верхніх і нижніх полів сторінки має бути a см, бічних полів — b см. Які розміри сторінки є найвигіднішими, якщо враховувати лише економію паперу?

7) З усіх прямокутників, що мають периметр 20 см, знайти той, у якого діагональ найменша.

8) Міцність балки прямокутного перерізу пропорційна ширині і квадрату її висоти, тобто $p = kxy^2$. Який периметр має бути у бруса, вирізаного з циліндричної колоди радіуса R, щоб його міцність була найбільшою?

9) Вартість (за годину) утримання баржі складається з двох частин: вартості палива, яка пропорційна кубу швидкості баржі, і вартості амортизації баржі (заробітна плата команди, обладнання та ін.). Загальна вартість утримання баржі за годину, таким чином, виразиться формулою $S = av^3 + b$, де v — швидкість судна в км/год; a і b — коефіцієнти, задані для кожного судна.

Визначити, за якої швидкості v загальна сума утримання баржі на 1 км шляху буде найменшою, якщо $a = 0{,}005$, $b = 40$.

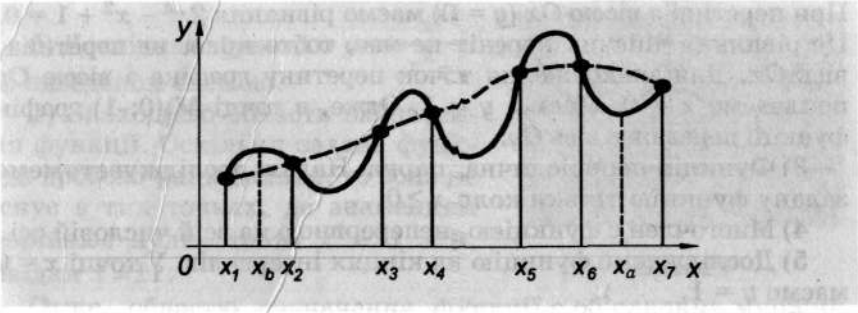
§ 19. Загальна схема дослідження функції та побудова її графіка

Нехай на відрізку $[a; b]$ задана неперервна функція $y = f(x)$, графіком якої є деяка лінія. Виникає запитання: як побудувати цей графік? Одним зі способів побудови графіка функції є побудова за точками. При такій побудові графіка на площині будують кілька точок, координати яких задовольняють рівняння $y = f(x)$, а потім ці точки з'єднують суцільною лінією. Зрозуміло, чим більше таких точок буде нанесено на площину, тим точніше лінія, що їх з'єднує, відображатиме графік функції $y = f(x)$. Але при такому методі побудови графіка не відтворюється реальна поведінка функції. Так, наприклад, нехай графіком функції є суцільна лінія, яка зображена на малюнку 28, а лінія, яка утворюється при з'єднанні семи точок площини xOy, зображена штриховою лінією. Як бачимо, побудований і реальний графіки однієї і тієї самої функції значно різняться. Отже, перш ніж будувати графік функції, її треба дослідити. Як правило, це слід робити за такою схемою.

1) Знайти область визначення функції.

2) Знайти точки перетину графіка з координатними осями. Для цього треба розв'язати дві системи рівнянь:

$$\begin{cases} y = f(x), \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} y = f(x), \\ x = 0. \end{cases}$$



Мал. 18

Перша система дає точки перетину з віссю Ox, а друга — з віссю Oy.

3) Дослідити функцію на періодичність, парність і непарність. З'ясування цих питань полегшить побудову графіка, оскільки її можна виконувати не в усій області визначення функції, а лише в певній її частині. Так, якщо $y = f(x)$ — періодична функція з періодом $T > 0$, то графік достатньо побудувати на відрізку числової осі, довжина якого дорівнює T, а потім цю частину графіка повторити на кожному з відрізків довжини T. Якщо функція парна, то графік функції симетричний відносно осі Oy, якщо непарна — то відносно початку координат. Тому достатньо побудувати графік тільки коли $x \geq 0$, а потім симетрично відобразити його і для $x < 0$.

4) Знайти значення функції на кінцях відрізків, де визначена функція. Якщо область визначення функції є інтервалом (півінтервалом) або кількома інтервалами (півінтервалами), то слід знайти граничне значення функції, коли x наближається до одного з кінців розглядуваного

$= f(x)$.
д мно-
ла. Ці
м зна-
дрізка
еншо-

Нехай на відрізку $[a; b]$ задана неперервна функція $y =$
Тоді, як доводиться в курсі математичного аналізу, серед
жини значень такої функції є найбільше і найменше чис
числа і називаються відповідно **найбільшим** і **найменши**
ченнями функції. Постає питання: як знайти точки від
$[a; b]$, в яких функція набуває своїх найбільшого і найм
го значень?

При перетині з віссю Ox ($y = 0$) маємо рівняння $2x^4 - x^2 + 1 = 0$. Це рівняння дійсних коренів не має, тобто крива не перетинає вісь Ox. Для знаходження точок перетину графіка з віссю Oy покладемо $x = 0$. Маємо: $y = 1$. Отже, в точці $M_1(0; 1)$ графік функції перетинає вісь Oy.

3) Функція неперіодична, парна. Надалі досліджуватимемо задану функцію тільки коли $x \geq 0$.

4) Многочлен є функцією, неперервною на всій числовій осі.

5) Досліджуємо функцію на кінцях інтервалів. У точці $x = 0$ маємо $y = 1$.

Для знаходження інтервалів монотонності треба розв'язати нерівність $y' > 0$, $y' < 0$. У точках, де $y' > 0$, функція зростає, а де $y' < 0$ — спадає.

Обчислимо $y' = 8x^3 - 2x = 2x(4x^2 - 1)$, $x(4x^2 - 1) > 0$.

Оскільки $x > 0$, то $4x^2 - 1 > 0$. Звідси $x^2 > \frac{1}{4}$, або $x > \frac{1}{2}$. Отже, в інтервалі $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ функція зростає, тоді в інтервалі $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ вона спадає.

6) Досліджуємо функцію на екстремум. Для цього розв'яжемо рівняння $x(4x^2 - 1) = 0$. Дістанемо такі стаціонарні точки: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$ (від'ємні значення x не розглядаємо). Неважко показати, що в області визначення $x_1 = 0$ є точкою максимуму, а $x_2 = \frac{1}{2}$ — мінімуму, причому $y_{max} = f(0) = 1$, $y_{min} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{8}$. Будуємо точки $M_1(0; 1)$, $M_2\left(\frac{1}{2}; \frac{7}{8}\right)$.

При $x < 0$ графік даної функції буде симетричним відносно осі Oy.

Запишемо результати дослідження в таблицю (табл. 4).

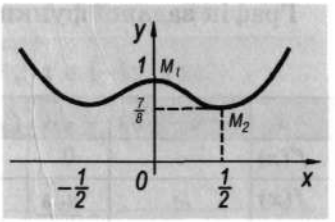
Таблиця 4

x	$\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$	0	$\left(0; \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$
$f'(x)$	–	0	+	0	–	0	+
$f(x)$	↘	$\frac{7}{8}$	↗	1	↘	$\frac{7}{8}$	↗
		min		max		min	

Стрілкою « ↗ » показано зростання функції, а стрілкою « ↘ » — її спадання.

Графік заданої функції зображено на малюнку 29.

б) Дослідимо функцію $y = \frac{x^3}{x^2-1}$ за наведеною схемою.



Мал. 29

1) Знаходимо область визначення функції. Оскільки задана функція дробово-раціональна, то вона не існує в тих точках, де знаменник дорівнює нулю, тобто $x^2 - 1 \neq 0$. Звідки $x \neq \pm 1$.

Отже, областю визначення функції є об'єднання множин $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

2) Визначимо точки перетину графіка з осями координат. Нехай $y = 0$, тоді $x = 0$; якщо $x = 0$, то $y = 0$. Отже, графік перетинає координатні осі в точці $O(0; 0)$, тобто графік проходить через початок координат.

3) Функція неперіодична. Вона непарна, тому розглядатимемо тільки $x \geq 0$.

4) Чисельником і знаменником є многочлени, які неперервні на всій числовій осі. Функція неперервна на всій числовій осі, крім точок $x = \pm 1$.

5) Знаходимо похідну:

$$y' = \frac{(x^2-1)\cdot 3x^2 - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}.$$

Розв'яжемо нерівність $y' > 0$: $\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} > 0$. Помножимо обидві частини нерівності на додатні множники $\frac{1}{x^2}$ і $(x^2-1)^2$, дістанемо $x^2 - 3 > 0$. Звідси $x > \sqrt{3}$. Отже, в інтервалі $(\sqrt{3}; +\infty)$ функція зростає, а в інтервалах $(0; 1)$, $(1; \sqrt{3})$ — спадає.

6) Знайдемо екстремальні точки. Розв'яжемо рівняння $y' = 0$:

$$\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} = 0.$$

Звідси знайдемо стаціонарні точки $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{3}$.

При переході x через точку x_1 похідна y' знака не змінює, а при переході x через точку x_2 похідна y' змінює знак «–» на «+». Тому x_1 не є екстремальною точкою, а x_2 є точкою мінімуму і $y_{\min} = f(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Запишемо результати досліджень у таблицю (табл. 5).

Графік заданої функції зображено на малюнку 30.

Таблиця 5

x	$(-\infty; -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}; -1)$	$(-1; 1)$	0	$(1; \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	–	0	–	0	+
$f(x)$	↗	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	↘	0	↘	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↗
		max					min	

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. За якою схемою проводиться дослідження функції $y = f(x)$ з метою побудови її графіка?

2. Як складається таблиця результатів дослідження функції $y = f(x)$?

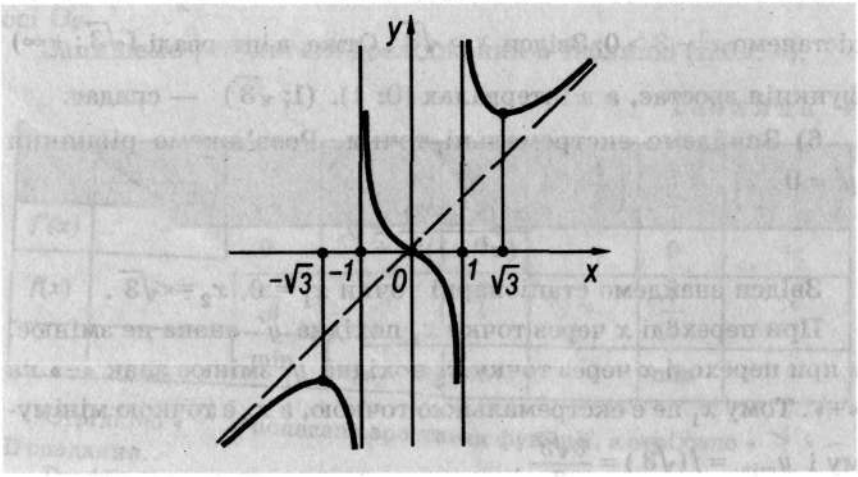
ВПРАВИ

52. Дослідити функцію і побудувати графік:

А

1) $y = x^2 - 5x + 6$; 2) $y = 1 - 2x^2 - \frac{x^3}{3}$;

3) $y = -x^2 + 5x - 4$; 4) $y = x^4 - 2x^2 - 3$.



Мал. 30

Б

5) $y = -x^4 + 2x^2 + 3$; 6) $y = \sqrt[3]{x^2}$, $x \in [-1; 1]$;

7) $y = \frac{1}{x(x-1)}$; 8) $y = 2\cos x + x$.

В

9) $y = x^4 - 10x^2 + 9$; 10) $y = 2|x| - x^2$;

11) $y = \sin 2x + 2\sin x$; 12) $y = \frac{x^2 - 3}{x^2 - 1}$.

§ 20. Дослідження показникової, логарифмічної і степеневої функцій

Достатні умови монотонності й екстремуму застосовуються для дослідження показникових, логарифмічних і степеневих функцій. Відомо, що при переході через критичні точки (похідна функції дорівнює нулю або не існує) функція змінює поведінку на зростання або спадання. Таким чином, проміжки зростання, спадання (проміжки монотонності) функції $f(x)$ обмежені критичними точками. Отже, щоб знайти проміжки монотонності, досить:

1) знайти критичні точки $f(x)$;

2) визначити знак похідної $f'(x)$ всередені проміжків, обмежених критичними точками.

Приклад 1. Дослідити на зростання і спадання функцію $f(x) = xe^{-3x}$.

Р о з в' я з а н н я. Знаходимо похідну

$$f'(x) = (xe^{-3x})' = e^{-3x} - 3xe^{-3x} = e^{-3x}(1 - 3x).$$

Похідна $f'(x)$ існує на всій числовій прямій і перетворюється на нуль у точці $x = \frac{1}{3}$. Точка $x = \frac{1}{3}$ ділить числову пряму на два проміжки: $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ і $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$. Оскільки функція e^{-3x} завжди додатна, то знак похідної визначає другий множник.

Отже, на проміжку $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ $f'(x) > 0$ ($f(x)$ зростає), а на $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$ $f'(x) < 0$ ($f(x)$ спадає).