644. Розв'яжіть графічно систему рівнянь: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2; \\ y = \sqrt{x}. \end{cases}$

645. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} x - 2y = 3; \\ xy = 5; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \frac{x}{y} + x + y = 5; \\ \frac{x}{y} \cdot (x + y) = 6. \end{cases}$

646. По колу завдовжки 60 м рівномірно в одному напрямі рухаються дві точки. Перша точка здійснює повний оберт на 5 с швидше, ніж друга, і при цьому наздоганяє другу точку через кожну хвилину. Знайдіть швидкості точок.

§ 22. Ірраціональні рівняння

Рівняння $\sqrt{x+3} = x+1$, $\sqrt[3]{3x-3} = 2$, $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2} = 1$ містять змінну *під знаком кореня. Такі рівняння називають ірраціональними рівняннями.*

1. Рівняння виду $\sqrt[n]{f(x)} = a$. Розглянемо спочатку рівняння

$$\sqrt[n]{x} = a, \qquad (1)$$

де a — деяке число. Оскільки запис $\sqrt[n]{x}$ може означати як арифметичний *корінь n-го степеня* з числа x, так і не арифметичний корінь (якщо $x < 0$ і n — непарне), то розглянемо два випадки.

1) n — парне число. Якщо n парне, то запис $\sqrt[n]{x}$ означає лише арифметичний корінь n-го степеня з числа x, тому за означенням такого кореня рівність $\sqrt[n]{x} = a$ буде правильною лише коли $a \geq 0$ і $a^n = x$. Отже, якщо $a \geq 0$, то рівняння (1) має єдиний корінь $x = a^n$; якщо ж $a < 0$, то рівняння (1) коренів не має.

Наприклад, рівняння $\sqrt[4]{x} = 2$ має єдиний корінь $x = 2^4 = 16$; рівняння $\sqrt[4]{x} = -2$ коренів не має.

2) n — непарне число. Тоді $\sqrt[n]{x}$ — корінь n-го степеня з числа x (не обов'язково арифметичний), який може дорівнювати як невід'ємному, так і від'ємному числу. За означенням кореня n-го степеня рівність $\sqrt[n]{x} = a$ буде

правильною лише коли $a^n = x$. Отже, у даному випадку для будь-якого значення a рівняння (1) має єдиний корінь $x = a^n$.

Наприклад, рівняння $\sqrt[3]{x} = -3$ має єдиний корінь $x = (-3)^3 = -27$.

Якщо міркування, використані під час розв'язування рівняння (1), застосувати до рівняння

$$\sqrt[n]{f(x)} = a, \qquad (2)$$

то прийдемо до таких тверджень окремо для парних і непарних значень n.

1) n — *парне число.*

Якщо $a \geq 0$, *то рівняння* (2) *рівносильне рівнянню* $f(x) = a^n$; *якщо ж* $a < 0$, *то рівняння* (2) *коренів не має.*

2) n — *непарне число.*

Для будь-якого числа a *рівняння* (2) *рівносильне рівнянню* $f(x) = a^n$.

Розглянемо приклади:

$\sqrt{5x+1} = 3$; $5x+1 = 3^2$; $5x = 8$; $x = 1{,}6$;

$\sqrt[4]{2-x} = -3$ — рівняння коренів не має;

$\sqrt[5]{3x-2} = -2$; $3x-2 = (-2)^5$; $3x = -32+2$; $3x = -30$; $x = -10$.

2. Розв'язування ірраціональних рівнянь шляхом піднесення обох частин рівняння до одного й того ж степеня.

Піднесення обох частин деякого ірраціонального рівняння до певного степеня дозволяє перейти до простішого рівняння, що не містить виразів з коренями. При цьому коренями нового рівняння є всі корені даного ірраціонального рівняння. Це випливає з такого твердження: Якщо обидві частини правильної числової рівності $a = b$ піднести до n-го степеня, то одержимо правильну числову рівність $a^n = b^n$. Проте з рівності $a^n = b^n$ при парному n не випливає рівність $a = b$. Наприклад, $1^2 = (-1)^2$ — правильна числова рівність, а $1 = -1$ — неправильна. Тому після піднесення обох частин ірраціонального рівняння до парного степеня можна одержати рівняння, деякі корені якого не є коренями ірраціонального рівняння. Ці корені називають *сторонніми коренями*. Їх відкидають за допомогою перевірки. Розглянемо приклади.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+3} = x+1$.

• Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата:

$$x+3 = x^2+2x+1; \quad x^2+x-2 = 0; \quad x_1 = -2; \quad x_2 = 1.$$

Перевірка. 1) $x_1 = -2$. Підставивши значення x_1 у ліву частину рівняння, матимемо: $\sqrt{-2+3} = \sqrt{1} = 1$. Значення правої частини: $-2 + 1 = -1$. Значення обох частин рівняння різні, тому $x_1 = -2$ — сторонній корінь.

2) $x_2 = 1$. Значення лівої частини: $\sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$; значення правої частини: $1 + 1 = 2$. Значення обох частин рівняння однакові, тому $x_2 = 1$ — корінь рівняння.

Відповідь. 1. ●

Теорема 2. Розв'язати рівняння парних і непарних значень n.

— парне число.

о $a \geq 0$, то рівняння (2) *рівносильне рівнянню* $f(x) = a^n$; *якщо ж рівняння* (2) *коренів не має.*

— непарне число.

будь-якого числа a рівняння (2) *рівносильне рівнянню* $f(x) = a^n$.

лянемо приклади:

$\sqrt{+1} = 3$; $5x+1 = 3^2$; $5x = 8$; $x = 1{,}6$;

$\sqrt{x} = -3$ — рівняння коренів не має;

$\sqrt[3]{-2} = -2$; $3x - 2 = (-2)^5$; $3x = -32 + 2$; $3x = -30$; $x = -10$.

зв'язування ірраціональних рівнянь шляхом піднесення обох вняння до одного й того ж степеня.

есення обох частин деякого ірраціонального рівняння до певного озволяє перейти до простішого рівняння, що не містить виразів з При цьому коренями нового рівняння є всі корені даного ірраціорівняння. Це випливає з такого твердження: Якщо обидві частини ої числової рівності $a = b$ піднести до n-го степеня, то одержимо числову рівність $a^n = b^n$. Проте з рівності $a^n = b^n$ при па-

$2y^2 - y - 6 = 0$, коренями якого є $y_1 = -1{,}5$; $y_2 = 2$.

Врахувавши заміну, матимемо:

1) $\sqrt[4]{x-3} = -1{,}5$ — рівняння коренів не має;

2) $\sqrt[4]{x-3} = 2$; $x - 3 = 2^4$; $x - 3 = 16$; $x = 19$.

Відповідь. 19. ●

Приклад 4. Розв'язати рівняння $x^2+3x-\sqrt{x^2+3x}-2=0$.

• Нехай $\sqrt{x^2+3x}=y$ $(y\geq 0)$. Тоді $x^2+3x=y^2$. Матимемо рівняння $y^2-y-2=0$, коренями якого є $y_1=-1$; $y_2=2$. Лише другий корінь задовольняє нерівність $y\geq 0$. Тому, врахувавши заміну, матимемо:

$$\sqrt{x^2+3x}=2;\ x^2+3x=4;\ x^2+3x-4=0;\ x_1=-4;\ x_2=1.$$

Відповідь. –4; 1. •

4. Системи ірраціональних рівнянь.

Розглянемо приклади розв'язання систем, що містять ірраціональні рівняння.

Приклад 5. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases}\sqrt{x+1}-\sqrt{y-2}=1;\\ 2x-y=10.\end{cases}$

• *1-й спосіб.* Розв'яжемо систему рівнянь способом підстановки. Із другого рівняння маємо: $y=2x-10$. Підставимо у перше рівняння системи за-

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-5}=1$.

• Перенесемо вираз $\sqrt{2x-5}$ у праву частину рівняння і піднесемо об
дві частини одержаного рівняння $\sqrt{x+1}=1+\sqrt{2x-5}$ до квадрата:

$$x+1=1+2\sqrt{2x-5}+2x-5.$$

Запишемо рівняння у такому вигляді, щоб у лівій частині був лише
раз, що містить знак кореня:

$$-2\sqrt{2x-5}=x-5.$$

Знову піднесемо обидві частини рівняння до квадрата:

$$4(2x-5)=x^2-10x+25;\quad x^2-18x+45=0;\quad x_1=3;\ x_2=15.$$

Перевірка. 1) $x_1=3$. $\sqrt{3+1}-\sqrt{2\cdot 3-5}=2-1=1$. Значення лівої части
дорівнює правій частині, тому $x_1=3$ — корінь рівняння.

2) $x_2=15$. $\sqrt{15+1}-\sqrt{2\cdot 15-5}=4-5=-1$; $-1\neq 1$. $x_2=15$ — сторон
корінь.

Відповідь. 3. •

3. Розв'язування ірраціональних рівнянь методом заміни змінних

Розглянемо приклади.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $2\sqrt{x-3}-\sqrt[4]{x-3}=6$.

• Нехай $\sqrt[4]{x-3}=y$. Тоді $\sqrt{x-3}=\left(\sqrt[4]{x-3}\right)^2=y^2$. Матимемо рівня

$2(v+1)^2-v^2=14$; v^2+4v-

Значення $v_1=-6$ не задовол

$2=0$; $v_1=-6$, $v_2=2$.

ьняє нерівність $v\geq 0$. Отже, $v=2$, $u=v+1=$

– 3. Врахувавши заміну, матимем

в) $\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}=\sqrt{2x+8}$;

г) $\sqrt{x+2}=\sqrt{5-4x}-\sqrt{3-x}$.

657. а) $\sqrt{x+5}-\sqrt{5-x}=2$;

б) $2\sqrt{3-x}+\sqrt{2x}=4$;

в) $\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+1}=\sqrt{3x+12}$;

г) $\sqrt{7x+2}-\sqrt{3x+1}=\sqrt{x}$.

658. а) $\sqrt{15-\sqrt[3]{x}}=4$;

б) $\sqrt[3]{3+\sqrt{x-2}}=2$.

659. а) $\sqrt{4+\sqrt[3]{x-1}}=1$;

б) $\sqrt[3]{37-\sqrt{2x}}=3$.

Одна із того, що числова рівність

що рівність (4') обов'язково є пра-

$1+\sqrt[3]{x_0-1}=1$). Отже, розв'язуючи

але можемо одержати сторонні ко-

є правильною. Отже, $x=x_0$ є коренем рівняння (5),

(5') є правильною для деякого x_0 ще не випливає,

вильною (це буде за додаткової умови, що $\sqrt[3]{2x_0-}$

рівняння 2-м способом, ми не втрачаємо коренів,

рені.