

§ 26. Показникова функція та її властивості

Розглянемо функцію $y = a^x$, де a — деяке число. Щоб ця функція була визначена на множині всіх дійсних чисел, необхідно, щоб число a було додатним, бо степінь a^x за довільного дійсного показника x визначений лише для $a > 0$. Серед додатних значень a значення $a = 1$ є особливим, воно дас тривіальну функцію $y = 1^x$, яка набуває лише одного значення — 1. Тому розглядатимемо функцію $y = a^x$ за наступних обмежень на основу: $a > 0$, $a \neq 1$. Таку функцію називають *показниковою*.

Означення Функцію, задану формулою $y = a^x$, де a — деяке додатне число, відмінне від 1, а x — змінна, називають *показниковою функцією*.

Число a ($a > 0$, $a \neq 1$) називають *основою* показникової функції.

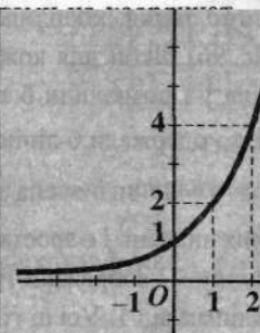
Наприклад, $y = 5^x$, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = 0,7^x$ — показникові функції з основами 5, $\frac{1}{3}$ і 0,7.

Побудуємо графік функції $y = 2^x$. Складемо таблицю значень функції для декількох значень аргументу:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

Позначимо точки, координати яких подані у таблиці, на координатній площині (рис. 96). Якби для кожного дійсного значення x обчислили відповідне значення y даному розділі, усе навпаки: фіксують основу степеня a , а показник степеня x є незалежною змінною.

3 x



Властивості показникової функції $y = a^x$.

1. Областю визначення функції є множина всіх дійсних чисел:

$$D(y) = (-\infty; \infty).$$

2. Областю значень функції є множина всіх додатних дійсних чисел:

$$E(y) = (0; \infty).$$

3. Якщо $a > 1$, то функція є зростаючою; якщо $0 < a < 1$ — спадною.

4. Якщо $x = 0$, то $y = 1$.

Якщо $a > 1$, то при $x > 0$ функція набуває значень, більших від 1, а при $x < 0$ — значень, менших від 1.

Якщо $0 < a < 1$, то при $x > 0$ функція набуває значень, менших від 1, а при $x < 0$ — значень, більших від 1.

Графік показникової функції називають *експонентою* (див. рис. 99 і 100). Будь-яка експонента розташована у верхній півплощині і проходить через точку $(0; 1)$.

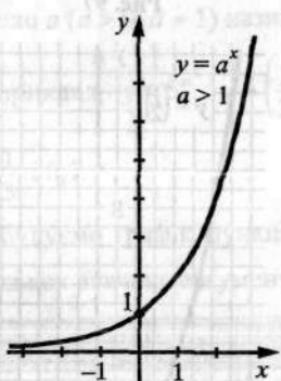


Рис. 99

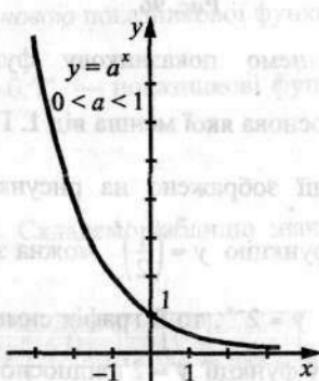


Рис. 100

Приклади розв'язання вправ

Приклад 1. Порівняти числа:

a) $1,5^{-2}$ і $1,5^{-3}$; б) $0,7^{1,6}$ і $0,7^{1,5}$; в) $0,8^{0,3}$ і 1.

• а) Функція $y = 1,5^x$ є зростаючою. Оскільки $-2 > -3$, то $1,5^{-2} > 1,5^{-3}$.

б) Функція $y = 0,7^x$ є спадною. Оскільки $1,6 > 1,5$, то $0,7^{1,6} < 0,7^{1,5}$.

в) Запишемо число 1 у вигляді степеня з основою 0,8: $1 = 0,8^0$. Оскільки функція $y = 0,8^x$ є спадною і $0,3 > 0$, то $0,8^{0,3} < 0,8^0$, тобто $0,8^{0,3} < 1$.

Усно

787. Сформулюйте властивості функцій:

a) $y = 3^x$;

б) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot R, (0, +\infty);$ спадна

788. Яка з даних показниковых функцій є зростаючою; спадною?

a) $y = 1,6^x;$

зрост.

б) $y = 0,9^x;$

спадн.

в) $y = (\sqrt{2})^x;$

зрост.

г) $y = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^x.$

спадна

789. Чи існує значення x , для якого виконується рівність:

а) $2^x = -2;$

ні

б) $3^x = \frac{1}{3};$

ТАК

в) $10^x = 5;$

так

г) $4^x = 1 - \sqrt{2}?$

ні

Рівень А

Побудуйте графік функції та запишіть її властивості:

790. а) $y = 2,5^x;$

б) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x.$

791. а) $y = 3^x; R,$ зрост.

б) $y = 0,6^x.$

Порівняйте числа:

792. а) $7^{8,5}$ і $7^9;$

б) $\left(\frac{1}{7}\right)^8$ і $\left(\frac{1}{7}\right)^9;$

в) 3^{-5} і $3^{-3};$

г) $0,3^{-10}$ і $0,3^{-15};$

д) $3^{-7,5}$ і 1;

е) $0,6^{-5}$ і 1;

ж) $1,5^{0,6}$ і 1;

ж) $\left(\frac{2}{3}\right)^8$ і 1.

793. а) $3,5^6$ і $3,5^{6,1};$

б) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-4}$ і $\left(\frac{1}{5}\right)^{-6};$

в) $0,7^{10}$ і 1;

г) $1,1^{-2}$ і 1.

Рівень Б

794. Використовуючи графік функції $y = 3^x$, побудуйте графіки функцій:

а) $y = 3^x - 1;$

б) $y = 3^{x+2};$

в) $y = -3^x;$

г) $y = \frac{1}{2} \cdot 3^x.$

Вкажіть область значень кожної функції.

795. Використовуючи графік функції $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, побудуйте графіки функцій:

а) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1;$

б) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1};$

в) $y = -2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x.$

Розв'яжіть графічно рівняння:

796. а) $4^x = 1 - 2x;$

б) $2^{-x} - x = 3.$

797. а) $3^x = 4 - x$;

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x - 1 = x$.

798. Розмістіть у порядку зростання: $6^{1.5}$; $6^{\frac{4}{3}}$; $\left(\frac{1}{6}\right)^{-2}$; $6^{\sqrt{2}}$.

799. Розмістіть у порядку спадання: $10^{0.6}$; $0.1^{-0.7}$; 1; $10^{\frac{4}{5}}$.

Порівняйте значення виразів:

800. а) $1.5^{\frac{3}{4}}$ і $1.5^{\frac{5}{6}}$;

б) $0.9^{-\frac{7}{8}}$ і $0.9^{-\frac{8}{9}}$;

в) $3^{-2.5} \cdot 9^{1.2}$ і $(\sqrt{3})^{-0.3}$;

г) $(8 \cdot 2^3)^{-3}$ і $0.25^{4.6}$.

801. а) $0.2^{\frac{2}{3}}$ і $0.04^{\frac{3}{8}}$;

б) $0.5^4 \cdot 8^{1.4}$ і $\sqrt[3]{2}$.

Рівень В

802. Побудуйте графік функції:

а) $y = 2^{|x|}$;

б) $y = |3^x - 1|$;

в) $y = 1.5^{x-|x|}$.

803. Доведіть, що графік функції $y = 4 \cdot 2^x$ можна одержати за допомогою паралельного перенесення графіка функції $y = 2^x$ в напрямі осі x .

804. Знайдіть найбільше та найменше значення функції:

а) $y = 5^{\sin x} + 1$;

б) $y = 0.2^{1-2\cos^2 x} - 1$.

805. Порівняйте значення виразів:

а) $(\sqrt{2} - 1)^{2.8}$ і $(\sqrt{2} + 1)^{-3}$;

б) $(8\sqrt[3]{2})^{1.2}$ і $\left(4^{-2} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{8}}\right)^{-0.2}$.

Вправи для повторення

806. Розв'яжіть рівняння:

а) $\frac{2}{3}(2x - 1) = \frac{1}{6}x + 1\frac{1}{9}$;

б) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$.

807. Знайдіть найменший додатний корінь рівняння:

а) $\cos^2 x - 4.5 \cos x + 2 = 0$;

б) $\sin^2 x - \sin 2x = 3 \cos^2 x$.

808. Знайдіть шостий член та суму перших шести членів геометричної прогресії:

а) 0.5; 1; 2; ...;

б) 6; 3; 1.5;

809.* Усіх десятикласників школи спробували вишикувати в колону по 8 учнів у ряду, але один ряд виявився неповним. Тоді десятикласників пе-

решикували в колону по 7 учнів у ряду; усі ряди виявилися повними, а число рядів зросло на 2. Якби десятикласників вишикували в колону по 5 учнів у ряду, то рядів було б ще на 7 більше, до того ж, один ряд був би неповним. Скільки десятикласників у школі?

§ 27. Показникові рівняння

У рівняннях $3^x = 1$; $0,2^{x+1} + 4 \cdot 5^x = 0,8$; $\frac{2^x - 1}{2^x + 3} = 2^x$ змінна міститься у показниках степенів. Такі рівняння називають **показниковими**.

Розглянемо два основні способи розв'язування показниковых рівнянь: 1) зведення обох частин рівняння до степенів з однаковими основами; 2) метод заміни змінних.

1. Розв'язування показниковых рівнянь шляхом зведення обох частин рівняння до степенів з однаковими основами.

Розглянемо показникове рівняння

$$a^x = b,$$

де $a > 0$, $a \neq 1$; b — деяке число.

Функція $y = a^x$ набуває лише додатних значень і якщо $b \leq 0$, то дане рівняння коренів не має.

Нехай $b > 0$. Якщо $a > 1$, то функція $y = a^x$ є зростаючою, якщо $0 < a < 1$, — спадною. Тому додатного значення b вона набуває при єдиному значенні x (див. рис. 101 і 102). Отже, у даному випадку рівняння $a^x = b$ має єдиний корінь.

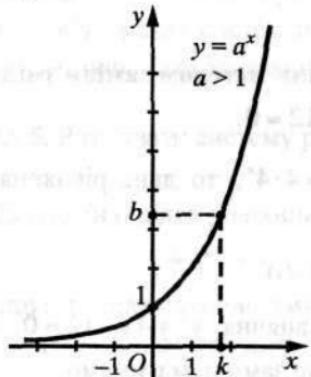


Рис. 101

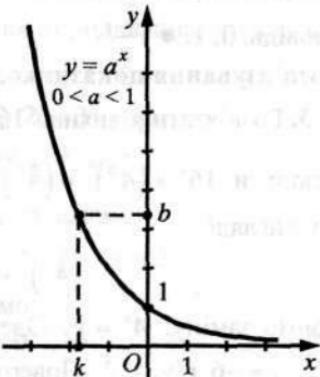


Рис. 102