§ 29. Поняття логарифма

1. Означення логарифма. Розглянемо рівняння $2^x = 16$. Щоб розв'язати це рівняння, досить знайти показник степеня, до якого потрібно піднести число 2, щоб одержати число 16. Цей показник x називають *логарифмом числа* 16 *за основою* 2. Взагалі, якщо виконується рівність $a^x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, то показник степеня x називають логарифмом числа b за основою a.

Означення. **Логарифмом числа b за основою a ($a > 0$, $a \neq 1$) називають показник степеня, до якого потрібно піднести число a, щоб одержати число b.**

Логарифм числа b за основою a позначають $\log_a b$ (читають: логарифм числа b за основою a).

Так, за означенням $\log_4 64$ — це показник степеня, до якого потрібно піднести число 4, щоб одержати число 64. Оскільки $4^3 = 64$, то цим показником є число 3. Отже, $\log_4 64 = 3$.

Розглянемо ще приклади:

$\log_2 \frac{1}{4} = -2$, оскільки $2^{-2} = \frac{1}{4}$;

$\log_{\frac{1}{3}} 3 = -1$, оскільки $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$;

$\log_{0,1} 0,001 = 3$, оскільки $0,1^3 = 0,001$.

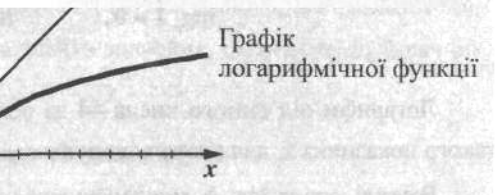
Для будь-якого $a > 0$, $a \neq 1$ виконуються рівності

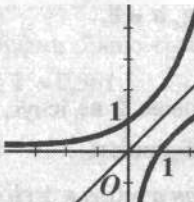
$$\log_a 1 = 0, \qquad \log_a a = 1,$$

оскільки $a^0 = 1$, $a^1 = a$.

Логарифм від'ємного числа -4 за основою 2 не існує, оскільки немає такого показника x, для якого виконувалася б рівність $2^x = -4$.

Взагалі, *вираз* $\log_a b$ *має зміст лише для* $a > 0$, $a \neq 1$ *і* $b > 0$.





• **а)** $3\log_2 32 + 4\log_3 \frac{1}{9} = 3\cdot 5 + 4\cdot(-2) = 7;$

б) $3^{\log_3 6 + 2} = 3^{\log_3 6}\cdot 3^2 = 6\cdot 9 = 54;$

в) $8^{\log_2 5} = \left(2^3\right)^{\log_2 5} = \left(2^{\log_2 5}\right)^3 = 5^3 = 125.$ •

Приклад 2. Знайти $\log_8 16$.

• Нехай $\log_8 16 = x$. Тоді: $8^x = 16$; $2^{3x} = 2^4$; $3x = 4$; $x = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$. Отже, $\log_8 16 = 1\frac{1}{3}$. •

Приклад 3. Розв'язати рівняння $2^x = 5$.

• Щоб розв'язати рівняння, слід знайти показник степеня, до якого потрібно піднести число 2, щоб одержати число 5. Цим показником за означенням логарифма є $x = \log_2 5$.

Відповідь. $\log_2 5$. •

Приклад 4. Знайти x, якщо: **а)** $\log_4 x = 3$; **б)** $\log_x 16 = 2$.

• **а)** $\log_4 x = 3$; $x = 4^3 = 64$;

б) $\log_x 16 = 2$; $x^2 = 16$; $x = 4$ або $x = -4$. Основа x логарифма не може бути від'ємним числом, тому шуканим є лише одне значення $x = 4$. •

Приклад 5. При яких значеннях x має зміст вираз $\log_x (9 - 3x)$?

Підставивши у рівність $\log_a b = x$ замість числа b його запис у вигляді степеня $b = a^x$, одержимо ще одну тотожність

$$\log_a a^x = x.$$

Наприклад, $\log_2 2^{-10} = -10$, $\log_2 \sqrt{2} = \log_2 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.

Остання тотожність дозволяє будь-яке число x записати у вигляді логарифма за певною основою. Запишемо, наприклад, числа 3 і –2 у вигляді логарифмів за основою 4:

$$3 = \log_4 4^3 = \log_4 64; \quad -2 = \log_4 4^{-2} = \log_4 \frac{1}{16}.$$

3. Десяткові логарифми. Логарифм числа b за основою 10 називають *десятковим логарифмом* і позначають $\lg b$. Отже, $\lg b = \log_{10} b$. Так, $\lg 100 = 2$, $\lg 0{,}1 = -1$. Шукати значення десяткових логарифмів можна за допомогою мікрокалькулятора, що має клавіш $\boxed{\lg}$. Наприклад, щоб знайти десятковий логарифм числа 2, потрібно ввести це число в мікрокалькулятор, а потім натиснути клавіш $\boxed{\lg}$. На екрані висвітиться число, що є наближеним

903. а) $\log_4 x = 3$; б) $\log_3 x = -2$; в) $\lg x = 0$.

Розв'яжіть рівняння:

904. а) $3^x = 10$; б) $0{,}7^x = 4$: в) $10^x = 6$.

905. а) $5^x = 2$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 10$; в) $10^x = 35$.

906. Запишіть у вигляді логарифмів за основою 3 числа: 1; 2; 0; -1; $\frac{1}{2}$.

...зміст виразу $\log_2(9-3x)$,

..., звідки $x < 3$.

• Вираз має зміст, якщо $9 - 3x > 0$

Відповідь. $x < 3$. •

но

Ус

888. Чи є правильною рівність:

в) $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$; г) $\lg 10 = 1$?

а) $\log_3 27 = 3$; б) $\log_3 \frac{1}{9} = 2$;

889. Знайдіть логарифми даних чисел за основою 2:

2; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$.

1; 2; 4; 8; 16;

890. Чи має зміст вираз:

в) $\log_1 3$; г) $\log_2 (-2)^2$?

а) $\log_6 (-3)$; б) $\log_{-2} 4$;

При яких значеннях x має зміст вираз?

920. а) $\log_2(2-x-x^2)$; б) $\log_{x-3}2$; в) $\log_x(2x-1)$.

921. а) $\lg(x^2+3x-4)$; б) $\log_{2x}5$; в) $\log_x(2-x)$.

Рівень В

922. Обчисліть:

а) $\log_{\frac{2}{\sqrt{3}}}\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$; б) $36^{\log_6 5}$; в) $\left(\dfrac{8}{9}\right)^{\log_{\frac{9}{8}}3}$;

г) $5^{\log_{\sqrt{5}}4+2\log_5 3}$; д) $2^{\log_2 3\cdot\log_9 4}$; е) $\sqrt{4^{\log_2 6}+9^{\log_3 8}}$.

923. Доведіть, що:

а) $\log_{2+\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})=-1$; б) $\log_{6-4\sqrt{2}}(2-\sqrt{2})=\dfrac{1}{2}$.

Вправи для повторення

924. Обчисліть:

а) $3^{0,5}\cdot 3^{1,5}$; б) $2^{17}:2^9$; в) $\left(4^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$.

925. Розв'яжіть рівняння:

а) $\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{x+2}{1-x^2}=0$; б) $\dfrac{x}{x+3}+\dfrac{4}{x-4}=\dfrac{5x+8}{x^2-x-12}$.

926. Знайдіть $\sin(\alpha-\beta)$, якщо $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$; $\sin\beta=\dfrac{1}{3}$ і $\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$.

927. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії: 3; 1; $\dfrac{1}{3}$; ... .

928*. Скінченна геометрична прогресія має парне число членів. Сума усіх членів прогресії, що мають непарні номери, утричі менша від суми усіх членів. Знайдіть $\dfrac{q}{2}$.

новою 2 числа: 3; 1; $\dfrac{1}{2}$; 0; –2.

в) $10^{\lg 0,3}$.

в) $10^{\lg 4}$.

x); в) $\lg(2x-1)$.

$2x$); в) $\lg(x+7)$.

Б

907. Запишіть у вигляді логарифмів за ос

Спростіть вираз:

908. а) $7^{\log_7 2}$; б) $1,2^{\log_{1,2}3}$;

909. а) $4^{\log_4 8}$; б) $0,5^{\log_{0,5}5}$;

При яких значеннях x має зміст вираз?

910. а) $\log_4(x-3)$; б) $\log_2(2-$

911. а) $\log_5(2x)$; б) $\log_{0,2}(6-$

Рівень

Знайдіть значення виразу: