ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. Яка послідовність називається нескінченно великою?

2. Який зв'язок існує між нескінченно малими та нескінченно великими числовими послідовностями?

3. Сформулювати і довести теорему про зв'язок між нескінченно великою і нескінченно малою послідовностями.

4. Сформулювати і довести теорему, обернену до попередньої.

ВПРАВИ

7. При яких значеннях k послідовність (x_n), $x_n = n^k$ є: 1) нескінченно малою; 2) нескінченно великою?

8. Навести приклади двох нескінченно великих послідовностей (x_n) та (y_n) таких, що:

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=0;\ 2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=a\neq 0;\ 3)\ \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}\ \text{не існує.}$$

9. Довести, що коли $0 < k < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty}((n+1)^k - n^k) = 0$.

10. Знайти границю послідовності (x_n)

$$x_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\ \ (n \to \infty).$$

11. Довести, що добуток двох нескінченно великих послідовностей є нескінченно великою послідовністю. Що можна сказати про суму двох нескінченно великих послідовностей? Навести приклади.

▲ §5. Основні теореми про границі

Знаходження границі числової послідовності на основі тільки означення границі викликає часто певні труднощі, оскільки: треба наперед знати «підозріле» на границю число; не завжди за заданим ε можна знайти N.

Тому на практиці для знаходження границі числових послідовностей користуються такими теоремами.

Теорема 1.

Нехай послідовності (x_n) і (y_n) мають відповідно границі a і b. Тоді послідовність $(x_n + y_n)$ має границю $a + b$.

Доведення. Якщо a і b є відповідно границі (x_n) і (y_n), то $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, де (α_n) і (β_n) —нескінченно малі послідовності.

Додавши почленно ці рівності, дістанемо

$$x_n + y_n = a + b + \alpha_n + \beta_n.$$

Отже, послідовність $(x_n + y_n)$ подано у вигляді суми сталого числа $a + b$ і нескінченно малої послідовності $(\alpha_n + \beta_n)$. Тому існує $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n)$ і дорівнює $a + b$, тобто

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = a + b}\,.$$

Теорема 2.

Нехай послідовності (x_n) і (y_n) мають відповідно границі a, b. Тоді послідовність $(x_n y_n)$ має границю, яка дорівнює ab, тобто

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n = ab}\,.$$

Д о в е д е н н я. Послідовності (x_n) і (y_n), за умовою даної теореми, можна подати у вигляді $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b_n + \beta_n$, де (α_n) і (β_n) — нескінченно малі послідовності. Тоді

$$x_n \cdot y_n = ab + a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n.$$

У даній рівності сума останніх трьох доданків є нескінченно малою послідовністю. Тому $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab$.

Теорему доведено.

Зазначимо, що теореми 1 і 2 справедливі й для більшого числа доданків (співмножників). З теореми 2 випливають **на- слідки.**

Сталий множник можна виносити за знак границі. Справді, нехай $x_n = c$, а y_n має границю. Тоді

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n = c \lim_{n\to\infty} y_n}\,.$$

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ і k — натуральне число, то

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}(x_n^k) = (\lim_{n\to\infty} x_n)^k = a^k}\,.$$

Теорема 3.

Нехай послідовності (x_n) і (y_n) мають скінченні границі, які відповідно дорівнюють $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, причому $b \neq 0$. Тоді послідовність $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$ має скінченну границю, яка дорівнює $\dfrac{a}{b}$.

Д о в е д е н н я. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$, то можна було б довести, що знайдеться таке N, що при $n > N$ справджується нерівність $|y_n| > r > 0$, де r — стале число.

Надалі обмежимося тими значеннями членів послідовності (y_n), які задовольняють попередню нерівність. Тоді

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{by_n}(b\alpha_n - a\beta_n),$$

де (α_n), (β_n) — нескінченно малі послідовності.

Покажемо, що послідовність, яка міститься в правій частині попередньої рівності, є нескінченно малою. Справді,

$$\frac{1}{|by_n|} < \frac{1}{|b|r}.$$

Отже, послідовність $\left(\frac{1}{by_n}\right)$ є обмеженою. Послідовність $(b\alpha_n - a\beta_n)$ є нескінченно малою.

Таким чином, послідовність $(\gamma_n) = \left(\frac{1}{by_n}(b\alpha_n - a\beta_n)\right)$ є нескінченно малою. Тому $\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} + \gamma_n$. Теорему доведено.

Послідовність (y_n) називають **неспадною (незростаючою)**, якщо для будь-якого $n \in N$ справджується нерівність $y_{n+1} \geq y_n$ $(y_{n+1} \leq y_n)$, тобто значення кожного наступного члена послідовності не менші (не більші) за значення попереднього її члена. Неспадні та незростаючі послідовності називають **монотонними.**

Якщо значення членів монотонної послідовності (y_n) для будь-якого $n \in N$ задовольняють строгу нерівність $y_{n+1} > y_n$ $(y_{n+1} < y_n)$, то послідовність (y_n) називають **зростаючою (спадною)**. Зростаючі та спадні послідовності називають також **строго монотонними**.

Сформулюємо без доведення ще дві важливі теореми, які стосуються існування границі числової послідовності.

Теорема 4 (Веєрштрасса).

Зростаюча або спадна обмежена послідовність має границю.

Теорема 5.

Якщо послідовність (x_n) має границю a, то ця границя єдина.

Приклад 1. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n!}\sin n^2 + a^{\frac{1}{n}}\right)$, $a > 1$. (За означенням $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, читають «ен факторіал».)

Р о з в' я з а н н я. Використаємо теорему про границю суми. Для цього з'ясуємо, чи існують границі доданків. Послідовності $\left(\frac{1}{n}\right)$, $\left(\frac{1}{n!}\right)$ є нескінченно малими, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ і $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n!} = 0$. Послідовність $(\sin n^2)$ є обмеженою: $|\sin n^2| \leq 1$.

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n!} \sin n^2 = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$. Границі доданків існують. Тому

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n!}\sin n^2+a^{\frac{1}{n}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\sin n^2+\lim_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1.$$

Приклад 2. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$.

Р о з в' я з а н н я. Для знаходження цієї границі використаємо теорему про границю частки. Для цього знайдемо окремо границю чисельника і границю знаменника, використовуючи формулу суми n членів геометричної прогресії:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{2^n}\right)=2;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2\cdot 3^n}\right)=\frac{3}{2}.$$

Отже, границі послідовностей у чисельнику і знаменнику заданого дробу існують, причому границя знаменника не дорівнює нулю. Тому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3^n}}=\frac{4}{3}.$$

Приклад 3. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}} = 1$ $(a > 1)$.

Р о з в' я з а н н я. Запишемо степінь $a^{-\frac{1}{n}}$ у вигляді $a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}}$. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$ $(a > 1)$, то до попереднього відношення можна застосувати теорему 3 про границю частки. Тоді матимемо

$$\lim_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1}{\lim\limits_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{1}=1.$$

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. Сформулювати і довести теорему про границю суми послідовностей, які мають границю.

2. Сформулювати і довести теорему про границю добутку двох послідовностей, які мають границю.

3. Сформулювати і довести теорему про границю частки двох послідовностей (x_n) і (y_n), які мають границі a і b, причому $b \neq 0$.

4. Сформулювати теорему Веєрштрасса.

5. Сформулювати теорему про єдиність границі числової послідовності.

ВПРАВИ

12. Користуючись основними теоремами про границі, знайти границі послідовностей, у яких члени з номером n ($n = 1, 2, \ldots$) дорівнюють:

1) $y_n = \dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{2n}{3n+1}$; 2) $y_n = \dfrac{1}{2n}\cos n^3 - \dfrac{3n}{6n+1}$;

3) $y_n = (-1)^n \dfrac{1}{n}$; 4) $y_n = \dfrac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{4^n}}$.

§ 6. Границя функції неперервного аргументу

1. Поняття про границю функції. У попередніх параграфах ми ознайомилися з поняттям границі числової послідовності, або границі функції натурального аргументу. У таких функціях аргумент змінюється розривно (дискретно), набуваючи значень $1, 2, \ldots, n, \ldots$.

Розглянемо функцію $y = f(x)$, де аргумент змінюється неперервно (набуває всіх значень з певного проміжку $\langle a; b\rangle$[1], крім, можливо, однієї внутрішньої точки даного проміжку).

Наведемо два приклади.

Приклад 1. Простежимо, як змінюються значення функції $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$, коли значення аргументу x як завгодно близько наближається до числа 2. Символічно це позначають так: $x \to 2$. З малюнка 3 випливає, що коли $x \to 2$ зліва або справа, то відповідні значення функції $f(x)$ як завгодно близько наближаються до числа 4, тобто ці значення мало відрізнятимуться від числа 4.

У такому разі кажуть, що функція $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$ має

[1] Тут і далі символом $\langle a; b\rangle$ позначатимемо будь-яку множину чисел: інтервал $(a; b)$, відрізок $[a; b]$, проміжки $[a; b)$ або $(a; b]$, причому a і b можуть бути і невласними числами $+\infty$ або $-\infty$.