§ 18. Степенева функція з натуральним показником

У 7, 8 класах ми розглядали функції $y = x$, $y = x^2$ та $y = x^3$, які кожному числу ставлять у відповідність перший, другий та третій степені цього числа. Ці функції, а також функції $y = x^4$, $y = x^5$, ..., називають степеневими функціями з натуральним показником.

Означення **Функцію, задану формулою $y = x^n$, де n — деяке натуральне число, а x — змінна, називають степеневою функцією з натуральним показником.**

Графіком функції $y = x$ є, як відомо, пряма, а графіками функцій $y = x^2$ та $y = x^3$ — парабола та кубічна парабола. Взагалі, якщо $n \geq 2$, то графік функції $y = x^n$ називають *параболою n-го степеня* або просто *параболою* $y = x^n$.

На рисунку 83 зображено параболи $y = x^2$ та $y = x^4$, а на рисунку 84 — параболи $y = x^3$ та $y = x^5$.

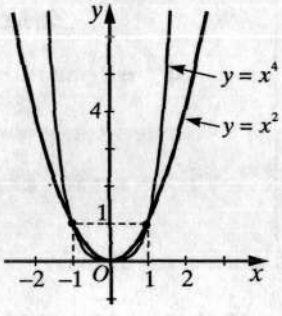


Рис. 83

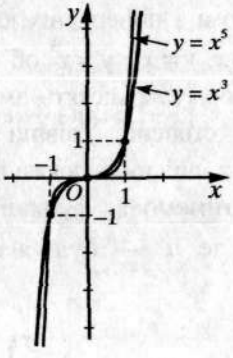
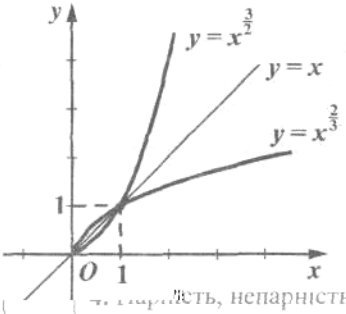


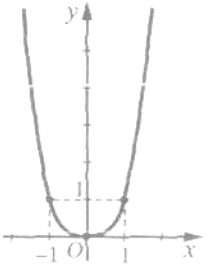
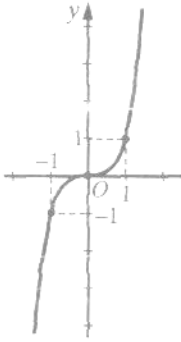
Рис. 84

Якщо число n парне, то властивості функції $y = x^n$ аналогічні до властивостей функції $y = x^2$; якщо ж число n непарне і $n \geq 3$, — до властивостей функції $y = x^3$.

...ши поняття
м показником, ми
функції виду
– будь-яке дійсне

степеня з дійсни
розглядатимемо
$y = x^{\alpha}$, де α –
число.



4. Парність, непарність	Парна	Непарна
5. Графік функції проходить через точки	(0; 0), (1; 1), (–1; 1)	(0; 0), (1; 1), (–1;
6. Графік функції розташований	у I і II координатних чвертях (у верхній півплощині)	у I і III координ них чвертях
7. Графік функції	 Рис. 85	 Рис. 86

Якщо число n парне, то функція $y = x^n$ є парною; якщо ж число n непарне, то й функція $y = x^n$ є непарною. Тому парабола $y = x^n$, де n — па симетрична відносно осі y, а парабола $y = x^n$, де n — непарне, симетр відносно початку координат.

Для тих, хто хоче знати більше

Зазначені властивості функції $y = x^n$ можна строго обґрунтувати.

Доведемо, наприклад, що функція $y = x^n$ є зростаючою, якщо n — непари натуральне число.

Нехай x_1 та x_2 — два довільні значення аргументу, до того ж, $x_2 > x_1$, а y_1 та y_2 — відповідні їм значення функції, тобто $y_1 = x_1^n$, $y_2 = x_2^n$. Потрібно показати, що $y_2 > y_1$.

Якщо $x_2 > x_1 \geq 0$, то обидві частини нерівності $x_2 > x_1$ невід'ємні, а тому за властивістю числових нерівностей $x_2^n > x_1^n$, тобто $y_2 > y_1$.

Якщо $x_2 \geq 0$, а $x_1 < 0$, то $y_2 = x_2^n \geq 0$, а $y_1 = x_1^n < 0$ — як непарний степінь від'ємного числа. Оскільки $y_2 \geq 0$, а $y_1 < 0$, то $y_2 > y_1$.

Якщо $x_2 > x_1$ і обидва числа x_1 та x_2 від'ємні, то правильною є нерівність $-x_2 < -x_1$, обидві частини якої додатні. Тоді $(-x_2)^n < (-x_1)^n$. Оскільки n — непарне число, то $(-x_2)^n = -x_2^n$, $(-x_1)^n = -x_1^n$. Отже, $-x_2^n < -x_1^n$, звідки $x_2^n > x_1^n$, тобто $y_2 > y_1$.

В усіх можливих випадках $y_2 > y_1$. Отже, якщо число n непарне, то функція $y = x^n$ є зростаючою.

Приклади розв'язання вправ

Приклад 1. Порівняти числа:

а) $2,7^6$ і $2,4^6$; **б)** $(-7)^8$ і $(-8)^8$ **в)** $4,5^9$ і $4,8^9$; **г)** $(-6)^9$ і $(-4)^9$.

● **а)** Функція $y = x^6$ зростає на проміжку $[0; +\infty)$. Оскільки числа 2,7 і 2,4 належать цьому проміжку і $2,7 > 2,4$, то $2,7^6 > 2,4^6$.

б) Функція $y = x^8$ спадає на проміжку $(-\infty; 0]$. Оскільки числа -7 і -8 належать цьому проміжку і $-7 > -8$, то $(-7)^8 < (-8)^8$.

Функція $y = x^9$ є зростаючою; **в)** оскільки $4,5 < 4,8$, то $4,5^9 < 4,8^9$; **г)** оскільки $-6 < -4$, то $(-6)^9 < (-4)^9$. ●

Приклад 2. Довести:

а) якщо $x > 1$, то $1 < x < x^2 < x^3 < x^4 < \ldots$;

б) якщо $0 < x < 1$, то $\ldots < x^4 < x^3 < x^2 < x < 1$.

● **а)** Якщо $x > 1$, то, помноживши обидві частини цієї нерівності на число x (воно додатне), одержимо правильну нерівність $x^2 > x$ або $x < x^2$. Помноживши обидві частини нерівності $x < x^2$ знову на x, одержимо правильну нерівність $x^2 < x^3$. Далі одержуємо: $x^3 < x^4$, $x^4 < x^5$ і т. д. Отже, якщо $x > 1$, то $1 < x < x^2 < x^3 < x^4 < \ldots$.

б) Якщо $0 < x < 1$, то, помноживши обидві частини нерівності $x < 1$ на додатне число x, одержимо правильну нерівність $x^2 < x$. Далі можна одержати правильні нерівності $x^3 < x^2$, $x^4 < x^3$ і т. д. Отже, якщо $0 < x < 1$, то $\ldots < x^4 < x^3 < x^2 < x < 1$. ●

Зауваження. Нехай маємо дві степеневі функції з натуральними показниками: $y = x^n$ і $y = x^m$, де $n > m$. Із прикладу 2 випливає:

якщо $x > 1$, то $x^n > x^m$; якщо $0 < x < 1$, то $x^n < x^m$.

Отже, якщо $n > m$, то на проміжку $(1; +\infty)$ графік функції $y = x^n$ розташований вище від графіка функції $y = x^m$, а на проміжку $(0; 1)$ — нижче від цього графіка. Зокрема, графік функції $y = x^4$ проміжку $(1; +\infty)$ розташований вище від графіка функції $y = x^2$ (див. рис. 83), а на проміжку $(0; 1)$ — нижче від цього графіка.

Усно

527. Дано функції:

а) $y = x^2$; **б)** $y = x^3$; **в)** $y = x^6$; **г)** $y = x^9$.

Вкажіть проміжки, на яких кожна з даних функцій зростає; спадає. Яка з даних функцій є зростаючою? Яка з них є парною; непарною? Яка область значень кожної з даних функцій?

528. Використовуючи графіки функцій $y = x^4$ і $y = x^5$ (рис. 83 і 84), вкажіть кількість коренів рівняння:

а) $x^4 = 1$; **б)** $x^4 = 0$; **в)** $x^4 = -2$;

г) $x^5 = 1$; **д)** $x^5 = 0$; **е)** $x^5 = -1$.

Рівень А

529. Дано функцію $y = x^5$.

а) Яка область визначення даної функції; область значень?

ьому проміжку і $2{,}7 > 2{,}4$, то $2{,}7^5 > 2{,}4^5$.

нкція $y = x^8$ спадає на проміжку $(-\infty; 0]$. Оскільки числа -7 і -8 на-
му проміжку і $-7 > -8$, то $(-7)^8 < (-8)^8$.

ція $y = x^9$ є зростаючою; **в)** оскільки $4{,}5 < 4{,}8$, то $4{,}5^9 < 4{,}8^9$;
$-6 < -4$, то $(-6)^9 < (-4)^9$. ●

. Довести:

до $x > 1$, то $1 < x < x^2 < x^3 < x^4 < \ldots$;

до $0 < x < 1$, то $\ldots < x^4 < x^3 < x^2 < x < 1$.

якщо $x > 1$, то, помноживши обидві частини цієї нерівності на чи-
додатне), одержимо правильну нерівність $x^2 > x$ або $x < x^2$. По-
обидві частини нерівності $x < x^2$ знову на x, одержимо правиль-
ть $x^2 < x^3$. Далі одержуємо: $x^3 < x^4$, $x^4 < x^5$ і т. д. Отже, якщо
$< x < x^2 < x^3 < x^4 < \ldots$.

що $0 < x < 1$, то, помноживши обидві частини нерівності $x < 1$ на
сло x, одержимо правильну нерівність $x^2 < x$. Далі можна одер-