решикували в колону по 7 учнів у ряду; усі ряди виявилися повними, а число рядів зросло на 2. Якби десятикласників вишикували в колону по 5 учнів у ряду, то рядів було б ще на 7 більше, до того ж, один ряд був би неповним. Скільки десятикласників у школі?

§ 27. Показникові рівняння

У рівняннях $3^x = 1$; $0{,}2^{x+1} + 4 \cdot 5^x = 0{,}8$; $\frac{2^x - 1}{2^x + 3} = 2^x$ змінна міститься у показниках степенів. Такі рівняння називають *показниковими*.

Розглянемо два основні способи розв'язування показникових рівнянь: 1) зведення обох частин рівняння до степенів з однаковими основами; 2) метод заміни змінних.

1. Розв'язування показникових рівнянь шляхом зведення обох частин рівняння до степенів з однаковими основами.

Розглянемо показникове рівняння

$$a^x = b,$$

де $a > 0$, $a \neq 1$; b — деяке число.

Функція $y = a^x$ набуває лише додатних значень і якщо $b \leq 0$, то дане рівняння коренів не має.

Нехай $b > 0$. Якщо $a > 1$, то функція $y = a^x$ є зростаючою, якщо $0 < a < 1$, — спадною. Тому додатного значення b вона набуває при єдиному значенні x (див. рис. 101 і 102). Отже, у даному випадку рівняння $a^x = b$ має єдиний корінь.

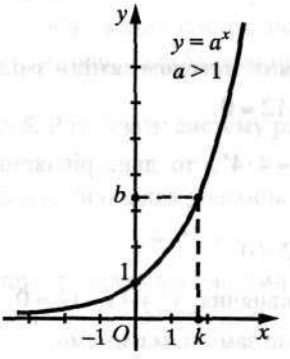

Рис. 101

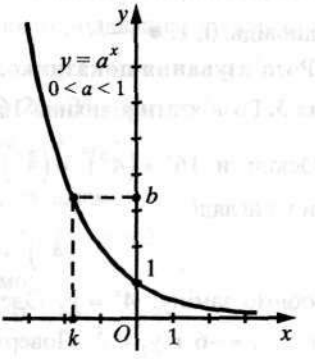

Рис. 102

Якщо у рівнянні $a^x = b$ число

Отже, у даному випадку рівняння $a^x = b$ має

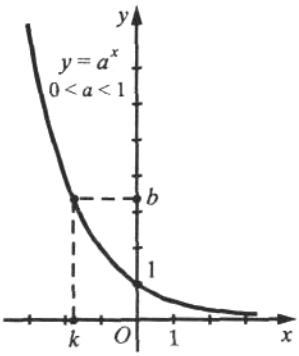

Рис. 102

значенні x (див. рис. 101 і 102).

єдиний корінь.

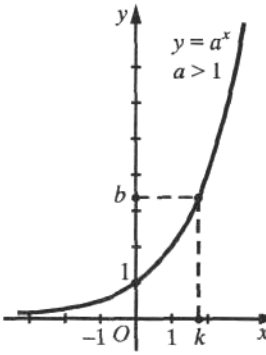

Рис. 101

1) $4^x = -6$ — рівняння коренів не має;

2) $4^x = 2;\ 2^{2x} = 2^1;\ 2x = 1;\ x = 0{,}5.$

Відповідь. 0,5. ●

Приклад 4. Розв'язати рівняння $2\cdot 16^x - 36^x - 3\cdot 81^x = 0.$

● Оскільки $16^x = 4^{2x},\ 36^x = 4^x\cdot 9^x,\ 81^x = 9^{2x}$, то дане рівняння можна записати у вигляді

$$2\cdot 4^{2x} - 4^x\cdot 9^x - 3\cdot 9^{2x} = 0.$$

Поділимо обидві частини рівняння на 9^{2x}. Оскільки $9^{2x} \neq 0$ для будь-якого значення x, то в результаті ділення одержимо рівносильне йому рівняння:

$$2\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{2x} - \left(\frac{4}{9}\right)^x - 3 = 0.$$

Зробимо заміну: $\left(\frac{4}{9}\right)^x = y$. Одержимо рівняння $2y^2 - y - 3 = 0$, кореня-

ми якого є $y_1 = -1$ і $y_2 = \frac{3}{2}$. Повертаючись до заміни, матимемо:

1) $\left(\frac{4}{9}\right)^x = -1$ — рівняння коренів не має;

2) $\left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{3}{2};\ \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1};\ 2x = -1;\ x = -0{,}5.$

Відповідь. –0,5. ●

3. Системи показникових рівнянь.

Розв'язуючи системи показникових рівнянь, використовують відомі способи розв'язування систем рівнянь: спосіб додавання, спосіб підстановки, заміну змінних. Розглянемо приклади.

Приклад 5. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 3\cdot 2^x - 3^y = 15; \\ 2^x + 3^y = 17. \end{cases}$

тини рівняння у вигляді степенів з однако-

ю 2:

$^{2x-1} = 2^{0,5}\cdot 2^{-x};\qquad 2^{2x+2} = 2^{0,5-x}.$

івнянні показники степенів, матимемо:

$x = -0{,}5.$

$\cdot 3^x + 3^{x+2} = 11\cdot 3^{x^2}.$

$3^2 = 9\cdot 3^x$, матимемо:

● Запишемо ліву і праву час

вою основою, наприклад, з основ

$2^3\cdot 2^{2x-1} = 2^{0,5}\cdot\left(2^{-1}\right)^x;\qquad 2^3$

Прирівнявши в останньому р

$2x + 2 = 0{,}5 - x;\quad 3x = -1{,}5;$

Відповідь. –0,5. ●

Приклад 2. Розв'язати рівняння

● Врахувавши, що $3^{x+2} = 3^x$

815. а) $5^x + 3 \cdot 5^x = 20$; б) $3^{x+3} - 3^x = 26$.

816. а) $4 \cdot 6^x - 2 \cdot 6^x = 72$; б) $2^{2x+1} + 2^{2x} = 12$.

817. а) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$; б) $36^x - 7 \cdot 6^x + 6 = 0$.

818. а) $3^{2x} + 2 \cdot 3^x - 15 = 0$; б) $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$.

Розв'яжіть систему рівнянь:

819. а) $\begin{cases} 4^{x+y} = 16; \\ 5^{x-3y} = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3^x \cdot 3^y = 27; \\ 2^{x+1} = 2^y. \end{cases}$

820. а) $\begin{cases} 3^{2x-y} = 9; \\ 6^{x+y} = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2^x \cdot 2^{2y} = 8; \\ 5^{2x} = 5^{y+1}. \end{cases}$

Рівень Б

Розв'яжіть рівняння:

821. а) $\left(1\frac{1}{2}\right)^{x+2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{7-3x}$; б) $0,2^{2-x} = 5^{-2x}$;

в) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{2}\right)^x = \frac{27}{\ldots}$. г) $(4^{x-1})^{x+2} = 2^{2x} \cdot 4^{x+4}$.

● Додавши обидва рівняння системи, матимемо:

$$4 \cdot 2^x = 32; \quad 2^x = 8; \quad 2^x = 2^3; \quad x = 3.$$

Із другого рівняння системи знаходимо:

$$2^3 + 3^y = 17; \quad 3^y = 9; \quad 3^y = 3^2; \quad y = 2.$$

Відповідь. (3; 2). ●

834. а) $3^x + 5^x = 8$;

б) $6^x - 2^x = 32$.

835. Для яких значень x послідовність $b_n = 9$, $b_n = 3^{0,5\operatorname{tg}x}$, $b_n = \left(\frac{1}{64}\right)^{\cos 2x}$

е) $\sqrt[3]{4^{x+1}} = \sqrt{8^{x-2}}$;

ж) $5^{x+1} \cdot 2^{2x} = 2^{x+1} \cdot 5^{2x}$.

з) $2^{x^2} = 0{,}25 \cdot 4^{4x+11}$;

г) $\sqrt{27^{x+5}} = \sqrt[4]{9^x}$;

е) $4 \cdot 3^{x-2} = 4^{x+1} \cdot 2^{-x-2}$.

з) $3^{x-1} + 3^x + 2 \cdot 3^{x+1} = 22 \cdot 9^{x^2-1}$;

г) $0{,}5^{3-2x} - 0{,}25^{2-x} + 0{,}5^{5-2x} = 24$.

з) $3^{3x+4} - 4 \cdot 27^x + 3^{3x+1} = 240$;

д) $3^{x-1} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$;

є) $2^x = 3^x$;

822. а) $3^{5x+10} = \left(\frac{1}{9}\right)^{2x-5}$;

в) $\left(3^{x-2}\right)^{x+5} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} \cdot 9^{x-3}$;

д) $4 \cdot 7^x = 7 \cdot 4^x$

823. а) $4^{x+2} + 3 \cdot 4^{x+1} - 10 \cdot 4^x = 36$;

в) $6^x - 2^x \cdot 3^{x+1} + \frac{1}{3} = 0$;

824. а) $2^x - 3 \cdot 2^{x+2} + 2^{x+4} = 5$;

в) $8^{x^2+1} - 3 \cdot 2^{x^2} \cdot 4^{x^2} = 320 \cdot 2^{3x}$.

844*. Тролейбусний маршрут має 8 зупинок (перша — початкова, восьма — кінцева). На початковій зупинці у тролейбус сіло декілька пасажирів, а на кожній наступній, за винятком кінцевої, у тролейбус сідало по 10 пасажирів. На другій зупинці зійшов один пасажир, а на кожній наступній зупинці сходило на 4 пасажири більше, ніж на попередній. На кінцеву зупинку приїхав 21 пасажир. Яке найбільше число пасажирів їхало у тролейбусі під час рейсу?

§ 28. Показникові нерівності

1. Розв'язування показникових нерівностей шляхом зведення обох частин нерівності до степенів з однаковими основами.

Розв'яжемо спочатку кілька простих показникових нерівностей

$\left(\frac{1}{9}\right)^{\quad} \le 1$ (0-

$\left(x^2+1\right)^{x^2-3x-10}=1.$

$\begin{cases}5^{2x}-3^{2y}=-104;\\5^x+3^y=52;\end{cases}$

$\begin{cases}\left(\frac{2}{3}\right)^{y-x}-\left(\frac{3}{2}\right)^{y-x}=1\frac{29}{36};\\xy-x+y=118.\end{cases}$

ума першого й останнього членів
останнього членів дорівнює 128.
ма всіх її членів дорівнює 126?

орення

; в) $\left(\frac{4}{3}\right)^{-7}$ і $\left(\frac{3}{4}\right)^{6}$.

0; в) $\frac{x}{x+2}>2.$

$\frac{1-\cos 2\alpha-2\sin^4\alpha}{}$

метричною прогресією?

836. Розв'яжіть рівняння:

а) $x^{\sqrt{x}+2}=x^x$; б)

837. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases}2^x\cdot 3^y=12;\\3^x\cdot 2^y=18;\end{cases}$ б)

в) $\begin{cases}2^{x+y}-3\cdot 5^{x-y}=5;\\4^{x+y}-25^{x-y}=63;\end{cases}$ г)

838. У скінченній геометричній прогресії с
дорівнює 66, а добуток другого і пере
Скільки членів має прогресія, якщо су

Вправи для повт

839. Порівняйте числа:

а) $8^{1,5}$ і $8^{1,54}$; б) $0,7^{10}$ і $0,7^{1}$

840. Розв'яжіть нерівність:

а) $3(2x-1)<8x+1$; б) x^2+6x-7

841. Спростіть вираз:

а) $\operatorname{ctg}\alpha\sin 2\alpha(1+\operatorname{tg}^2\alpha)$; б)