РОЗДІЛ

4 ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

Сила і загальність методу диференціального й інтегрального числення такі, що не ознайомившись із ними, не можна як слід зрозуміти все значення математики для природознавства і техніки і навіть повністю оцінити всю красу і принадність самої математичної науки.

А. М. Колмогоров

§ 21. Первісна. Таблиця первісних

Зазначимо, що кожна дія (операція), яку вивчали у шкільному курсі, має обернену: додавання — віднімання; множення — ділення; піднесення до степеня — добування кореня; логарифмування — потенціювання; множення одночлена на многочлен — розкладання многочлена на множники способом винесення спільного множника за дужки та ін. При цьому деякі з обернених операцій виявилися неоднозначними. Наприклад, дія добування квадратного кореня з додатного числа, яка є оберненою до дії піднесення до квадрата, є двозначною. Справді, існує два значення квадратного кореня з числа 25, а саме числа 5 і -5, бо $5^2 = 25$ і $(-5)^2 = 25$.

Основною операцією диференціального числення є знаходження похідної $y' = f'(x)$ даної функції $y = f(x)$. Проте під час розв'язування різних задач, зокрема фізичних і геометричних, іноді треба розв'язати обернену задачу: за відомою похідною $y' = f'(x)$ деякої функції знайти (відновити) саму функцію $y = f(x)$, яку називають первісною для відомої функції.

Приклад 1. Нехай дано функцію $f(x) = x^2$, яка є похідною невідомої функції $F(x)$. Треба знайти функцію $F(x)$. Щоб це зробити, спробуємо відповісти на запитання: похідна якої функції дорівнює x^2?

Неважко зробити висновок, що похідна функції $F(x) = \frac{x^3}{3}$ дорівнює x^2, тобто $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$.

Первісною для даної функції $y = f(x)$ на заданому проміжку $\langle a; b\rangle$ називається така функція $F(x)$, по-

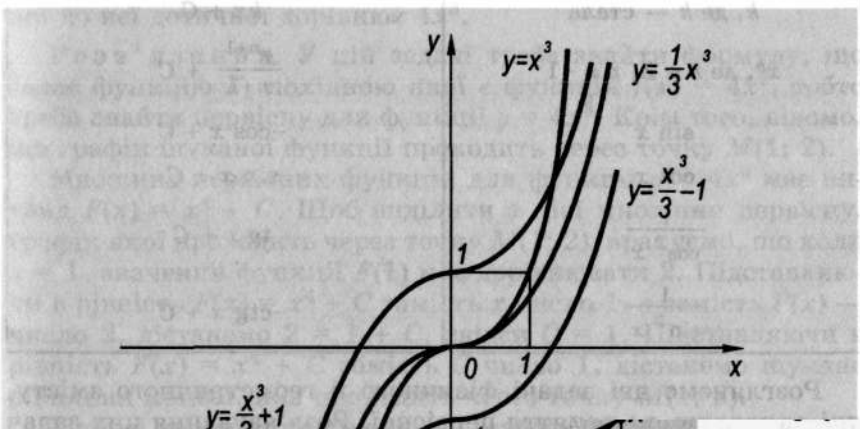
хідна якої для всіх x з інтервалу $(a; b)$ дорівнює $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$ для всіх $x \in (a; b)$.

Виникає ще одне запитання: чи існують інші функції, похідні яких дорівнюють x^2?

Виявляється, що існують, бо не лише $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$, а й $\left(\frac{x^3}{3} + 5\right)' = x^2$, $\left(\frac{x^3}{3} - 0{,}2\right)' = x^2$, $\left(\frac{x^3}{3} + \sqrt{5}\right)' = x^2$, ...

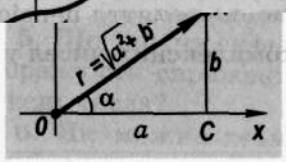
Отже, існує безліч функцій, похідні яких дорівнюють x^2. Їх можна записати у вигляді однієї множини $\frac{x^3}{3} + C$, де C — довільна стала (число). Якщо $F(x)$ — одна первісна, то $F(x) + C$ — загальний вигляд первісної для функції $y = f(x)$.

Геометрично описати первісну $F(x) = \frac{x^3}{3}$ для даної функції $y = x^2$ неважко — це кубічна парабола, графік якої дістаємо з графіка функції $y = x^3$, стиснюючи його у 3 рази до осі Ox. Загальним виглядом первісної для функції $y = x^2$ є множина кубічних парабол, які дістаємо з графіка $y(x) = \frac{x^3}{3}$, паралельно переносячи його вгору вздовж осі Oy чи вниз на відстань C — залежно від знака C (мал. 35). Отже, у загальному



ктор $\overrightarrow{OA}$ зображує комп-
$z = a + bi$ (див. мал. 75).
кут, який утворює вектор
м напрямом осі Ox.

ачення кута α, виміря



Мал. 75

хай радіус-ве
лексне число
Позначимо α
$\overrightarrow{OA}$ з додатн

Числове зна

Позначимо її через $s = s(t)$. Оскільки швидкість прямолінійного нерівномірного руху є похідною функції $s = s(t)$, то $s'(t) = gt$.

Отже, треба знайти функцію $s = s(t)$ — таку, що $s'(t) = gt$, а $s(4) = 80$ м.

Множина функцій, похідні яких дорівнюють gt, має вигляд $s(t) = \frac{gt^2}{2} + C$, де C — довільна стала (число). Коли б в умові задачі не вказувалося, що за перші 4 с тіло пройшло 80 м, то стала C залишалася б невизначеною. Але за вказаною додатковою умовою можна обчислити значення C і тим самим із множини функцій $s(t) = \frac{gt^2}{2} + C$ вибрати ту, яка відповідає умові задачі.

За умовою, коли $t = 4$, $s(t) = 80$. Підставляючи ці значення t і $s(t)$ у попередню рівність, дістанемо $80 = \frac{10 \cdot 16}{2} + C$. Звідси $C = 0$.

Підставляючи знайдене значення C у формулу загального вигляду первісної, дістанемо $s(t) = \frac{gt^2}{2}$. Це закон руху тіла, що вільно падає.

Задача 2 *(обернена до задачі про проведення дотичної до кривої у певній точці)*. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку $M(1; 2)$, якщо кутовий коефіцієнт проведеної до неї дотичної дорівнює $4x^3$.

Розв'язання. У цій задачі треба знайти формулу, що задає функцію F, похідною якої є функція $f(x) = 4x^3$, тобто треба знайти первісну для функції $y = 4x^3$. Крім того, відомо, що графік шуканої функції проходить через точку $M(1; 2)$.

Множина первісних функцій для функції $y = 4x^3$ має вигляд $F(x) = x^4 + C$. Щоб виділити з цієї множини первісну, графік якої проходить через точку $M(1; 2)$, врахуємо, що коли $x = 1$, значення функції $F(1)$ має дорівнювати 2. Підставляючи в рівність $F(x) = x^4 + C$ замість x число 1, а замість $F(x)$ — число 2, дістанемо $2 = 1 + C$, звідси $C = 1$. Підставляючи в рівність $F(x) = x^4 + C$ замість C число 1, дістанемо шукане рівняння кривої, яка проходить через точку $M(1; 2)$.

У курсі математичного аналізу доведено таку теорему. Сформулюємо її без доведення.

Теорема.

Будь-яка неперервна на відрізку $[a; b]$ функція $y = f(x)$ має первісну функцію.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. Сформулювати означення первісної функції $y = f(x)$ на заданому проміжку $\langle a; b\rangle$.

2. Що називається операцією інтегрування?

3. Які задачі привели до поняття первісної?

4. Який загальний вигляд первісної для функції $y = f(x)$? Який його геометричний зміст?

5. Сформулювати теорему про умову існування первісної функції $y = f(x)$.

6. Знайти первісну для функції:

а) $f(x) = x$; б) $f(x) = 5x^3$; в) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$; г) $f(x) = 0$.

7. Довести, що функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на вказаному проміжку:

а) $F(x) = x^{\frac{3}{4}} - 21$; $f(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$, $x \in (0; +\infty)$;

б) $F(x) = \sin(2x + 4) + 1$, $f(x) = 2\cos(2x + 4)$, $x \in (-\infty; +\infty)$.

§ 22. Основна властивість первісної

Наведемо без доведення допоміжну лему, яку будемо використовувати при доведенні основної властивості первісної.

Лема.

Якщо $F'(x) = 0$ на деякому проміжку $\langle a; b\rangle$, то $F(x) = C$ на цьому проміжку, де C — стала.

Геометричне тлумачення цієї леми випливає з геометричного змісту похідної. Оскільки $F'(x) = 0$, то дотична до графіка функції $F(x)$ у кожній точці паралельна осі Ox, тому її графік збігається з відрізком прямої, паралельної осі Ox. Цю лему доведено в курсі математичного аналізу.

Основну властивість первісної сформулюємо і доведемо у вигляді двох теорем.

Теорема 1.

Якщо на проміжку $\langle a; b\rangle$ функція $F(x)$ є первісною для $f(x)$, то на цьому проміжку первісною для $f(x)$ буде також функція $F(x) + C$, де C — довільна стала (число).

Доведення. Нехай $F(x)$ — первісна для $f(x)$. Згідно з означенням первісної $F'(x) = f(x)$, але тоді і $(F(x) + C)' = f(x)$. Теорему доведено.