властивості 1 – 5.

Р А В И

бчислити інтеграл:

$3x-1)dx$; 2) $\int\limits_3^8\left(2x+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx$; 3) $\int\limits_1^2(5x+1)^2\,dx$;

$\sin x\,dx$; 5) $\int\limits_0^2(x+2)^3\,dx$; 6) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{2}{\sin^2 x}\,dx$;

$x^2-2\sqrt{x})dx$; 8) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{5}{\cos^2 x}\,dx$; 9) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\cos 2x\,dx$.

$\frac{x^2\sqrt{x^{-1}}}{\sqrt[3]{x^{\frac{2}{3}}}}dx$; 11) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin 2x-\frac{\pi}{4}\right)dx$;

$(1+\cos 2t)\,dt$; 13) $\int\limits_2^6\sqrt{2x-3}\,dx$; 14) $\int\limits_0^1(x+1)^5\,dx$;

В П

63. О

А

1) $\int\limits_{-1}^{2}($

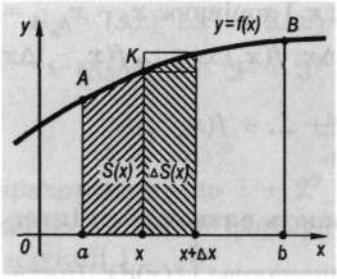
4) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}5$

7) $\int\limits_1^3($

Б

10) $\int\limits_1^4$

12) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}$



Мал. 40

Виникає запитання: чи не можна обчислювати визначені інтеграли іншим способом? Такий спосіб був знайдений ще у XVII ст. англійським ученим І. Ньютоном і німецьким математиком Г. Лейбніцем. Строге доведення формули Ньютона—Лейбніца дають у курсі математичного аналізу. Ми лише проілюструємо правильність формули геометричними міркуваннями.

Нагадаємо задачу про площу криволінійної трапеції (мал. 40). Було встановлено, що

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Виберемо довільну точку $x \in [a; b]$ і проведемо через неї перпендикуляр xK до осі Ox. Площа фігури $aAKx$ змінюється залежно від змінної x, тобто є функцією від x. Позначимо цю функцію через $S(x)$ і покажемо, що існує її похідна, причому $S'(x) = f(x)$, де $y = f(x)$ — підінтегральна функція, графік якої обмежує криволінійну трапецію. Іншими словами, покажемо, що $S(x)$ є первісною для $f(x)$.

Надамо змінній x приросту Δx, вважаючи (для спрощення міркувань), що $\Delta x > 0$. Тоді і функція $S(x)$ набуде приросту $\Delta S(x)$. У курсі математичного аналізу доводиться, що неперервна на проміжку $[a; b]$ функція $y = f(x)$ набуває на ньому найбільшого і найменшого значень. Оскільки підінтегральна функція $y = f(x)$ неперервна на проміжку $[x; x + \Delta x]$, то вона набуває на цьому проміжку найменшого m і найбільшого M значень. Отже,

$$m\Delta x < \Delta S(x) < M\Delta x.$$

Поділивши всі частини цієї нерівності на $\Delta x > 0$, дістанемо

$$m < \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} < M.$$

Враховуючи неперервність функції $y = f(x)$, маємо:

$$\lim_{\Delta x \to 0} m = \lim_{\Delta x \to 0} M = f(x).$$

Але тоді $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta S(x)}{\Delta x} = f(x)$.

Оскільки $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta S(x)}{\Delta x} = S'(x)$, то $S'(x) = f(x)$, тобто функція $S(x)$ є однією з первісних функції $y = f(x)$.

Позначимо через $F(x)$ будь-яку первісну для функції $y = f(x)$. За основною властивістю первісної, будь-які первісні однієї і

тієї самої функції можуть різнитися лише сталим доданком C. Тому

$$S(x) = F(x) + C. \qquad (1)$$

Якщо $x = a$, криволінійна трапеція вироджується у відрізок aA, тому $S(x) = 0$.

Підставляючи у рівність (1) замість x число a, а замість $S(x)$ — число 0, дістанемо $C = -F(a)$.

Підставивши замість C у рівність (1) його значення, дістанемо

$$S(x) = F(x) - F(a). \qquad (2)$$

Якщо $x = b$, площа криволінійної трапеції дорівнює числу $S = S(b)$. Крім того, коли $x = b$ із рівності (2) дістаємо $S(b) = F(b) - F(a)$.

Раніше було встановлено, що площа S криволінійної трапеції дорівнює значенню $\int_a^b f(x)dx$. Тому можна зробити висновок, що

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}.$$

Це і є формула Ньютона — Лейбніца, яка показує, що

значення визначеного інтеграла на відрізку [a; b] дорівнює різниці значень первісної підінтегральної функції, коли $x = b$ і $x = a$.

Різницю $F(b) - F(a)$ позначають $F(x)\Big|_a^b$. Тому рівність $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ можна записати так:

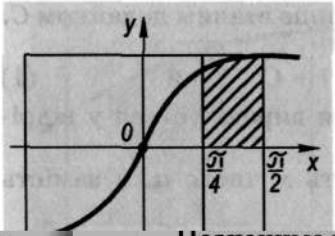
$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b}.$$

Розв'язування розглянутих у попередньому параграфі двох задач про площі трикутника і фігури, обмеженої параболою, значно спрощуються, якщо використати формулу Ньютона — Лейбніца. Справді,

$$S_{\Delta OAB} = \int_0^k 2xdx = x^2\Big|_0^k = k^2 - 0 = k^2 \text{ (кв. од.)};$$

$$S_{OBC} = \int_0^k x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^k = \frac{k^3}{3} - 0 = \frac{k^3}{3} \text{ (кв. од.)}.$$

Приклад 1. Обчислимо за формулою Ньютона — Лейбніца площу фігури, обмеженої зверху синусоїдою $y = \sin x$, знизу — віссю Ox, а з боків — прямими $x = \frac{\pi}{4}$ і $x = \frac{\pi}{2}$ (мал. 41).



Р о з в' я з а н н я.

$$S = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$\left(0 - \frac{\sqrt{2}}{\ldots}\right) \quad \sqrt{2}\ldots$$

$y = f(x)$.
однієї і

Позначимо через $F(x)$ будь-яку первісну для функції
За основною властивістю первісної, будь-які первісні

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 + 4\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 + 4x\Big|_1^2 = \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) + 2(4-1) + 4(2-1) =$$

$$= \frac{7}{3} + 6 + 4 = 12\frac{1}{3}.$$

Приклад 4. Обчислити $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)dx$.

Р о з в' я з а н н я.

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)dx = \frac{1}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin t\,dt = -\frac{1}{3}\cos t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{4}} =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\cos\frac{5\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - 0\right) = \frac{\sqrt{2}}{6} \approx 0{,}236.$$

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. Записати формулу Ньютона – Лейбніца.

2. Які геометричні міркування покладено в основу обґрунтування правильності формули Ньютона – Лейбніца?

3. Сформулювати і записати символічно чотири основні властивості визначеного інтеграла.

4. Довести властивості 1—3

$= -\left(0 - \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$ (кв. од.).

апишемо символічно основні вла-
ості визначеного інтеграла, які
первісної і формули Ньютона —
и, користуючись означенням ви-

$dx \pm \int\limits_a^b \varphi(x)dx;$

е $k \in \boldsymbol{R}$;

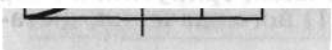
$f(x)dx,$

збито на два відрізки точкою c, то
зку $[a; b]$ дорівнює сумі визначе-
$a; c]$ і $[c; b]$;

$f(t)dt,$

і три властивості. Останню влас-
ематичного аналізу.

$(x^3 - \cos x)dx.$



Мал. 41

З
стив
випливають із властивості
Лейбніца. Їх неважко довест
значеного інтеграла:

1) $\int\limits_a^b (f(x) \pm \varphi(x))dx = \int\limits_a^b f(x)$

2) $\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx$, д

3) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b$

тобто якщо відрізок $[a; b]$ роз
визначений інтеграл на відрі
них інтегралів на відрізках

4) $\int\limits_a^b f(kx + p)dx = \frac{1}{k}\int\limits_{ka+p}^{kb+p}$

де $p \in \boldsymbol{R}$, $k \in \boldsymbol{R}$, $t = kx + b$.

Доведіть самостійно перш
тивість доведено в курсі мат

Приклад 2. Обчислити $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}$

Р о з в' я з а н н я.