Вправи для повторення

1009. Розв'яжіть систему нерівностей:

а) $\begin{cases} 2+x>8-2x; \\ 4-x\geq -8+3x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{5x-17}{4}<\dfrac{x-3}{2}+x; \\ -\dfrac{2}{7}x>1\dfrac{1}{35}. \end{cases}$

1010. Розв'яжіть нерівність:

а) $\sqrt{2x-6}<4$; б) $\sqrt{1+x}>\sqrt{1-x}$.

1011. Четвертий і десятий члени арифметичної прогресії відповідно дорівнюють 35 і 17. Знайдіть: **а)** суму перших восьми членів прогресії; **б)** суму всіх додатних членів прогресії.

1012. Знайдіть суму перших шести членів геометричної прогресії, заданої формулою $b_n=3\cdot 0,5^{n-1}$.

1013. Найкоротший шлях від материка до острова яхта подолала за певний час. Якби швидкість яхти була на $16\frac{2}{3}$ % меншою, то час руху був би на 12 хв більшим, а якби швидкість була на 2 км/год більшою, то час руху був би на 6 хв меншим. Знайдіть відстань від материка до острова.

§ 33. Логарифмічні нерівності

1. Розв'язування логарифмічних нерівностей шляхом зведення обох частин нерівності до логарифмів з однаковими основами. Розглянемо спочатку кілька прикладів.

Приклад 1. Розв'язати нерівність $\log_3 x<2$.

• Оскільки $2=\log_3 9$, то дану нерівність можна записати у вигляді

$$\log_3 x<\log_3 9.$$

Логарифмічна функція $y=\log_3 x$ є зростаючою, оскільки її основа більша від 1. Тому має виконуватися нерівність $x<9$. Змінна x стоїть під знаком логарифма, тому вона повинна задовольняти нерівність $x>0$. Отже, ма-

$$\begin{cases} x<9; \\ \end{cases}$$

Приклад 1. Розв'язати нерівність $\log_3 x<2$.

• Оскільки $2=\log_3 9$, то дану нерівність можна записати у ви

$$\log_3 x<\log_3 9.$$

Логарифмічна функція $y=\log_3 x$ є зростаючою, оскільки її о

льша від 1. Тому має виконуватися нерівність $x<9$. Змінна x стоїт

ком логарифма, тому вона повинна задовольняти нерівність $x>0$. О

ляді

снова бі-

під зна-

тже, ма-

Міркуючи так, як при розв'язуванні прикладу 3, можна обґрунтувати рівносильність поданих у таблиці нерівностей і відповідних їм систем нерівностей.

Логарифмічна нерівність	Рівносильна їй система нерівностей	
	$a > 1$	$0 < a < 1$
$\log_a f(x) < \log_a g(x)$	$\begin{cases} f(x) < g(x); \\ f(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) > g(x); \\ g(x) > 0 \end{cases}$
$\log_a f(x) > \log_a g(x)$	$\begin{cases} f(x) > g(x); \\ g(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) < g(x); \\ f(x) > 0 \end{cases}$

2. Розв'язування логарифмічних нерівностей методом заміни змінних. Розглянемо приклад.

Приклад 4. Розв'язати нерівність $\log_5^2 x - 3\log_5 x + 2 > 0$.

• Нехай $\log_5 x = y$, тоді матимемо нерівність $y^2 - 3y + 2 > 0$. Рівняння $y^2 - 3y + 2 = 0$ має корені $y_1 = 1$ і $y_2 = 2$. Тому розв'язками квадратної нерівності є ті значення y, для яких $y < 1$ або $y > 2$. Повертаючись до заміни, матимемо:

$$\log_5 x < 1; \quad \log_5 x < \log_5 5; \quad 0 < x < 5;$$

або

$$\log_5 x > 2; \quad \log_5 x > \log_5 25; \quad x > 25.$$

Відповідь. $(0; 5) \cup (25; +\infty)$. •

Для тих, хто хоче знати більше

Якщо для розв'язування логарифмічної нерівності виникає необхідність замінити вираз $\log_a y + \log_a z$ виразом $\log_a(yz)$, то слід пам'ятати, що така заміна допустима лише за умов, що $y > 0$ і $z > 0$. Також, замінюючи вираз $2 \cdot \log_a y$ на вираз $\log_a y^2$, потрібно накладати умову, що $y > 0$.

Приклад 5. Розв'язати нерівність $\log_3 x + \log_3(x+1) \geq \log_3(8-x)$.

• Дана нерівність рівносильна системі $\begin{cases} \log_3\left(x(x+1)\right) \geq \log_3(8-x); \\ x > 0; \\ x+1 > 0, \end{cases}$ звідки:

$$\begin{cases} x(x+1) \ge 8-x; \\ x>0; \\ x>-1; \\ 8-x>0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+2x-8 \ge 0; \\ x>0; \\ x<8; \end{cases} \quad \begin{cases} x \le -4 \text{ або } x \ge 2; \\ 0<x<8; \end{cases} \quad 2 \le x < 8.$$

Відповідь. [2; 8). ●

Розглянемо приклад розв'язання нерівності, яка містить змінну в основі логарифма.

Приклад 6. Розв'язати нерівність $\log_{x+1}(4-2x)<1$.

● Запишемо дану нерівність у вигляді $\log_{x+1}(4-2x)<\log_{x+1}(x+1)$ і розглянемо можливі два випадки.

1) Основа логарифмів більша від 1. Тоді нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} x+1>1; \\ 4-2x<x+1; \\ 4-2x>0, \end{cases} \text{ звідки: } \begin{cases} x>0; \\ x>1; \\ x<2; \end{cases} \quad 1<x<2.$$

2) Основа логарифмів задовольняє умову $0<x+1<1$. Тоді нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} 0<x+1<1; \\ 4-2x>x+1; \\ x+1>0, \end{cases} \text{ звідки: } \begin{cases} -1<x<0; \\ x<1; \end{cases} \quad -1<x<0.$$

Відповідь. $(-1; 0) \cup (1; 2)$. ●

Рівень А

Розв'яжіть нерівність:

1014. а) $\log_2 x>3$; б) $\log_3 x<1$; в) $\log_{0,1} x<2$; г) $\log_{\frac{1}{3}} x>0$.

1015. а) $\log_5(4x-7)<1$; б) $\log_{0,5}(6-x) \le -1$; в) $\log_2(2x+6)>4$.

1016. а) $\log_4 x<2$; б) $\log_5 x>-1$; в) $\log_{0,4} x>1$;

г) $\log_{\frac{1}{5}}(x-3)<1$; д) $\log_4(4-5x)>3$; е) $\log_6(1-x) \le 2$.

1017. а) $\log_7(x-1)<\log_7(8-2x)$; б) $\log_{0,6}(3x+7)<\log_{0,6}(x+5)$;

в) $\lg(4-3x)>\lg(2x-1)$; г) $\log_{\frac{1}{3}}(x-3) \ge \log_{\frac{1}{3}}(2x+7)$.

1018. а) $\log_5(5x)<\log_5(3x+4)$; б) $\log_{\frac{2}{3}}(6-3x) \le \log_{\frac{2}{3}}(8-x)$.

Рівень Б

Розв'яжіть нерівність:

1019. а) $\log_4(x^2-6x+10)>0,5$; б) $\log_{0,5}(x^2+x)\ge -1$;

в) $\log_{0,1}(x^2+1)<\log_{0,1}(2x-5)$; г) $\lg(2x^2-9x+4)\le \lg(x^2+3x+4)$.

1020. а) $\log_2(x^2-4x)<5$; б) $\lg(x^2+x-2)\le \lg(2x+10)$;

в) $\log_{0,2}(x^2-x-2)<\log_{0,2}(10-2x)$.

1021. а) $\lg^2 x-2\lg x-8\le 0$; б) $\log_2^2(x-1)-5\log_2(x-1)>0$.

1022. а) $\log_3^2 x-4\log_3 x+3>0$; б) $\log_5^2(x+2)-4<0$.

1023. а) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_2(x^2-x)}\ge\frac{1}{5}$; б) $2^{\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x)}<\frac{1}{2}$.

Знайдіть область визначення функції:

1024. а) $y=\sqrt{\log_2(x-8)}$; б) $y=\log_4\log_{0,5}(x-1)$.

1025. а) $y=\sqrt{\log_{0,2}(x+3)}$; б) $y=\log_2\log_3(x-7)$.

Рівень В

Розв'яжіть нерівність:

1026. а) $\log_2(x+1)+\log_2 x\le -1$;

б) $\log_{0,3}(x+1)+\log_{0,3}(x+2)\ge\log_{0,3}(7-x)$;

в) $\log_{0,5}(2x^2+3x+1)>2\cdot\log_{0,5}(1-x)$;

г) $2\cdot\log_2(x+2)-\log_2(x+5)<2$.

1027. а) $\log_3\log_{\frac{1}{3}}\left(x+\frac{1}{3}\right)>0$; б) $\log_{\frac{1}{2}}\log_4(x-4)\ge 0$.

1028. а) $\log_{2x}(x-6)<1$; б) $\log_{3-x}(x+3)>2$.

1029. а) $1+\frac{1}{1-\log_7 x}<0$; б) $\log_5 x-\frac{4}{\log_5 x-4}\ge 1$.

1030. а) $\log_4 x+4\log_x 4>5$; б) $\log_{x-1}2-2\log_2(x-1)<1$.

1031. а) $(5-2x)\cdot\log_3(5x-4)\ge 0$; б) $\frac{x^2-5x+6}{\log_5 x}>0$.

1032. Знайдіть область визначення функції:

а) $y=\sqrt{2-\log_{0,5}\frac{x}{x-1}}$; б) $y=\sqrt{\log_{x-2}(x^2-8x+15)}$.

Вправи для повторення

1033. Порівняйте значення виразів:

а) $\left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$ і $\left(1\frac{3}{7}\right)^{-1}$; б) $2,25^{-0,5}+\sqrt[6]{2^{12}}$ і $(-1,2)^0+0,3^{-1}$.

1034. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

а) $\begin{cases} x+2y=4; \\ 2x-y=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{x}+y=1; \\ 2^x-y=0. \end{cases}$

1035. Спростіть вираз: $\frac{\cos 2\alpha+2\cos 4\alpha+\cos 6\alpha}{\cos^2\alpha}$.

1036. Розв'яжіть рівняння:

а) $\sin 3x-\cos 3x=0$; б) $\cos 2x=(\sin x+\cos x)^2$.

1037. Два брокери купили акції одного номіналу на суму 9000 грн. Коли ціна акцій зросла, вони продали частину акцій на суму, витрачену при покупці. При цьому перший брокер, продавши 80% своїх акцій, одержав грошей в $1\frac{1}{7}$ разу більше, ніж другий, що продав 87,5% своїх акцій. На скільки відсотків зросла ціна однієї акції?

Історична довідка

У XVI–XVII ст. у зв'язку з бурхливим розвитком картографії та пов'язаними з нею астрономічними дослідженнями значно зросла роль практичних обчислень. При цьому доводилось проводити доволі громіздкі обчислення, а найбільші труднощі виникали під час множення і ділення багатоцифрових чисел. Відкриття ж логарифмів, за словами Лапласа, «подовжувало життя обчислювачів», оскільки дозволило звести «погані» дії множення і ділення чисел до додавання і віднімання логарифмів цих чисел. При цьому використовувались таблиці логарифмів. Щоб знайти добуток чисел a і b, маючи таблицю десяткових логарифмів, розрахунки проводилися за формулою $\lg(ab)=\lg a+\lg b$. За таблицею шукали логарифми чисел a та b й обчислюва-

ли суму $s = \lg a + \lg b$ (тоді й $\lg(ab) = s$). Після цього за цією ж таблицею шукали число, десятковий логарифм якого дорівнює s. Це число і є добутком чисел a і b.

Джон Непер

Відкрили логарифми майже одночасно у першій половині XVII ст. незалежно один від одного два вчених — шотландський математик барон Джон Непер (1550 – 1617) і швейцарський майстер годинників та астрономічних приладів Йост Бюргі (1552 – 1632).

У роботі «Опис дивовижної таблиці логарифмів» (1614) Непер виклав властивості логарифмів та навів приклади вдалих застосувань запропонованих таблиць. Бюргі ж видав свої таблиці логарифмів із затримкою — у 1620 р. і тому вони залишилися непоміченими. Тож прижиттєва слава першовідкривача логарифмів майже вся дісталася Неперу. Він же увів і сам термін «логарифм», що перекладається як *відношення чисел* (від грецьких «логос» — «відношення», «наука» й «арифмос» — «число»).

Ідея *десяткових* логарифмів належить професору Лондонського коледжу Генрі Брігсу (1561–1631), який після ознайомлення з працями Непера взявся розробляти велику таблицю десяткових логарифмів. Саме завдяки працям Непера і Брігса логарифми увійшли в обчислювальну практику, а таблиці логарифмів стали незамінним допоміжним знаряддям для обчислень.

У 1624 р. англійський астроном і математик Едмунд Гюнтер (1581–1626) розробив логарифмічну шкалу, що стала першим варіантом шкали для логарифмічної лінійки. Саме логарифмічна лінійка і таблиці логарифмів були основними засобами наближених обчислень аж до впровадження мікрокалькуляторів та комп'ютерів (кінець XX ст.).

Запитання і вправи для повторення розділу VI

1. Що називають логарифмом числа? Чому дорівнює логарифм числа 81 за основою 3?

2. Для яких значень a і b має зміст вираз $\log_a b$?

3. Запишіть основну логарифмічну тотожність.

4. Сформулюйте властивості логарифмів.

5. Яку функцію називають логарифмічною? Наведіть приклади логарифмічних функцій.

6. Які властивості має функція $y = \log_a x$, де $a > 1$?

7. Які властивості має функція $y = \log_a x$, де $0 < a < 1$?

Знайдіть значення виразу:

1038. а) $0{,}5\log_2 64 - 4\log_5 \frac{1}{5}$; б) $\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{4}} 16 + \frac{1}{9}\lg 0{,}001$.

1039. а) $7^{\log_7 2+1}$; б) $3^{2\log_3 5}$; в) $0{,}01^{\lg 3-1}$; г) $\left(\sqrt{7}\right)^{2\log_7 8}$.

1040. а) $\log_4 12 + \log_4 \frac{1}{3}$; б) $\log_3 15 - \log_3 45$;

в) $\lg 30 + \lg 20 - \lg 6$; г) $2\log_4 10 - \frac{1}{2}\log_4 625$;

д) $\log_9 4 \cdot \log_2 9$; е) $\dfrac{\log_5 36 - \log_5 4}{2\log_5 3 - \log_5 27}$.

1041*. а) $\log_2 5 \cdot \log_5 9 \cdot \log_9 0{,}5$; б) $7^{\frac{\log_3 4}{\log_3 7}} - 9^{\frac{1}{\log_4 3}} + 125^{\frac{1}{3}+\log_5 2}$.

1042. Розв'яжіть рівняння:

а) $2^x = 10$; б) $5^{2-x} = 3$; в)* $4^x = 3^{x-1}$; г)* $3^x \cdot 5^{2-x} = 1$.

1043. Знайдіть:

а) $\lg 8$, якщо $\log_2 5 = c$; б) $\log_4 5$, якщо $\lg 2 = a$.

1044. Прологарифмуйте вираз за основою 10, якщо $a > 0$, $b > 0$:

а) $100a^3b$; б) $a^{-4}b^{\frac{1}{3}}$; в) $\dfrac{10\sqrt{ab^{-5}}}{a^3}$; г) $\dfrac{0{,}001\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[4]{ab^2}}$.

1055. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 5; \\ x - 2y = 12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \log_{\sqrt{2}}(y - x) = 4; \\ 3^x \cdot 2^y = 576; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \log_5(x - y) + \log_5 x = \log_5 12; \\ \log_5(x - y) + \log_5 y = \log_5 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^{\lg y} = 100; \\ \log_y x = 2. \end{cases}$

Розв'яжіть нерівність:

1056. а) $\log_2(x - 4) \geq 2$; б) $\log_{\frac{1}{4}}(3 - 2x) > -1$;

в) $\log_3(x + 1) < \log_3(3x - 1)$; г) $\log_{0,2}(5 - x) \leq \log_{0,2}(2 + x)$;

д) $\log_5(x^2 - 4x + 1) > \log_5(x - 3)$; е) $\log_{0,5}(4x - x^2) > \log_{0,5} x$.

1057. а) $0,4^{4 - \log_2 x} > 0,4^{2 + \log_2 x}$; б)* $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{0,3} \log_3 \frac{x-2}{x-4}} \geq 1$.

1058. а) $\log_6^2 x - \log_6 x - 6 \geq 0$; б) $\log_2 x < \frac{4}{\log_2 x}$.

1059*. а) $\log_{4-x}(x - 1) \geq 0$; б) $\log_{x-3}(x - 1) < 2$.

1060. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = \sqrt{\log_{0,2}(8 - 10x)}$; б) $y = \log_3 \log_2 x - \sqrt{1 - \log_2 x}$.

1061. Знайдіть усі значення x, для яких графік функції $y = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 2x) + 1$ розташований нижче від осі абсцис.

1062*. Розв'яжіть нерівність $\log_a(x - 1) > \log_a(3 - x)$ з параметром a.

1063*. Дано функцію $f(x) = \log_4(x^2 - 1) - \frac{1}{2}\log_4(x - 4)^2$.

а) Знайдіть область визначення функції.

б) Розв'яжіть рівняння $f(x) = 1,5$.

Завдання для самоперевірки №6

І рівень

1. Яка логарифмічна рівність випливає з рівності $4^3 = 64$?

   а) $\log_4 3 = 64$; б) $\log_3 64 = 4$; в) $\log_4 64 = 3$; г) $\log_3 4 = 64$.

2. Яка з рівностей є правильною?

   а) $\log_2 16 = 8$; б) $\log_2 16 = 4$; в) $\log_4 16 = 4$; г) $\log_2 16 = 3$.

3. Яке з чисел є значенням виразу $\log_6 2 + \log_6 18$?

   а) $\log_6 20$; б) 1; в) 2; г) 3.

4. Вкажіть число, яке є коренем рівняння $\log_3(2x-5) = 1$:

   а) 2; б) 2,5; в) 7; г) 4.

5. Вкажіть множину розв'язків нерівності $\log_2 x < \log_2 3$:

   а) $(0; 3)$; б) $(3; +\infty)$; в) $(-\infty; 3)$; г) $(-\infty; 0)$.

ІІ рівень

1. Обчисліть:

   а) $3\log_3 81 - \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$; б) $\log_4 18 - \log_4 9$.

2. Знайдіть область визначення функції:

   а) $y = \log_{0,1}(8-5x)$; б) $y = \log_2(x^2 - 2x - 3)$.

3. Порівняйте числа:

   а) $\log_{1,2} 8$ і $2\log_{1,2} 3$; б) $\log_5 4$ і 1.

4. Розв'яжіть рівняння:

   а) $\log_3(3x-1) = \log_3(5-x)$; б) $\log_5(x^2 - 4x) = 1$.

5. Розв'яжіть нерівність:

   а) $\log_3(2x-1) > 2$; б) $\log_2(4-2x) < 3$.

III рівень

1. Знайдіть значення виразу:

а) $\dfrac{3\log_5 3-\log_5 9}{\log_5 30+\log_5 0,3}$; б) $3^{-2\log_3 4}-2^{\log_4 9}$.

2. Прологарифмуйте вираз $\dfrac{\sqrt[5]{0,25a\sqrt{128}}}{2\sqrt{8a^{-0,5}}}$ за основою 4.

3. Розв'яжіть рівняння:

а) $\log_2(x+3)-\log_2(x-3)=\log_2(2x-1)$;

б) $\log_9^2 x+\log_9\sqrt{x}-1,5=0$.

4. Розв'яжіть нерівність:

а) $\log_{0,5}(x^2-2x)<\log_{0,5}(x-2)$; б) $2\log_2 x>\log_2(x+6)$.

5. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases}\log_6 x+\log_6 y=1;\\ 4x-3y=6;\end{cases}$ б) $\begin{cases}2^{1+\lg(x+y)}=4;\\ \lg(x+y)+\lg(2y)=2.\end{cases}$

IV рівень

1. Спростіть вираз $a^{1+\frac{1}{2\log_4 a}}+8^{\frac{2}{3\log_a 2}}-7^{\log_{49}a^2}$.

2. Знайдіть $\log_{49}16$, якщо $\log_{14}2=a$.

3. Розв'яжіть рівняння:

а) $\log_{25}\left(\frac{1}{5}\log_3\left(2-\log_{0,5}x\right)\right)=-\frac{1}{2}$; б) $\log_4 x+\log_2\left(\sqrt{x}-1\right)=1$.

4. Розв'яжіть нерівність:

а) $\log_{0,5}\log_3(x^2-1)\geq 0$; б) $\log_{2x+1}(2x^2-3x-1)>0$.

5. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases}2\left(\log_y x+\log_x y\right)=5;\\ xy=8;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\log_x(xy)=\log_y x^2;\\ y^{2\log_y x}=4y+3.\end{cases}$