545. Спростіть вираз:

а) $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$; б) $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\sqrt{4y}$.

546. Розв'яжіть рівняння:

а) $x^2=6$; б) $x^2=0$; в) $x^2=-6$.

547. Доведіть, що:

а) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$; б) $\sqrt{14+\sqrt{24}-\sqrt{72}-\sqrt{108}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}-3$.

548. У глядацькому залі є 480 місць. Якщо кількість місць кожного ряду збільшити на 6, а кількість рядів зменшити на 4, то загальна кількість місць не зміниться. Знайдіть кількість рядів у залі.

§ 19. Корінь n-го степеня

1. Розглянемо задачу: знайти ребро куба, об'єм якого дорівнює 8 см^3.

Нехай ребро куба дорівнює x см. Тоді його об'єм — x^3 см^3, що за умовою задачі дорівнює 8 см^3. Отже, $x^3=8$. Щоб розв'язати задачу, потрібно знайти число, куб якого дорівнює 8. Оскільки функція $y=x^3$ є зростаючою, то значення $y=8$ вона набуває при єдиному значенні x, а саме — $x=2$ (див. рис. 87). Отже, ребро куба дорівнює 2 см.

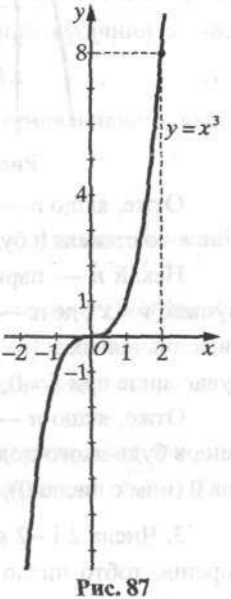

Рис. 87

Розв'язуючи задачу, ми знайшли число 2, куб якого дорівнює 8. Це число 2 називають *кубічним коренем*, або *коренем 3-го степеня* з числа 8.

Нехай n — натуральне число, до того ж, $n\geq 2$.

Означення **Коренем *n*-го степеня з числа *a* називають таке число, *n*-й степінь якого дорівнює *a*.**

Так, коренем 3-го степеня (кубічним коренем) з числа 125 є число 5, бо $5^3=125$; кубічним коренем з числа -8 є число -2, бо $(-2)^3=-8$.

Коренями 4-го степеня з числа 16 є числа 2 і -2, бо $2^4=16$ і $(-2)^4=16$. Коренів 4-го степеня з числа -16 не існує, бо четвертий степінь будь-якого числа є невід'ємним числом і не може дорівнювати -16.

Корінь 2-го степеня з числа a — це квадратний корінь з цього числа. Квадратними коренями з числа 9, як ми знаємо, є два числа: 3 і –3.

2. Кількість коренів n-го степеня з числа a залежить від самого числа a і парності числа n.

Нехай n — непарне натуральне число. На рисунку 88 зображено графік функції $y = x^n$, де n — непарне. Яке б не було число a, існує єдине число x_0, при якому значення функції дорівнює a, тобто $x_0^n = a$. Це число x_0 за означенням і є коренем n-го степеня з числа a.

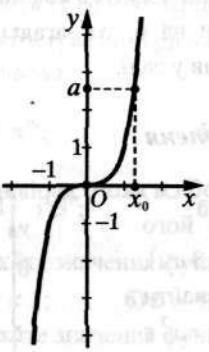

Рис. 88

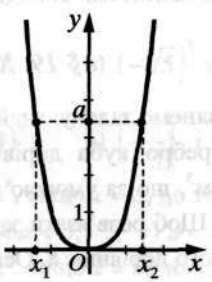

Рис. 89

Отже, якщо n — непарне натуральне число ($n > 1$), то існує єдиний корінь n-го степеня з будь-якого числа a.

Нехай n — парне натуральне число. На рисунку 89 зображено графік функції $y = x^n$, де n — парне. Якщо $a > 0$, то значення a функція набуває при двох значеннях x (на рисунку це $x = x_1$ та $x = x_2$), значення $a = 0$ функція набуває лише при $x = 0$, а значень $a < 0$ функція не набуває.

Отже, якщо n — парне натуральне число, то існує два корені n-го степеня з будь-якого додатного числа a, існує єдиний корінь n-го степеня з числа 0 (ним є число 0), коренів n-го степеня з від'ємних чисел не існує.

3. Числа 2 і –2 є коренями 4-го степеня з числа 16. Невід'ємний із цих коренів, тобто число 2, називають *арифметичним коренем 4-го степеня* з числа 16.

Означення	**Арифметичним коренем n-го степеня з невід'ємного числа a називають таке невід'ємне число, n-й степінь якого дорівнює a.**

Арифметичний корінь n-го степеня з числа a позначають $\sqrt[n]{a}$ і читають: корінь n-го степеня з a. Якщо $n = 2$, то матимемо арифметичний квадратний корінь з числа a, який позначають $\sqrt{a}$.

Отже, $\sqrt[4]{16} = 2$, бо число 2 невід'ємне і $2^4 = 16$;

$\sqrt[8]{1} = 1$, бо $1 \geq 0$ і $1^8 = 1$;

$\sqrt[5]{32} = 2$, бо $2 \geq 0$ і $2^5 = 32$;

$\sqrt[6]{0} = 0$, бо $0 \geq 0$ і $0^6 = 0$.

Для *арифметичного* кореня n-го степеня ***рівність***

$$\sqrt[n]{a} = b$$

є правильною, якщо виконуються дві умови: 1) $b \geq 0$; 2) $b^n = a$.

Увага! Якщо число n непарне, то запис $\sqrt[n]{a}$ поширюють і на випадок $a < 0$. При цьому через $\sqrt[n]{a}$ позначають корінь n-го степеня з числа a, але цей корінь не є арифметичним. Так, $\sqrt[3]{-8}$ — це корінь кубічний з -8, $\sqrt[5]{-1}$ — це корінь 5-го степеня з -1; $\sqrt[3]{-8} = a$.

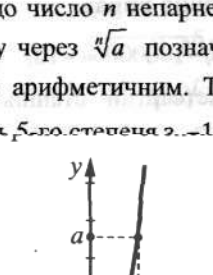

Рис. 88

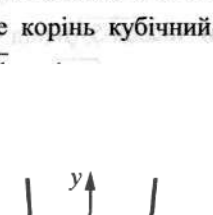

Рис. 89

Отже, якщо n — непарне натуральне число ($n > 1$), то існує єдиний ко рінь n-го степеня з будь-якого числа a.

Нехай n — парне натуральне число. На рисунку 89 зображено графі функції $y = x^n$, де n — парне. Якщо $a > 0$, то значення a функція набуває пр двох значеннях x (на рисунку це $x = x_1$ та $x = x_2$), значення $a = 0$ функція на буває лише при $x = 0$, а значень $a < 0$ функція не набуває.

Отже, якщо n — парне натуральне число, то існує два корені n-го сте пеня з будь-якого додатного числа a, існує єдиний корінь n-го степеня з чи сла 0 (ним є число 0), коренів n-го степеня з від'ємних чисел не існує.

3. Числа 2 і -2 є коренями 4-го степеня з числа 16. Невід'ємний із ци

Рівень Б

Розв'яжіть рівняння:

• $\sqrt[3]{0,001}\cdot\sqrt[3]{-128}-\sqrt{0,03\cdot 27}=0,1\cdot(-2)-\sqrt{0,81}=-0,2-0,9=-1,1.$ •

Приклад 3. Для яких значень x має зміст вираз: **а)** $\sqrt[4]{8-2x}$; **б)** $\sqrt[5]{2x+3}$?

• **а)** Вираз $\sqrt[4]{8-2x}$ має зміст, якщо $8-2x\geq 0$. Розв'язавши цю нерівність, одержимо: $x\leq 4$.

Відповідь. $x\leq 4$.

б) Корінь непарного степеня існує з будь-якого числа. Тому вираз $\sqrt[5]{x+3}$ має зміст для будь-якого значення x. •

Усно

9. Знайдіть усі корені:

а) 3-го степеня з чисел 27; 1; 0; –27;

б) 4-го степеня з чисел 81; 1; 0.

573. Розв'яжіть рівняння:

а) $\sin x = \sqrt{3}\cos x$; б) $\sin^2 x + \cos 2x = \sin x - 1$.

574. Перший член арифметичної прогресії дорівнює –8, а сума перших десяти членів дорівнює 55. Чи є число 22 членом цієї прогресії?

575. Автомобіль проїхав шлях від міста A до міста B за деякий час. Якби він збільшив швидкість на 20 км/год, то їхав би від A до B на 1,5 год менше, а якби зменшив швидкість на 20 км/год, — на 3 год більше. Знайдіть відстань між містами.

§ 20. Властивості арифметичних коренів n-го степеня

Властивості арифметичних коренів n-го степеня виражають наступні

563. а) $x^4 = 81$; б) $x^6 = -64$; в) $x^5 = 32$; г) $x^3 = -125$.

564. а) $x^6 = 0$; б) $x^4 = 625$; в) $x^3 = 27$; г) $x^5 = -1$.

Знайдіть значення виразу:

565. а) $\sqrt[6]{729} - \sqrt[3]{-125000}$; б) $0{,}6\sqrt[3]{1024} + \sqrt[4]{5{,}0625}$;

в) $\sqrt[5]{3200000} \cdot \sqrt[3]{-0{,}001}$; г) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} - \sqrt{5\frac{4}{9}}$.

566. а) $\sqrt[3]{27000} + \sqrt[5]{-3125}$; б) $\sqrt[7]{-128} \cdot \sqrt[9]{-1} \cdot \sqrt[3]{3{,}375}$;

в) $\sqrt[6]{49 \cdot 49 \cdot 49} - \sqrt[4]{810000}$; г) $\sqrt[3]{\frac{27}{125}} + \sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$.

Для яких значень x має зміст вираз:

567. а) $\sqrt[4]{x^2 - 2x - 8}$; б) $\sqrt[8]{5 - 4x - x^2}$; в) $\sqrt[4]{x-1} - \sqrt{7-2x}$?

568. а) $\sqrt[6]{x^2 + x - 6}$; б) $\sqrt[4]{10 + 3x - x^2}$; в) $\sqrt{x+2} + \sqrt[6]{2x-8}$?

Рівень В

569. Знайдіть усі значення x, для яких має зміст вираз:

а) $\sqrt{3x^2 + 2x - 1} + \sqrt[4]{12 - 8x}$; б) $\frac{\sqrt[4]{12-x} - \sqrt[4]{x^2-4}}{\sqrt[3]{x^2 - 5x}}$;

в) $\sqrt[6]{4 - |x|} + \sqrt[6]{|x| - 1}$; г) $\sqrt[8]{1 - 2\cos x} + \sqrt[3]{\operatorname{ctg} x}$.

570. Доведіть, що:

а) $\sqrt[4]{97 - 56\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$; б) $\sqrt[4]{161 - 72\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 2$.

571. [illegible]

n-го степеня зі знаменника.)

Наприклад, $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}} = \frac{2}{3}$; $\frac{\sqrt[3]{56}}{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[3]{\frac{56}{7}} = \sqrt[3]{8} = 2$.