 = 3 - 2x$.

507*. З міст A і B, відстань між якими 225 км, одночасно назустріч один одному виїхали два автомобілі. Після зустрічі автомобіль, що виїхав з міста A, прибув у місто B через 1 год. Знайдіть швидкість автомобіля, що виїхав з міста A, якщо вона на 30 км/год більша від швидкості іншого автомобіля і більша, ніж 60 км/год.

Історична довідка

Обернені тригонометричні функції називають ще аркфункціями. Префікс «арк» походить від латинського слова *arcus*, що в перекладі означає «дуга», «лук». Арксинус числа a можна трактувати як дугу, що спирається на кут, синус якого дорівнює a. Саме цим обумовлена наявність префікса «арк» у назвах обернених тригонометричних функцій.

Позначення arcsin і arctg уперше з'являються в ранніх працях відомого французького математика Ж. Л. Лагранжа (1736 –1813), а з кінця XVIII ст. вони стали загальноприйнятими.

Запитання і вправи для повторення розділу III

1. Яку функцію називають оборотною? Наведіть приклад оборотної функції; необоротної функції.

2. Яку функцію називають оберненою до даної оборотної функції?

3. Оборотна функція задана деякою формулою. Як знайти формулу, що задає функцію, обернену до даної? Покажіть це на прикладі функції $y = 2x - 4$.

5. Сформулюйте властивості оберненої функції, що випливають з властивостей прямої функції.

6. Як розташовані графіки двох взаємно обернених функцій?

7. Які властивості має функція $y = \arcsin x$?

8. Що називають арксинусом числа a?

9. Які властивості має функція $y = \arccos x$?

10. Що називають арккосинусом числа a?

11. Які властивості має функція $y = \operatorname{arctg} x$?

12. Що називають арктангенсом числа a?

13. Які рівняння називають тригонометричними?

14. За якими формулами шукають корені рівнянь: $\sin x = a$; $\cos x = a$; $\operatorname{tg} x = a$?

15. Які основні способи розв'язування тригонометричних рівнянь?

16. Як розв'язують однорідні рівняння першого степеня відносно синуса і косинуса; другого степеня?

17. Як за допомогою одиничного кола розв'язують тригонометричні нерівності? Поясніть це на прикладах нерівностей $\sin x < \frac{1}{2}$, $\cos x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} x \leq 1$.

508. Задайте формулою функцію, обернену до даної, та побудуйте графіки обох функцій в одній системі координат:

а) $y = 0{,}5x - 0{,}5$; б) $y = (x-1)^2$, де $x \geq 1$.

509. Знайдіть значення виразу:

а) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} - \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$; б) $\arcsin(-1) + \operatorname{arctg} 1 + \arccos 0$;

в) $\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; г) $\cos^2\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)\right)$;

д)* $\cos(\arcsin 0,6)$; е)* $\arccos\left(\cos\frac{15\pi}{7}\right)$.

510*. Розв'яжіть рівняння:

а) $\arccos(x^2-8x-10)=\pi$; б) $\arcsin\frac{x}{x-1}=-\frac{\pi}{6}$.

Розв'яжіть рівняння:

511. а) $\sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $2\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)=-\sqrt{3}$;

в) $\operatorname{tg}(0,5x-30^\circ)=-1$; г) $3\operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$.

512. а) $\cos 2x+\sin 4x=0$; б) $1+\cos 2x=\cos x$;

в) $\sin 6x-\sin 4x=0$; г) $\cos 5x-\cos x=0$;

д) $\sin 2x+\sin 4x=\sin 3x$; е) $\cos\frac{x}{2}+\cos\frac{3x}{2}=1+\cos 2x$;

є) $\cos^2 2x+\cos 2x-\sin^2 2x=0$; ж)* $\sin x+2\sin 2x=3+\sin 3x$.

513. а) $\operatorname{tg}^2 2x+4\operatorname{tg}2x+3=0$; б) $1+4\cos x=4\sin^2 x$.

514. Знайдіть найменший додатний корінь рівняння:

а) $4\sin^2 x+3\cos 2x-3\sin x=1$; б) $\cos(\pi-4x)+3\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=-1$.

515. Знайдіть корені рівняння, що належать проміжку $(-\pi;\pi)$:

а) $\sin\frac{3x}{2}+\cos\frac{3x}{2}=1$; б) $\sqrt{3}\sin x-\cos x=-\sqrt{3}$.

Розв'яжіть рівняння:

516. а) $\cos^2 2x+\sin 4x-3\sin^2 2x=0$; б) $5\sin^2 x+3\sin x\cos x-2\cos^2 x=3$.

517. а) $\frac{5\sin^2 x-4\sin x-1}{1-\sin x}=0$; б) $\frac{2\operatorname{tg}^2 x+5\operatorname{tg}x+2}{1+2\operatorname{tg}x}=0$.

518. а) $\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}3x$; б) $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$.

519*. а) $\frac{\sin x}{1+\cos x}=\sin\frac{x}{2}$; б) $\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}=\operatorname{tg}^2 x$;

в) $\operatorname{tg}^2 x=\frac{1-\cos x}{1-\sin x}$.

Розв'яжіть систему рівнянь:

520. а) $\begin{cases}\sin(x+y)=0;\\ \sin(x-y)=0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x-y=\frac{\pi}{2};\\ \cos 2x-\cos 2y=1;\end{cases}$

в) $\begin{cases} \sin x \sin y = 0,25; \\ 3x + 3y = \pi; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2\sin x \cos y + 1 = 2\cos y; \\ 2\sin x = \cos y. \end{cases}$

521. а) $\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{\sqrt{2}}{4}; \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sin^2 x = \cos x \cos y; \\ \cos^2 x = \sin x \sin y. \end{cases}$

522*. а) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}(x+y) = -3; \\ \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg}(x+y) = -6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sin \dfrac{\pi x^2}{2} = 1; \\ |x| + |y| = 2. \end{cases}$

Розв'яжіть нерівність:

523. а) $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; б) $2\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) \geq -\sqrt{2}$;

в) $\operatorname{tg}\left(3x - \dfrac{2\pi}{3}\right) > \dfrac{\sqrt{3}}{3}$; г) $\sin(x - 120°) \leq \dfrac{1}{2}$.

524*. а) $\sqrt{3}\sin x + \cos x < 1$; б) $\cos^2 \dfrac{x}{2} \leq \dfrac{1}{2}$;

в) $\sin x + \cos 2x > 0$; г) $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 \leq 0$;

д) $\dfrac{\cos x}{2\sin x - 1} \geq 0$; е) $\sin^2 x - 4\sin x \cos x - 5\cos^2 x > 0$.

525. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = \sqrt{2\cos 3x + 1}$; б) $y = \sqrt{\sin 2x - \cos 2x}$.

526*. Доведіть, що для будь-якого значення x із проміжку $\left(-\dfrac{\pi}{2}; 0\right)$ виконується нерівність $\sin x + \cos x < \dfrac{1}{\cos x}$.

Завдання для самоперевірки №3

І рівень

1. Яка з рівностей є правильною?

а) $\arcsin \dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{3}$; б) $\arccos \dfrac{1}{2} = -\dfrac{\pi}{3}$;

в) $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$; г) $\arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{6}$.

2. Яке з чисел є значенням виразу $\arcsin 1 + \arccos 0$?

а) 0; б) 1; в) $\frac{\pi}{2}$; г) π.

3. Вкажіть число, яке є коренем рівняння $\sin x = 1$.

а) $\frac{\pi}{2}$; б) π; в) $\frac{\pi}{4}$; г) $-\frac{\pi}{2}$.

4. Скільки коренів має рівняння $\cos x = 3$?

а) Один; б) Два; в) Жодного; г) Безліч.

5. Вкажіть корені рівняння $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$:

а) $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$; б) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$;

в) $(-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$; г) $(-1)^k \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$.

6. Вкажіть корені рівняння $\cos x = \frac{1}{2}$:

а) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$; б) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$;

в) $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$; г) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$.

II рівень

1. Обчисліть:

а) $2\operatorname{arctg}1 - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\arccos\frac{1}{2} + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.

2. Розв'яжіть рівняння:

а) $2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 1 = 0$; б) $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$.

3. Знайдіть найменший додатний корінь рівняння $2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x = 0$.

4. Розв'яжіть нерівність:

а) $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \le \frac{1}{2}$.

5. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} x - y = 2\pi; \\ 3\cos x + \cos y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sin x - \cos y = 0{,}5; \\ \sin x + \cos y = 1{,}5. \end{cases}$

III рівень

1. Обчисліть: $\cos^2\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)+\operatorname{tg}\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$.

2. Розв'яжіть рівняння:

   а) $\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0$; б) $3\sin^2 x-4\sin x\cos x-5\cos^2 x=1$.

3. Знайдіть корені рівняння $\cos 6x-\cos 2x=0$, що належать проміжку $(-\pi;\,0)$.

4. Розв'яжіть нерівність:

   а) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)\geq 1$; б) $\cos^2 x-\cos x<0$.

5. Розв'яжіть систему рівнянь:

   а) $\begin{cases}2x+y=\frac{\pi}{2};\\ \sin 2x+\cos y=\sqrt{2};\end{cases}$ б) $\begin{cases}\sin x\operatorname{tg} y=0;\\ \sin x+\sin y=-1.\end{cases}$

IV рівень

1. Обчисліть:

   а) $\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{5}\right)$; б) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$.

2. Розв'яжіть рівняння:

   а) $2\sin x-4\cos x=\sqrt{5}$; б) $\frac{\sin x\sin 7x-\sin 3x\sin 5x}{\operatorname{tg} x-1}=0$.

3. Знайдіть область визначення функції $y=\sqrt{1-\cos x-2\sin\frac{x}{2}}$.

4. Розв'яжіть систему рівнянь:

   а) $\begin{cases}\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=1;\\ 2\cos x\cos y=\sqrt{2};\end{cases}$ б) $\begin{cases}\sqrt{2}\cos x\sin y=1;\\ \sqrt{2}\cos x\cos y=-1.\end{cases}$

5. Розв'яжіть нерівність: $\arccos\left(2x^2-1\right)\leq\frac{2\pi}{3}$.