3) $y = x^2 + 3x + 1$, $f'(1)$; 4) $y = \sqrt[3]{x}$, $f'(4)$.

28. 1) Знайти рівняння дотичної до синусоїди $y = \sin x$ у точці $M_0\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$.

2) Довести, що дотична до прямої $y = kx + b$ у будь-якій точці збігається із самою прямою.

B

29. Знайти похідну функції:

1) $y = x^{-4}$, $f'(1)$; 2) $y = x|x|$, $f'(0)$; 3) $y = \sqrt[4]{x}$; 4) $y = \operatorname{ctg} x$.

30. Знайти рівняння дотичної до параболи $y = 2 - \frac{x}{2} - x^2$ у точці перетину її з віссю ординат.

31. Відомо, що точка рухається за законом $s = \frac{1}{\sqrt{t+8}}$. Знайти миттєву швидкість руху точки в момент часу $t = 2$ с.

§ 11. Похідні елементарних функцій

Виведемо формули для похідних елементарних функцій, причому на відміну від попередніх прикладів, знаходитимемо похідну в довільній точці.

1. Похідна сталої функції. Нехай на деякому проміжку $\langle a; b\rangle$ задано сталу функцію $y = c = \text{const}$. Тоді її значення у точках x і $x + \Delta x$ рівні між собою при будь-якому x. Тому приріст $\Delta y = 0$, а отже, й $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$.

Перейшовши до границі в останній рівності, коли $\Delta x \to 0$, знаходимо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0.$$

Отже, границя відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, коли $\Delta x \to 0$, існує і дорівнює нулю. Тому існує і похідна цієї функції у довільній точці x, яка також дорівнює нулю, тобто, якщо $y = c = \text{const}$, то $y' = 0$, тобто, $c' = 0$.

Похідна сталої функції дорівнює нулю.

Наприклад, якщо $y = 2$, то $y' = 0$.

2. Похідна степеневої функції з цілим показником. Розглянемо спочатку окремі приклади.

Приклад 1. Знайдемо похідну функції $y = x$ у довільній точці x.

Знайдемо приріст цієї функції Δy в точці x:

$$\Delta y = x + \Delta x - x = \Delta x.$$

Тоді $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$

Знайдемо границю $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 1 = 1.$

Отже,

похідна y' функції $y = x$ у будь-якій точці x існує і дорівнює 1, тобто $x' = 1$.

Раніше доведено, що похідна функції $y = x^2$ у точці x дорівнює $2x$, тобто $(x^2)' = 2x$.

Приклад 2. Знайдемо похідну функції $y = x^3$ у довільній точці x.

Знайдемо приріст функції $\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$.

Тоді $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2$.

Перейдемо в цій рівності до границі, коли $\Delta x \to 0$. Дістанемо $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x^2$.

Отже, похідна y' функції $y = x^3$ у точці x існує і дорівнює $y' = 3x^2$, тобто $(x^3)' = 3x^2$.

У розглянутих прикладах помічаємо таку закономірність: похідні степеневих функцій x, x^2, x^3 дорівнюють показнику степеня, помноженому на x у степені, на одиницю меншому:

$$y = x,\ y' = 1x^0,\ y = x^2,\ y' = 2x,\ y = x^3,\ y' = 3x^2.$$

Переконаємося, що дана закономірність виконується для степеневої функції $y = x^n$ з будь-яким натуральним показником:

$$y = x^n,\ y' = nx^{n-1}. \qquad (1)$$

Формулу (1) доведемо в наступному параграфі (див. с. 70).

Розглянемо ще приклади.

Приклад 3. Знайти похідну функції $y = \frac{1}{x}$ у будь-якій точці $x \neq 0$.

Надамо x довільного приросту Δx, але такого, щоб $x + \Delta x \neq 0$. Тоді функція y дістане приріст

$$\Delta y = \frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}.$$

Знайдемо $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x+\Delta x)}$.

Перейдемо в цій рівності до границі, коли $\Delta x \to 0$. Дістанемо $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x(x+\Delta x)} = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$.

Отже, похідна y' функції $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$ існує і дорівнює $y' = -x^{-2}$.

Приклад 4. Знайти похідну функції $y = \frac{1}{x^2}$ у будь-якій точці $x \neq 0$.

Надамо x такого приросту Δx, щоб $x + \Delta x \neq 0$. Тоді функція y дістане приріст

$$\Delta y = \frac{1}{(x+\Delta x)^2} - \frac{1}{x^2} = -\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{x^2(x+\Delta x)^2} = -\frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{x^2(x+\Delta x)^2}.$$

Знайдемо $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{2x+\Delta x}{x^2(x+\Delta x)^2}$. Перейдемо у цій рівності до границі при $\Delta x \to 0$. Дістанемо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(-\frac{2x+\Delta x}{x^2(x+\Delta x)^2}\right) = -\frac{2}{x^3} = -2x^{-3}.$$

Отже, похідна y' функції $y = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$ існує і дорівнює $y' = -2x^{-3}$.

Приклади 3, 4 дають підставу зробити такий висновок:

похідна функції $y = x^{-k}$, де $k > 0$ — ціле число, існує у кожній точці $x \neq 0$ і дорівнює

$$\boxed{y' = -kx^{-k-1}}. \qquad (2)$$

Формулу (2) також доведемо в наступному параграфі.

Формули (1) і (2) дають змогу сформулювати таке твердження:

похідна степеневої функції $y = x^m$ з цілим показником існує і дорівнює показнику степеня, помноженому на x у степені, на одиницю меншому, тобто

$$\boxed{y' = mx^{m-1}} \qquad (3)$$

(коли $m < 0$, x не може дорівнювати нулю).

Так, наприклад, $y = x^{10}$, $y' = 10x^9$, $y = x^{-5}$, $y' = -5x^{-6}$.

Нижче буде доведено, що формула (3) правильна і для дробового показника. Тоді можна вивести формулу похідної для функції $y = \sqrt[n]{x}$. Справді,

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n}x^{\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

Приклад 5. Знайти похідну від функції $y = \sqrt{x}$.

Надамо x приросту Δx, щоб $x + \Delta x \neq 0$. Тоді

$$y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x}.$$

Знайдемо приріст функції Δy:

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}.$$

Складемо відношення:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}.$$

Знайдемо границю відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, коли $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x+\Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Отже, похідна y' функції $y = \sqrt{x}$ існує і дорівнює

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

3. Похідні тригонометричних функцій.

Похідна функції $y = \sin x$. Надамо x довільного приросту $\Delta x \neq 0$. Тоді функція y дістане приріст

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}.$$

Перейдемо у цій рівності до границі, коли $\Delta x \to 0$. Внаслідок неперервності функції $\cos x$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos\left(\lim_{\Delta x \to 0}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right) = \cos x.$$

Для першого співмножника, позначивши $\frac{\Delta x}{2} = \alpha$, маємо:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1.$$

Тому $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right) = \cos x.$

Отже, **похідна функції $y = \sin x$ існує в довільній точці $x \in (-\infty; +\infty)$ і дорівнює $\cos x$, тобто**

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}. \quad (4)$$

Похідна функції $y = \cos x$. Аналогічно доводиться, що

похідна функції $y = \cos x$ у довільній точці $x \in (-\infty; +\infty)$ існує і дорівнює $-\sin x$, тобто

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}. \quad (5)$$

Похідна $y = \operatorname{tg} x$. Візьмемо довільну точку $x \in \langle a; b\rangle$, де $\langle a; b\rangle$ — один із інтервалів, у якому визначена функція $\operatorname{tg} x$. Знайдемо приріст

$$\Delta y = \frac{\sin(x+\Delta x)}{\cos(x+\Delta x)} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin(x+\Delta x)\cos x - \sin x\cos(x+\Delta x)}{\cos(x+\Delta x)\cos x} =$$

$$= \frac{\sin \Delta x}{\cos(x+\Delta x)\cos x}.$$

Складемо відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\frac{\sin \Delta x}{\Delta x}}{\cos(x+\Delta x)\cos x}$. Перейдемо до границі, коли $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\sin \Delta x}{\Delta x}}{\cos(x+\Delta x)\cos x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Отже,

похідна функції $y = \operatorname{tg} x$ існує і дорівнює

$$\boxed{(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}}. \qquad (6)$$

Похідна функції $y = \operatorname{ctg} x$. Аналогічно доводиться, що

похідна функції $y = \operatorname{ctg} x$ існує в довільній точці $x \in \langle a; b\rangle$, де $\langle a; b\rangle$ —один із інтервалів, у якому визначена функція $\operatorname{ctg} x$, і дорівнює

$$\boxed{(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}}.$$

Виконайте доведення самостійно.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. Чому дорівнює похідна степеня з натуральним показником?

2. Чому дорівнює похідна степеневої функції з цілим показником?

3. Чому дорівнює похідна тригонометричних функцій $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$?

4. Чому дорівнює похідна функції $y = \sqrt[5]{x^2}$?

ВПРАВИ

32. Вивести формулу похідної функції $y = \sqrt[3]{x}$.

33. Користуючись означенням похідної, знайти похідну функції:

а) $y = \frac{k}{x}$; б) $y = 3 - 5x$;

в) $f(x) = kx + b$; г) $y = 3x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2$.

§ 12. Теореми про похідні алгебраїчної суми, добутку і частки функцій

Доведемо ряд теорем, які широко використовуються для знаходження похідних функцій.

Похідна суми. Теорема 1.

Якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ у точці x мають похідні, то функція $y = f_1(x) \pm f_2(x)$ у цій точці також має похідну, яка дорівнює

$$\boxed{y' = (f_1(x) \pm f_2(x))' = f_1'(x) \pm f_2'(x)}.$$

Доведення. Надамо x деякого приросту Δx. Тоді функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ матимуть прирости $\Delta f_1(x)$ і $\Delta f_2(x)$, а функція y матиме приріст $\Delta y = \Delta f_1(x) \pm \Delta f_2(x)$.

Знайдемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f_1(x)}{\Delta x} \pm \frac{\Delta f_2(x)}{\Delta x}$.

Перейдемо у цій рівності до границі, коли $\Delta x \to 0$. Оскільки $f_1(x)$ і $f_2(x)$ у точці x за умовою теореми мають похідні, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f_1(x)}{\Delta x} = f'_1(x), \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f_2(x)}{\Delta x} = f'_2(x).$$

Тому $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f_1(x)}{\Delta x} \pm \frac{\Delta f_2(x)}{\Delta x} \right) =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f_1(x)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f_2(x)}{\Delta x} = f_1'(x) \pm f_2'(x).$$

Отже, згідно з означенням похідної у точці x, існує похідна функції y, яка дорівнює

$$y' = f_1'(x) \pm f_2'(x). \qquad (1)$$

Теорему 1 можна узагальнити для будь-якої скінченної суми функцій: