ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. Сформулювати означення первісної функції $y = f(x)$ на заданому проміжку $\langle a; b\rangle$.

2. Що називається операцією інтегрування?

3. Які задачі привели до поняття первісної?

4. Який загальний вигляд первісної для функції $y = f(x)$? Який його геометричний зміст?

5. Сформулювати теорему про умову існування первісної функції $y = f(x)$.

6. Знайти первісну для функції:

а) $f(x) = x$; б) $f(x) = 5x^3$; в) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$; г) $f(x) = 0$.

7. Довести, що функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на вказаному проміжку:

а) $F(x) = x^{\frac{3}{4}} - 21$; $f(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$, $x \in (0; +\infty)$;

б) $F(x) = \sin(2x+4) + 1$, $f(x) = 2\cos(2x+4)$, $x \in (-\infty; +\infty)$.

§ 22. Основна властивість первісної

Наведемо без доведення допоміжну лему, яку будемо використовувати при доведенні основної властивості первісної.

Лема.

Якщо $F'(x) = 0$ на деякому проміжку $\langle a; b\rangle$, то $F(x) = C$ на цьому проміжку, де C — стала.

Геометричне тлумачення цієї леми випливає з геометричного змісту похідної. Оскільки $F'(x) = 0$, то дотична до графіка функції $F(x)$ у кожній точці паралельна осі Ox, тому її графік збігається з відрізком прямої, паралельної осі Ox. Цю лему доведено в курсі математичного аналізу.

Основну властивість первісної сформулюємо і доведемо у вигляді двох теорем.

Теорема 1.

Якщо на проміжку $\langle a; b\rangle$ функція $F(x)$ є первісною для $f(x)$, то на цьому проміжку первісною для $f(x)$ буде

$F(x)$ є первісною для $f(x)$, а k і b — стали (числа), 3. Якщо

0, то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ є первісною для $f(kx+b)$. причому $k \neq$

Теорема 2.

Будь-які дві первісні функції для однієї і тієї самої функції відрізняються одна від одної на сталий доданок.

Доведення. Нехай $F(x)$ і $\Phi(x)$ — дві первісні для однієї і тієї самої функції $f(x)$ на проміжку $\langle a; b\rangle$, тобто, за означенням, $F'(x) = f(x)$ і $\Phi'(x) = f(x)$.

Знайдемо похідну різниці даних функцій:

$$(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Згідно з лемою функція $\Phi(x) - F(x)$ — стала на проміжку $\langle a; b\rangle$, тобто $\Phi(x) - F(x) = C$, де C —довільна стала.

З попередньої рівності випливає, що $\Phi(x) = F(x) + C$.

Теорему доведено.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. Сформулювати лему, яка використовується при доведенні основної властивості первісної.

2. Сформулювати і довести теорему про основну властивість первісної.

3. Яка існує залежність між двома первісними для однієї і тієї самої функції?

§ 23. Правила знаходження первісних

Оскільки операція знаходження первісної (операція інтегрування) є оберненою до операції знаходження похідної (операція диференціювання), то правила знаходження первісних випливають із відповідних правил знаходження похідних. Розглянемо три такі правила.

1. Якщо $F(x)$ є первісною для $f(x)$, а $G(x)$ — первісною для $g(x)$, то $F(x) + G(x)$ є первісною для $f(x) + g(x)$.

Справді, оскільки $F'(x) = f(x)$, а $G'(x) = g(x)$, то $(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$.

2. Якщо $F(x)$ є первісною для $f(x)$, а k — стале число, то $kF(x)$ є первісною для $kf(x)$.

Справді, оскільки сталий множник можна виносити за знак похідної, то $(kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$.

Отже, сталий множник можна виносити за знак первісної.

3. Якщо $F(x)$ є первісною для $f(x)$, а k і b — сталі (числа), причому $k \neq 0$, то $\frac{1}{k}F(kx + b)$ є первісною для $f(kx + b)$.