## *§ 31. Логарифмічна функція*

Показникова функція $y = a^x$ при $a > 1$ є зростаючою, а при $0 < a < 1$ — спадною, тому вона має обернену функцію. Задамо обернену функцію формулою. Для цього:

1) з формули $y = a^x$ виразимо змінну $x$ через змінну $y$: $x = \log_a y$;

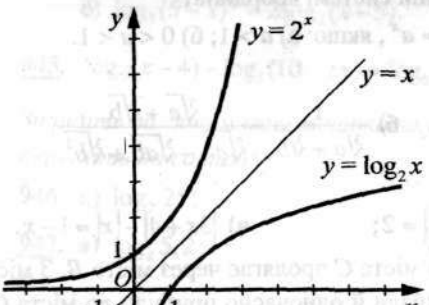
2) змінимо позначення змінних, одержимо формулу $y = \log_a x$, якою й задається обернена функція.

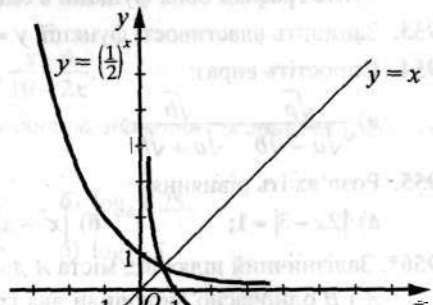
Одержану обернену функцію називають *логарифмічною функцією*.

***Означення*** **Функцію, задану формулою $y = \log_a x$ де $a$ — деяке додатне число, відмінне від 1, а $x$ — змінна, називають *логарифмічною функцією*.**

Число $a$ називають основою логарифмічної функції. Так, $y = \log_2 x$, $y = \log_{0,1} x$, $y = \lg x$ — логарифмічні функції за основами 2; 0,1; 10.

Ми показали, що *логарифмічна функція* $y = \log_a x$ *є оберненою до показникової функції* $y = a^x$. Тому графік функції $y = \log_a x$ симетричний графіку функції $y = a^x$ відносно прямої $y = x$. На рисунках 103 і 104 зображено графіки функцій $y = \log_2 x$ та $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, які можна одержати відповідно із графіків функцій $y = 2^x$ та $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ за допомогою такої симетрії.




сть на 15 км/год, а другий — на
о міста $C$ одночасно, але на 1 год
, якщо відстань між містами $A$ і $B$

якої один з них збільшив швидкі
10 км/год, то вони теж прибули б д
швидше. Знайдіть швидкості поїзді
дорівнює 150 км.

Із властивості 3 випливає, що логарифмічна функція будь-якого значення набуває при єдиному значенні $x$. Тому *для додатних чисел $b$ і $c$ рівність* $\log_a b = \log_a c$ *виконується тоді і тільки тоді, коли* $b = c$. Дане твердження використовуватимемо, розв'язуючи логарифмічні рівняння.

### Приклади розв'язання вправ

**Приклад 1.** Порівняти числа:

**а)** $\log_4 2{,}5$ і $\log_4 2{,}7$; **б)** $\log_{0,6} 8$ і $\log_{0,6} 9$.

• **а)** Логарифмічна функція $y = \log_4 x$ є зростаючою, бо її основа більша від 1. Оскільки $2{,}5 < 2{,}7$, то $\log_4 2{,}5 < \log_4 2{,}7$.

**б)** Логарифмічна функція $y = \log_{0,6} x$ є спадною, бо її основа менша від 1. Оскільки $8 < 9$, то $\log_{0,6} 8 > \log_{0,6} 9$. •

**Приклад 2.** Знайти область визначення функції $y = \log_{0,5}(4 - 8x)$.

• Вираз $4 - 8x$, що стоїть під знаком логарифма, повинен набувати додатних значень. Розв'язавши нерівність $4 - 8x > 0$, одержимо: $x < 0{,}5$.

Відповідь. $(-\infty; 0{,}5)$. •

### Усно

**957.** Сформулюйте властивості функції:

**а)** $y = \log_3 x$; **б)** $y = \log_{0,3} x$.

**958.** Яка з даних функцій є зростаючою; спадною?

**а)** $y = \log_{1,5} x$; **б)** $y = \log_{\frac{2}{3}} x$; **в)** $y = \lg x$; **г)** $y = \log_{0,8} x$.

### Рівень А

*Побудуйте графік функції та запишіть її властивості:*

**959. а)** $y = \log_4 x$; **б)** $y = \log_{\frac{1}{4}} x$.

**960. а)** $y = \log_3 x$; **б)** $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.

*Порівняйте числа:*

**961. а)** $\log_2 8{,}5$ і $\log_2 8{,}2$; **б)** $\log_{\frac{1}{2}} 7$ і $\log_{\frac{1}{2}} 5$;

**в)** $\lg 0{,}8$ і $\lg 0{,}9$; **г)** $\log_{0,7} 3{,}5$ і $\log_{0,7} 4$;

**д)** $\log_4 3$ і $1$; **е)** $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{8}$ і $2$.

**962.** а) $\log_5 1{,}2$ і $\log_5 1{,}5$; б) $\log_{\frac{1}{6}} 15$ і $\log_{\frac{1}{6}} 14$;

в) $\log_{0,1} 2$ і $\log_{0,1} 2{,}1$; г) $\log_3 8$ і 2.

*Знайдіть область визначення функції:*

**963.** а) $y = \log_2(3x-18)$; б) $y = \log_{\frac{1}{3}}(4-5x)$; в) $y = \lg(x^2-2x-3)$.

**964.** а) $y = \log_{0,3}(2x+5)$; б) $y = \lg(30-6x)$; в) $y = \log_2(x^2-4x+3)$.

## Рівень Б

**965.** Розв'яжіть графічно нерівність:

а) $\log_2 x > 1-x$; б) $\log_{\frac{1}{3}} x > 2x-2$.

**966.** Розв'яжіть графічно:

а) рівняння $\log_{\frac{1}{2}} x = x + \frac{1}{2}$; б) нерівність $\log_2 x < 1$.

*Порівняйте числа:*

**967.** а) $\log_3 18$ і $2\log_3 4$; б) $1+\log_3 2$ і $\log_3 7$;

в) $\log_4(3+5)$ і $\log_4 3+\log_4 5$; г) $\log_3 0{,}7$ і $\log_5 1{,}2$.

**968.** а) $3\log_5 2$ і $1+\log_5 2$; б) 1 і $2\log_{24} 5$;

в) $\log_6 30$ і $\log_6 3-\log_6 0{,}1$; г) $\log_{0,9} 0{,}7$ і $\log_{0,5} 1{,}2$.

**969.** Знайдіть знак добутку:

а) $\log_{0,8} 2 \cdot \log_{0,8} \frac{1}{3}$; б) $\log_4 0{,}3 \cdot \log_{\frac{1}{3}} 0{,}5 \cdot \log_{0,3} 3$.

**970.** Порівняйте додатні числа $a$ і $b$, якщо:

а) $\log_2 a < \log_2 b$; б) $\log_{\frac{1}{4}} a < \log_{\frac{1}{4}} b$.

**971.** Порівняйте з одиницею додатне число $a$, якщо:

а) $\log_a 2{,}5 > \log_a 3{,}5$; б) $\log_a 3 > \log_a 2{,}8$.

*Знайдіть область визначення функції:*

**972.** а) $y = \log_3(5x-8) + \log_3(4-x)$; б) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2-4x-5) + \sqrt{x+1}$.

**973.** а) $y = \log_{0,1}(3-6x) - \log_{0,1} x$; б) $y = \lg(x-x^2) + \sqrt{x-0{,}5}$.

### Рівень В

**974.** Порівняйте числа:

**а)** $\log_3 5$ і $\log_{\frac{1}{9}} \frac{1}{24}$; **б)** $\log_4 25$ і $\log_6 35$.

**975.** Розв'яжіть графічно рівняння:

**а)** $|\log_2 x| = 4x - x^2 - 3$; **б)** $\log_{\frac{1}{2}} x = -|x-1|$.

### Вправи для повторення

**976.** Обчисліть:

**а)** $\dfrac{4{,}8 \cdot 2\frac{2}{3} - 1\frac{5}{6} : 1\frac{1}{3}}{(0{,}28 - 1{,}08) : 0{,}8}$; **б)** $\left(3\frac{1}{4} - 2{,}25\right) : 2{,}9 + \left(5{,}875 - 6\frac{1}{3}\right) \cdot 1\frac{1}{3}$.

**977.** Розв'яжіть систему рівнянь:

**а)** $\begin{cases} 2xy = -3; \\ x + 2y = -2; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} + \dfrac{1}{x-y} = 3; \\ \dfrac{x+y}{x-y} = 2. \end{cases}$

**978*.** Знайдіть усі значення $a$, для яких система рівнянь $\begin{cases} y = |x-1|; \\ x + y = a \end{cases}$ має безліч розв'язків.

**979.** *Задача І. Ньютона.* Дано чотири послідовних члени геометричної прогресії. Сума двох крайніх членів дорівнює 13, а двох середніх — 4. Знайдіть ці члени прогресії.

## *§ 32. Логарифмічні рівняння*

Рівняння $\log_3(x-1) = 2$, $\log_{0,5}(3-x) = \log_{0,5}(2x+6)$, $\log_5^2 x - 4\log_5 x = 5$ містять змінну під знаком логарифма. Такі рівняння називають *логарифмічними* рівняннями.

**1. Рівняння виду $\log_a f(x) = c$.**

Розглянемо рівняння $\log_3 x = 4$. За означенням логарифма рівність $\log_3 x = 4$ виконується тоді й тільки тоді, коли $3^4 = x$. Отже, дане рівняння має єдиний корінь $x = 3^4 = 81$.

У загальному випадку для будь-якого значення $c$:

*рівняння* $\log_a x = c$ *має єдиний корінь* $x = a^c$;

*рівняння* $\log_a f(x) = c$ *рівносильне рівнянню* $f(x) = a^c$.