Рівень В

974. Порівняйте числа:

а) $\log_3 5$ і $\log_{\frac{1}{9}} \frac{1}{24}$; б) $\log_4 25$ і $\log_6 35$.

975. Розв'яжіть графічно рівняння:

а) $|\log_2 x| = 4x - x^2 - 3$; б) $\log_{\frac{1}{2}} x = -|x-1|$.

Вправи для повторення

976. Обчисліть:

а) $\dfrac{4{,}8 \cdot 2\frac{2}{3} - 1\frac{5}{6} : 1\frac{1}{3}}{(0{,}28 - 1{,}08) : 0{,}8}$; б) $\left(3\frac{1}{4} - 2{,}25\right) : 2{,}9 + \left(5{,}875 - 6\frac{1}{3}\right) \cdot 1\frac{1}{3}$.

977. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} 2xy = -3; \\ x + 2y = -2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} + \dfrac{1}{x-y} = 3; \\ \dfrac{x+y}{x-y} = 2. \end{cases}$

978*. Знайдіть усі значення a, для яких система рівнянь $\begin{cases} y = |x-1|; \\ x + y = a \end{cases}$ має безліч розв'язків.

979. *Задача І. Ньютона.* Дано чотири послідовних члени геометричної прогресії. Сума двох крайніх членів дорівнює 13, а двох середніх — 4. Знайдіть ці члени прогресії.

§ 32. Логарифмічні рівняння

Рівняння $\log_3(x-1) = 2$, $\log_{0,5}(3-x) = \log_{0,5}(2x+6)$, $\log_5^2 x - 4\log_5 x = 5$ містять змінну під знаком логарифма. Такі рівняння називають *логарифмічними* рівняннями.

1. Рівняння виду $\log_a f(x) = c$.

Розглянемо рівняння $\log_3 x = 4$. За означенням логарифма рівність $\log_3 x = 4$ виконується тоді й тільки тоді, коли $3^4 = x$. Отже, дане рівняння має єдиний корінь $x = 3^4 = 81$.

У загальному випадку для будь-якого значення c:

рівняння $\log_a x = c$ *має єдиний корінь* $x = a^c$;

рівняння $\log_a f(x) = c$ *рівносильне рівнянню* $f(x) = a^c$.

$$2x^2+7x+3=3-2x;\quad 2x^2+9x=0;\quad x_1=-4{,}5;\ x_2=0.$$

Перевірка. Допустимі значення змінної у даному рівнянні визначаються системою нерівностей:

$$\begin{cases} x+3>0; \\ 3-2x>0; \\ 2x+1>0. \end{cases}$$

Значення $x_1=-4{,}5$ не задовольняє дану систему, бо, наприклад, нерівність $-4{,}5+3>0$ є неправильною. Значення ж $x_2=0$ задовольняє усі нерівності системи, тому $x_2=0$ — корінь рівняння.

Відповідь. 0. ●

3. Розв'язування логарифмічних рівнянь методом заміни змінних.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\log_5^2 x+\log_5 x-6=0$.

● Зробимо заміну: $\log_5 x=y$. Одержимо рівняння $y^2+y-6=0$, яке має два корені $y_1=-3$ і $y_2=2$. Повертаючись до заміни, матимемо:

ння x виконується одна з нерів-
$x)>0$), то на основі рівності
$g(x)>0$). Тому перевірку мож-
рівняння в одну з нерівностей

$)=\log_3(5-2x)$.

аком логарифма, матимемо:

; $x_1=-5$; $x_2=3$.

чення x_1 у ліву частину рівнян-
Значення правої частини:
астин рівняння однакові, тому

(3^2-10) — не має змісту, оскі-
ній корінь.

систему нерівностей $\begin{cases} f(x)>0; \\ g(x)>0. \end{cases}$

Зауважимо, що коли для деякого значе
ностей останньої системи (наприклад, $f($
$f(x)=g(x)$ виконується й інша нерівність (
на виконувати шляхом підстановки коренів
$f(x)>0$ або $g(x)>0$ (простішу).

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\log_3(x^2-10$

● Прирівнявши вирази, що стоять під зн

$$x^2-10=5-2x;\quad x^2+2x-15=0$$

Перевірка. 1) $x_1=-5$. Підставивши зна
ня, одержимо: $\log_3((-5)^2-10)=\log_3 15$.
$\log_3(5-2\cdot(-5))=\log_3 15$. Значення обох ч
$x_1=-5$ — корінь рівняння.

2) $x_2=3$. Значення лівої частини: $\log_3$
льки $3^2-10=-1<0$. Отже, $x_2=3$ — сторон

Відповідь. –5. ●

Розв'яжіть систему рівнянь:

988. а) $\begin{cases} x-2y=3; \\ \log_4 x=\log_4(y+4); \end{cases}$ б) $\begin{cases} \log_2 x+\log_2 y=-1; \\ 2\log_2 x-\log_2 y=4. \end{cases}$

989. а) $\begin{cases} \log_5 x=\log_5 y; \\ 3x-y=6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \lg x-2\lg y=0; \\ \lg x+\lg y=3. \end{cases}$

Рівень Б

Повертаючись до заміни, матимемо:

1) $\log_3 x=-4$; $x=3^{-4}=\frac{1}{81}$; 2) $\log_3 x=1$; $x=$

Відповідь. $\frac{1}{81}$; 3. ●

Наступне рівняння розв'язується шляхом логарифмува
При цьому використовується твердження: для додатних чисел
конується тоді й тільки тоді, коли $\log_a b=\log_a c$.

ня обох його частин.
b і c рівність $b=c$ ви-

Розв'яжіть систему рівнянь:

1000.а) $\begin{cases}\log_2(x-y)=3;\\ \log_3(x+y)=2;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}\log_2(x-3)-\log_2(1-y)=0;\\ \log_2(x^2+y^2)=4;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\lg(x-y)+\lg(x+y)=1+\lg 4;\\ 10^{1+\lg(x-y)}=40;\end{cases}$ **г)** $\begin{cases}\log_3(x-2)+\log_3 y=0;\\ 2^{\log_2 x}=2+2^{\log_2 y}.\end{cases}$

1001.а) $\begin{cases}\log_3(x+2y)=1;\\ \lg x+\lg y=0;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}\log_3 x+\log_3 y=2+\log_3 4;\\ 3^{1+\log_3(x+y)}=60.\end{cases}$

Рівень В

Розв'яжіть рівняння:

1002. а) $\log_{x+4}(x^2-1)=\log_{x+4}(5-x)$; **б)** $\log_{2x}2+2\log_{2x}x=\log_{2x}(x+1)$.

1003. а) $\lg^2(-x)-2\lg x^2+4=0$; **б)** $\log_5^2 x^2-3\log_5(5x)+2=0$.

1004. а) $\log_3\left(\log_2^2 x-3\log_2 x+5\right)=2$; **б)** $\log_4\log_2\log_3(2x-3)=0{,}5$.

1005. а) $\log_5 x+1=\log_{25}(x+4)^2$; **б)** $2\log_{0,2}x+\log_5(3x+4)=0$;

в) $\log_2 x+\log_{\sqrt{2}}x+\log_{\frac{1}{2}}x=6$; **г)** $\log_{0,5}^2(4x)+\log_2\dfrac{x^2}{8}=8$.

1006. а) $4^{\log_2(x-2)+\log_2 5}=50$; **б)** $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\log_2^2 x-\log_2 x}=\dfrac{1}{125}\cdot 5^{\log_2 x-1}$;

$\log_2(3-2x)$;

$\log_5(x-3)$;

г) $\log_4(x+2)-\log_4(x-2)=0{,}5$;

); **е)** $2\log_3 x-\log_3(2x+9)=1$;

).

$(6-x)$; **б)** $\log_3(x+2)+1=\log_3(x+4)$;

8; **г)** $\log_2(x^2-x-2)=2\log_2\sqrt{-2x}$;

$1-\log_3(x-1)$.

б) $\log_2\dfrac{x+3}{x-2}=1-\log_2\dfrac{x+4}{x-3}$.

б) $\log_2\dfrac{x}{x+5}=1+\log_2\dfrac{x+6}{x-1}$.

$\log_3(3-2x-x^2)$

Розв'яжіть рівняння:

990. а) $\log_2(x+3)+\log_2(x+1)=$

б) $\log_5(2x-2,25)-\log_5 x=$

в) $\lg(3x-5)+\lg(x-25)=3$

д) $1-\dfrac{1}{2}\lg(x-8)=\dfrac{1}{2}\lg(2x+$

є) $2\log_9\sqrt{4-x^2}=\log_9(1-2$

991. а) $\log_5 x+\log_5(x+4)=\log_5$

в) $\lg(5x+1)+\lg(x+2)=2\lg$

д) $\log_3(2x+1)-\log_3(x+5)=$

992. а) $\log_{0,3}\dfrac{x+2}{x-1}=-1$;

993. а) $\log_{\frac{1}{5}}\dfrac{5x}{x+4}=-2$;

994. а) $\dfrac{\log_5(x^2-3x-3)}{}=0$;