РОЗДІЛ

3 ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ

Подібно до того, як Архімед, відкривши закон важеля, сказав: «Дайте мені точку опори, і я зрушу Землю», так і Ньютонові сучасники говорили: «Складіть нам диференціальні рівняння усіх рухів у природі і навчіть нас їх інтегрувати, тоді ми будемо подібні до Бога, бо за допомогою обчислень точно знатимемо майбутні події.

Д. О. Граве

§ 15. Зростання, спадання функції. Екстремальні точки

1. Поняття зростаючої і спадної функції в точці. Максимум

$\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - 2.$

7) $y = \frac{\quad}{x-2}$; 8) $y =$

Б

10) $f(x) = \frac{5}{x+1}$;

9) $f(x) = (x - 3)\sqrt{x}$

12) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$;

11) $f(x) = x - x^3$;

$+ x - 8$; 14) $g(x) = x^4 - 4x + 3$.

13) $f(x) = x^3 + 3x^2$

В

; 16) $y = \frac{x^3}{1-x}$; 17) $y = \sqrt{x - 4x^2}$;

15) $y = x^4 - 2x^2 - 3$

19) $y = \sin x - \frac{1}{2}x$;

18) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x}$;

$+ 3)^2$.

20) $y = (x - 1)^3(2x$

ьний екстремум функції

§ 16. Локал

ння екстремальних точок і екстремуму доведені теореми, за допомогою яких тремальні точки, а отже, і екстремум ами, ці теореми дають змогу досліджу- емум.

о, що екстремальні точки, як випливає очки, в яких функція набуває відповідно

У § 15 дано означе функції. Далі будуть можна знаходити ек функції. Іншими слов вати функції на екстр

Спочатку зазначим з означення, це такі т

а для кожного x з інтервалу $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ $\sin x > 0$. У точці $x_0 = 0$ $\sin x = 0$.

Функція $y = f(x)$ називається спадною в точці x_0, якщо існує інтервал $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, який знаходиться у проміжку $\langle a; b\rangle$ і такий, що $f(x) > f(x_0)$ для будь-якого x з інтервалу $(x_0 - \delta; x_0)$ і $f(x) < f(x_0)$ для будь-якого x з інтервалу $(x_0; x_0 + \delta)$.

Приклад 3. Довести, що функція $y = \sin x$ у точці $x = \pi$ є спадною.

Р о з в' я з а н н я. Візьмемо інтервал $(0; 2\pi)$, який містить точку π. Тоді для всіх x з інтервалу $(0; \pi)$ $\sin x > 0$; а для всіх x з інтервалу $(\pi; 2\pi)$ $\sin x < 0$. У точці $x = \pi$ $\sin x = 0$.

Приклад 4. Довести, що функція $y = \frac{1}{x}$ у точці $x = 1$ є спадною.

Р о з в' я з а н н я. Візьмемо інтервал $(0; 2)$. Тоді для всіх x з інтервалу $(0; 1)$ $f(x) = \frac{1}{x} > 1$, $f(1) = 1$, а для всіх x з інтервалу $(1; 2)$ $f(x) < 1$.

Якщо існує інтервал $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, де $\delta > 0$, який міститься у проміжку $\langle a; b\rangle$ і такий, що $f(x) < f(x_0)$ для всіх x з інтервалу $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ $(x \neq x_0)$, то точку x_0 називають точкою максимуму функції $y = f(x)$, а саме число $f(x_0)$ — максимумом функції $y = f(x)$.

Приклад 5. Довести, що точка $x_0 = 0$ є точкою максимуму функції $y = \cos x$.

Р о з в' я з а н н я. Візьмемо інтервал $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, який містить точку $x = 0$. Оскільки $f(x) = \cos x$ у точці $x = 0$ дорівнює одиниці, а для всіх x з інтервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ $(x \neq 0)$ $\cos x < 1$, то $x = 0$ є точкою максимуму функції $y = \cos x$. Число 1 є максимумом функції $y = \cos x$.

Приклад 6. Довести, що точка $x = 0$ є точкою максимуму функції $f(x) = \frac{1}{\quad}$

...ення при певних значен-
...азивається **окремим розв'язком** цього
...ння.

...вище прикладі $y'' + y = 0$ розв'язок $y =$
...льним, а розв'язок $y = \cos x$ — окре-

...шого окремий розв'язок конкретного
...ння знаходять із загального розв'язку,

...нях довільних сталих на
...диференціального рівня

Так, у розглянутому
$= A\sin x + B\cos x$ є зага
мим.

На практиці здебільш
диференціального рівня

Наприклад, в інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ ця функція зростає, а в інтервалі $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ спадає. Точки $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ є точками екстремуму (див. мал. 13).

Для функції, яка має похідну, існують прості достатні ознаки зростання (спадання) її в точці.

Теорема 1.

Якщо функція $y = f(x)$ у внутрішній точці x_0 проміжку $\langle a; b\rangle$ має похідну $f'(x_0)$ і $f'(x_0) > 0$ ($f'(x_0) < 0$), то функція $y = f(x)$ в точці x_0 зростає (спадає).

Доведення. Розглянемо випадок, коли $f'(x_0) > 0$. Доведемо, що в такому разі функція $y = f(x)$ у точці x_0 зростає. Скористаємося означенням похідної

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}, \text{ де } \Delta x = x - x_0.$$

Тоді з попередньої рівності та умови теореми випливає така нерівність:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0.$$

При цьому знайдеться інтервал $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, $\delta > 0$ такий, що для всіх x з цього інтервалу, крім точки $x = x_0$, справджуватиметься нерівність: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$.

Нехай $x_0 - \delta < x < x_0$. Тоді з попередньої нерівності випливає, що $f(x) < f(x_0)$.

Нехай $x_0 < x < x_0 + \delta$. Тоді з тієї самої нерівності маємо $f(x) > f(x_0)$.

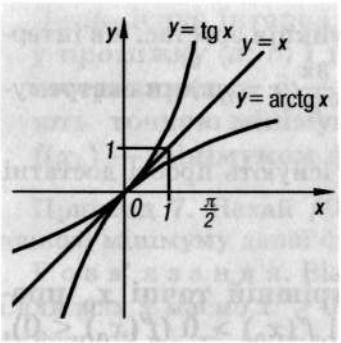
Отже, існує інтервал $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ такий, що для всіх x з інтервалу $(x_0 - \delta; x_0)$ матимемо $f(x) < f(x_0)$, а для всіх x з інтервалу $(x; x_0 + \delta)$ матимемо $f(x) > f(x_0)$, а це й означає, що в точці x_0 функція є зростаючою. Теорему доведено.

Аналогічно доводиться теорема і для $f'(x_0) < 0$.

Приклад 9. Довести, що функція $f(x) = \operatorname{arctg} x$ є зростаючою в інтервалі $(-\infty; +\infty)$.

Розв'язання. В курсі математичного аналізу доведено, що $f'(x) = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

У кожній точці інтервалу $(-\infty; +\infty)$ $f'(x) > 0$. Отже, за попередньою теоремою, функція $f(x) = \operatorname{arctg} x$ є зростаючою в кожній точці даного інтервалу. Це видно з графіка цієї функції (мал. 19).



Мал. 19

Приклад 10. Знайти інтервали зростання і спадання функції:

а) $f(x) = x^3 + 2x - 5$;

б) $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

Р о з в' я з а н н я. а) Знайдемо похідну $f'(x) = 3x^2 + 2$. Неважко помітити, що при будь-якому x з інтервалу $(-\infty; +\infty)$ $f'(x) > 0$. Отже, функція $f(x) = x^3 + 2x - 5$ на всій числовій осі є зростаючою.

б) Знайдемо похідну

$$f'(x) = 2\frac{(1+x^2)-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = 2\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Знайдемо точки, в яких $f'(x) > 0$. Це всі точки, в яких $1 - x^2 > 0$. Розв'яжемо нерівність $x^2 < 1$, $|x| < 1$, або $-1 < x < 1$.

Отже, в інтервалі $(-1; 1)$ функція зростає. Тоді в інтервалах $(-\infty; -1)$, $(1, +\infty)$ функція спадає. Звідси робимо висновок, що точка $x = -1$ є точкою мінімуму, а точка $x = 1$ — точкою максимуму даної функції. Мінімум функції дорівнює $f(-1) = -1$, а максимум $f(1) = 1$ (мал. 20).

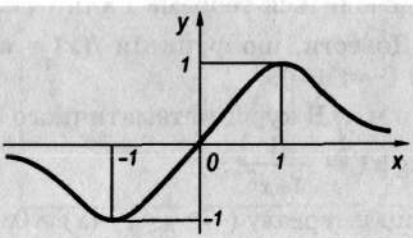
ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. Яка функція називається зростаючою (спадною) в точці?

2. Яка функція називається зростаючою (спадною) на проміжку?

3. Сформулювати ознаку зростання (спадання) функції в точці.

4. Сформулювати ознаку зростання (спадання) функції на проміжку.



Мал. 20

5. Яка точка називається точкою максимуму (мінімуму) функції?

6. Що називається максимумом (мінімумом) функції?

7. Яка точка називається екстремальною для функції $y = f(x)$?

ВПРАВИ

47. Знайти інтервали зростання і спадання функції:

А

1) $y = x^4$; 2) $y = (x - 2)^2$; 3) $y = 2 - x^3$;

4) $y = 1 + \frac{2}{x}$; 5) $y = ax^2 + bx + c$; 6) $y = \sqrt{x}$;

7) $y = \frac{3}{x-2}$; 8) $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - 2$.

Б

9) $f(x) = (x - 3)\sqrt{x}$;

10) $f(x) = \frac{5}{x+1}$;

11) $f(x) = x - x^3$;

12) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$;

13) $f(x) = x^3 + 3x^2 + x - 8$;

14) $g(x) = x^4 - 4x + 3$.

В

15) $y = x^4 - 2x^2 - 3$; 16) $y = \frac{x^3}{1-x}$; 17) $y = \sqrt{x - 4x^2}$;

18) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x}$; 19) $y = \sin x - \frac{1}{2}x$;

20) $y = (x - 1)^3(2x + 3)^2$.

§ 16. Локальний екстремум функції

У § 15 дано означення екстремальних точок і екстремуму функції. Далі будуть доведені теореми, за допомогою яких можна знаходити екстремальні точки, а отже, і екстремум функції. Іншими словами, ці теореми дають змогу досліджувати функції на екстремум.

Спочатку зазначимо, що екстремальні точки, як випливає з означення, це такі точки, в яких функція набуває відповідно найбільшого чи найменшого значень порівняно із значеннями функції, яких вона набуває в точках, досить близьких до екстремальної. Такий екстремум називають **локальним ек-**