Прирівнюємо похідну до нуля і розв'язуємо утворене рівняння $6x^2 - 30x - 84 = 0$.

Звідси знаходимо стаціонарні точки: $x_1 = 7$; $x_2 = -2$.

Знаходимо похідну другого порядку: $f''(x) = 12x - 30$.

Тоді $f''(7) = 54 > 0$, $f''(-2) = -54 < 0$.

Отже, в точці $x_1 = 7$ функція має мінімум $f(7) = -629$, а в точці $x_2 = -2$ максимум $f(-2) = 100$.

Як бачимо, друге правило дослідження функції на екстремум простіше, ніж перше. Однак це правило застосовується до вужчого класу функцій. Його, зокрема, не можна застосовувати при дослідженні на екстремум тих точок, в яких похідна першого порядку не існує, а також до стаціонарних точок, в яких похідна другого порядку дорівнює нулю. У цих випадках треба застосовувати перше правило.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. Сформулювати теорему, яка стверджує можливість дослідження функцій на екстремум за допомогою похідної другого порядку.

2. Сформулювати правило дослідження функцій на екстремум за допомогою похідної другого порядку.

ВПРАВИ

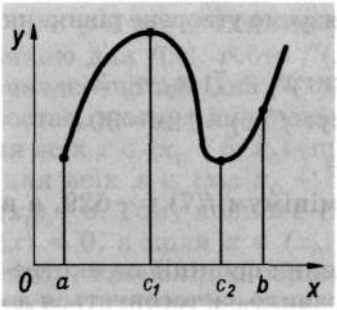
49. Дослідити функцію на екстремум за допомогою другої похідної:

1) $y = x + \frac{1}{x}$; 2) $y = 2x^2 - x^4$;

3) $y = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x$; 4) $y = e^x \sin x$.

§ 18. Знаходження найбільшого і найменшого значень функції

Нехай на відрізку $[a; b]$ задана неперервна функція $y = f(x)$. Тоді, як доводиться в курсі математичного аналізу, серед множини значень такої функції є найбільше і найменше числа. Ці числа і називаються відповідно **найбільшим** і **найменшим значеннями функції**. Постає питання: як знайти точки відрізка $[a; b]$, в яких функція набуває своїх найбільшого і найменшого значень?



Мал. 22

Зазначимо, що функція може набувати своїх найбільшого і найменшого значень як на кінцях відрізка, так і у внутрішніх його точках.

Так, на малюнку 22 зображено графік неперервної функції, яка у внутрішній точці c_1 відрізка $[a; b]$ набуває найбільшого значення, а у внутрішній точці c_2 — найменшого.

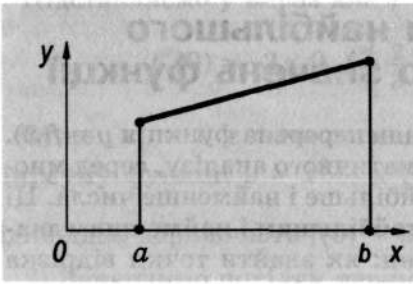
На малюнку 23 зображено графік функції, яка на кінцях відрізка набуває найменшого і найбільшого значень.

Може статися і так, що одного із значень функція набуває всередині відрізка, а другого — на одному з кінців. Так на малюнку 24 зображено графік неперервної функції, яка в лівому кінці відрізка (точці a) набуває найменшого значення, а у внутрішній точці (точці c) — найбільшого.

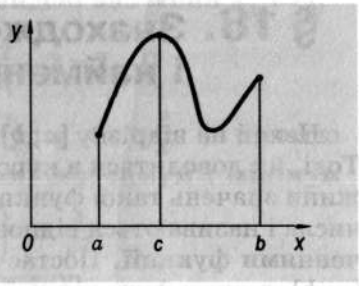
Якщо функція набуває найбільшого (найменшого) значення всередині відрізка, то це найбільше (найменше) значення є одночасно і локальним максимумом (мінімумом) заданої функції. Звідси випливає спосіб знаходження точок, в яких функція набуває найбільшого (найменшого) значення.

Щоб знайти найбільше (найменше) значення неперервної функції на відрізку $[a; b]$, треба знайти всі локальні максимуми (мінімуми) і порівняти їх зі значеннями функції, яких вона набуває на кінцях відрізка. Найбільше (найменше) число серед утвореної множини і буде найбільшим (найменшим) значенням функції, заданої на відрізку $[a; b]$.

Оскільки неперервна функція на відрізку $[a; b]$ обов'язково набуває свого найбільшого (найменшого) значення і воно може бути тільки в стаціонарних точках та на кінцях відрізка, то немає потреби перевіряти достатні умови існування екстремуму функції у стаціонарних точках. Досить обчислити значення функції у цих точках і порівняти їх зі значеннями функції



Мал. 23



Мал. 24

на кінцях відрізка, тобто з числами $f(a)$ і $f(b)$. Найбільше і найменше з усіх чисел і будуть відповідно найбільшим і найменшим значеннями функції $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$.

Якщо між точками (кінцями відрізка) a і b міститься тільки одна критична точка $x_0 \in (a; b)$ і в ній функція має максимум (мінімум), то без порівняння з числами $f(a)$ і $f(b)$ можна стверджувати, що цей максимум (мінімум) і є найбільшим (найменшим) значенням функції на відрізку $[a; b]$. У цьому разі не слід обчислювати значення функції на кінцях відрізка, а треба дослідити відразу функцію на екстремум. Значення функції у цій точці й буде відповідно найбільшим (найменшим) значенням функції.

Приклади. Знайти найбільше і найменше значення функції:

1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 1$ на $\left[-2; \frac{5}{2}\right]$;

2) $f(x) = \sin^2 x$ на $[0; 2\pi]$.

Р о з в' я з а н н я. 1) Знайдемо стаціонарні точки. Для цього знайдемо похідну $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$. Розв'язуючи рівняння $6x^2 - 6x - 12 = 0$, дістанемо стаціонарні точки $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

Обчислимо значення функції в точках x_1, x_2, а також на кінцях відрізка, тобто в точках $x_3 = -2$, $x_4 = \frac{5}{2}$. Маємо: $f(-1) = 6$; $f(2) = -21$; $f(-2) = -15$; $f\left(\frac{5}{2}\right) = -18\frac{1}{2}$.

Отже, найбільше значення дорівнює $f(-1) = 6$, найменше — $f(2) = -21$.

2) Знайдемо стаціонарні точки з рівняння $f'(x) = 0$, $\sin 2x = 0$. Звідси $x = \frac{\pi}{2}k$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

Ми повинні взяти точки, які належать відрізку $[0; 2\pi]$. Такими точками є: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$, $x_3 = \pi$, $x_4 = \frac{3\pi}{2}$, $x_5 = 2\pi$.

Отже, маємо три стаціонарні точки $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$. Точки 0 і 2π збігаються з кінцями відрізка. Обчислюємо значення функції у цих точках: $f(0) = f(\pi) = f(2\pi) = 0$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1$. Найменше значення функції дорівнює нулю, найбільше — одиниці.

Розглянемо кілька практичних задач, розв'язування яких зводиться до знаходження найбільшого чи найменшого значення певної функції.

Задача 1. Нехай маємо квадратний лист заліза зі стороною a.

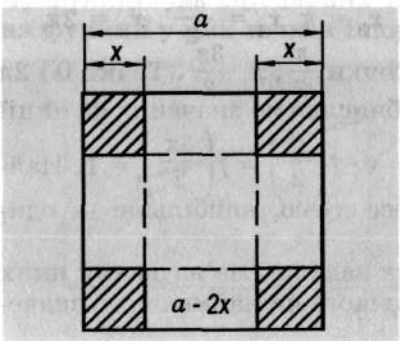
Треба в кожному куті його відрізати такі квадрати, щоб після згинання країв отримати ящик найбільшої місткості.

Р о з в' я з а н н я. Позначимо через x довжину сторони того квадрата, який слід відрізати (мал. 25), а через V — об'єм ящика. Тоді V є функцією від x, яка виражається формулою $V(x) = (a - 2x)^2x$, причому x змінюється на відрізку $\left[0; \frac{a}{2}\right]$. Оскільки $V(x)$ є неперервною функцією на відрізку $\left[0; \frac{a}{2}\right]$, то вона набуває на ньому найбільшого значення. На кінцях відрізка $V(x)$ не може набувати найбільшого значення, бо в цих точках $V = 0$. Отже, шукана точка міститься всередині відрізка. Знайдемо її. Для цього обчислимо спочатку похідну $V'(x) = -4(a - 2x)x + (a - 2x)^2 = (a - 2x)(a - 6x)$ і розв'яжемо рівняння $(a - 2x)(a - 6x) = 0$.

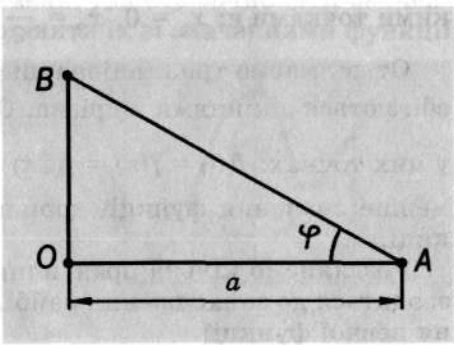
Звідси дістанемо корені $x_1 = \frac{a}{2}$ і $x_2 = \frac{a}{6}$. Точка x_1 не є стаціонарною, бо це кінець відрізка, на якому розглядається функція $V = V(x)$. Точка x_2 міститься всередині даного відрізка. Отже, точка $x_2 = \frac{a}{6}$ є стаціонарною і точкою максимуму. У ній функція $V = V(x)$ набуває найбільшого значення, яке дорівнює $V\left(\frac{a}{6}\right) = \frac{2}{27}a^3$.

Задача 2. Нехай електрична лампочка переміщується (наприклад, на блоці) уздовж вертикальної прямої OB (мал. 26). На якій відстані від горизонтальної площини слід її розмістити, щоб у точці A цієї площини освітленість була найбільшою, якщо $OA = a$?

Р о з в' я з а н н я. З курсу фізики відомо, що освітленість прямо пропорційна $\sin\varphi$ і обернено пропорційна квадрату відстані $AB = r$, тобто $E = k\frac{\sin\varphi}{r^2}$, де k — коефіцієнт пропорційності, який залежить від сили світла лампочки.



Мал. 25



Мал. 26

За незалежну змінну візьмемо висоту $x = OB$. Тоді

$$\sin\varphi = \frac{x}{r},\ r = \sqrt{x^2 + a^2},\ 0 < x < +\infty.$$

Отже, $E = k\dfrac{x}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Знайдемо похідну від $E(x)$: $E'(x) = k\dfrac{a^2-2x^2}{(x^2+a^2)^{\frac{5}{2}}}$ і розв'яжемо рівняння $k\dfrac{a^2-2x^2}{(x^2+a^2)^{\frac{5}{2}}} = 0$. Звідси знаходимо стаціонарну точку $x = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Оскільки функція $E(x)$ має тільки одну стаціонарну точку, а в умові задачі сказано, що існує положення лампочки, при якому освітлення в точці A найбільше, то x є шуканою точкою.

Задача 3. Визначити розміри такого відкритого басейну з квадратним дном і об'ємом $V = 32$ м^3, щоб на облицьовування його стін і дна було затрачено найменшу кількість матеріалу.

Р о з в' я з а н н я. Позначимо довжину сторони основи через x, а висоту — через y. Тоді $V(x, y) = x^2y = 32$.

Площа бічної поверхні басейну разом із площею дна дорівнює $S = x^2 + 4xy$. Знайшовши з попередньої рівності y і підставивши в останню рівність його значення, дістанемо таку функцію від x: $S(x) = x^2 + \dfrac{128}{x}$.

Знайдемо похідну цієї функції: $S'(x) = 2x - \dfrac{128}{x^2}$.

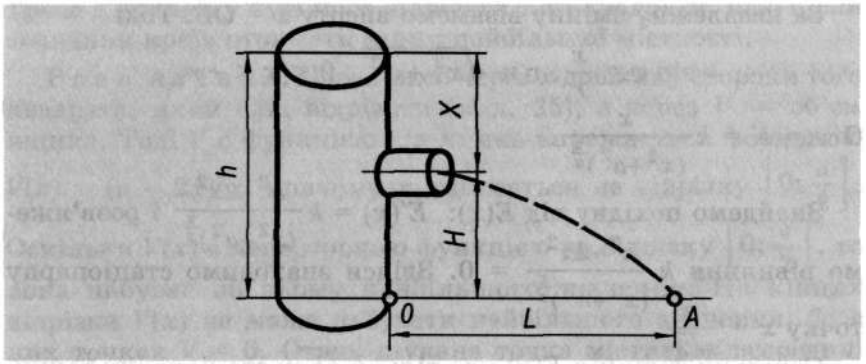
Розв'язуючи рівняння $2x - \dfrac{128}{x^2} = 0$, знаходимо стаціонарну точку $x = 4$.

Оскільки існує тільки одна стаціонарна точка, то вона і буде точкою мінімуму. Отже найменші розміри басейну заданого об'єму $V = 32$ м^3 такі: $x = 4$ м; $y = 2$ м.

Задача 4. Посудина з вертикальною стінкою і висотою h стоїть на горизонтальній площині (мал. 27). На якій глибині треба розмістити отвір, щоб дальність вильоту води з отвору була найбільшою (швидкість рідини, що витікає, за законом Торрічеллі дорівнює $\sqrt{2gx}$, де x — глибина розміщення отвору, g — прискорення вільного падіння)?

Р о з в' я з а н н я. Позначимо через H відстань отвору в посудині від горизонтальної площини, а через L — відстань точки A від стінки посудини. Тоді $L = vt$, де t — час польоту води від отвору до площини (в точку A).

З курсу фізики відомо, що



Мал. 27

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}}\ , \text{ або } t = \sqrt{\frac{2(h-x)}{g}}\ .$$

Тоді

$$L(x) = \sqrt{2gx}\ \sqrt{\frac{2(h-x)}{g}} = 2\sqrt{x(h-x)}\ ,\ 0 < x < h.$$

Знайдемо похідну $L'(x) = \dfrac{h-2x}{\sqrt{x(h-x)}}$.

Розв'язуючи рівняння $\dfrac{h-2x}{\sqrt{x(h-x)}} = 0$, знаходимо стаціонарну точку $x = \dfrac{h}{2}$.

Оскільки це єдина стаціонарна точка, то вона й буде шуканою.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. Що називається найбільшим і найменшим значеннями неперервної функції, заданої на замкненому відрізку?

2. В яких точках відрізка неперервна функція може набувати своїх найбільшого і найменшого значень?

3. Сформулювати правила знаходження найбільшого і найменшого значень функції.

ВПРАВИ

50. Знайти найбільше і найменше значення функції:

А

1) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3$ на відрізку $[-1; 2]$;

2) $y = x^4 - 8x^2 + 3$ на відрізку $[-2; 2]$;

3) $y = \frac{1}{2}x - \sin x$ на відрізку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Б

4) $y = \frac{x^3}{3} - 6x^2 + 32x$ на відрізку $[0; 9]$;

5) $y = x + \sqrt{x}$ на відрізку $[1; 4]$;

6) $y = \frac{1}{x^2-1}$ на відрізку $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

В

7) $y = -x^4 + 2x^2 + 3$ на відрізку $[-0{,}5; 0{,}7]$;

8) $y = x^{\frac{2}{3}}(x - 2)$ на відрізку $[-8; -1]$;

9) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ на відрізку $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$.

51. Розв'язати задачі на знаходження найменшого і найбільшого значень функції:

А

1) Яке число треба додати до його квадрата, щоб дістати найменшу суму?

2) Знайти найбільшу площу прямокутника, вписаного в коло з радіусом r.

3) Як із квадратного листа жерсті зі стороною a виготовити бак прямокутної форми найбільшого об'єму з квадратною основою без кришки?

Б

4) Є дріт завдовжки a метрів. Як огородити цим дротом прямокутну ділянку землі, одна сторона якої прилягає до будинку, щоб площа огородженої ділянки була найбільшою?

5) З усіх кругових секторів, що мають даний периметр, знайти сектор з найбільшою площею.

В к а з і в к а: периметр сектора $p = 2r + \alpha r$, де r — радіус сектора і α — відповідний центральний кут.

В

6) Друкований текст (разом з проміжками між рядками) однієї сторінки книжки має займати площу S см^2. Ширина

верхніх і нижніх полів сторінки має бути a см, бічних полів — b см. Які розміри сторінки є найвигіднішими, якщо враховувати лише економію паперу?

7) З усіх прямокутників, що мають периметр 20 см, знайти той, у якого діагональ найменша.

8) Міцність балки прямокутного перерізу пропорційна ширині і квадрату її висоти, тобто $p = kxy^2$. Який периметр має бути у бруса, вирізаного з циліндричної колоди радіуса R, щоб його міцність була найбільшою?

9) Вартість (за годину) утримання баржі складається з двох частин: вартості палива, яка пропорційна кубу швидкості баржі, і вартості амортизації баржі (заробітна плата команди, обладнання та ін.). Загальна вартість утримання баржі за годину, таким чином, виразиться формулою $S = av^3 + b$, де v — швидкість судна в км/год; a і b — коефіцієнти, задані для кожного судна.

Визначити, за якої швидкості v загальна сума утримання баржі на 1 км шляху буде найменшою, якщо $a = 0{,}005$, $b = 40$.

§ 19. Загальна схема дослідження функції та побудова її графіка

Нехай на відрізку $[a; b]$ задана неперервна функція $y = f(x)$, графіком якої є деяка лінія. Виникає запитання: як побудувати цей графік? Одним зі способів побудови графіка функції є побудова за точками. При такій побудові графіка на площині будують кілька точок, координати яких задовольняють рівняння $y = f(x)$, а потім ці точки з'єднують суцільною лінією. Зрозуміло, чим більше таких точок буде нанесено на площину, тим точніше лінія, що їх з'єднує, відображатиме графік функції $y = f(x)$. Але при такому методі побудови графіка не відтворюється реальна поведінка функції. Так, наприклад, нехай графіком функції є суцільна лінія, яка зображена на малюнку 28, а лінія, яка утворюється при з'єднанні семи точок площини xOy, зображена штриховою лінією. Як бачимо, побудований і реальний графіки однієї і тієї самої функції значно різняться. Отже, перш ніж будувати графік функції, її треба дослідити. Як правило, це слід робити за такою схемою.

1) Знайти область визначення функції.

2) Знайти точки перетину графіка з координатними осями. Для цього треба розв'язати дві системи рівнянь:

$$\begin{cases} y = f(x), \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} y = f(x), \\ x = 0. \end{cases}$$