

ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ

Поняття про нескінченну множину, ввійшовши до складу сучасної математики, радикально еволюціонувало її.

П. С. Александров

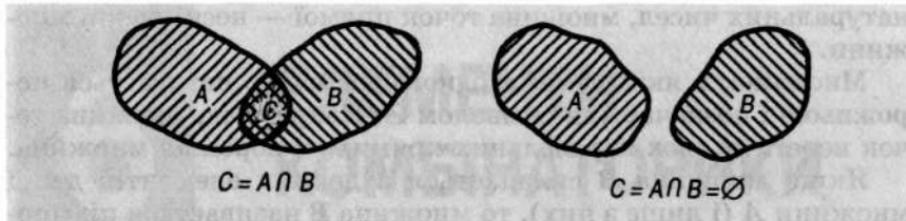
§ 33. Поняття множини. Операції над множинами

Поняття множини належить до первісних понять математики, якому не дається означення. Множину можна уявити як сукупність, зібрання деяких предметів, об'єднаних за певною характеристичною ознакою. Наприклад, множина учнів класу, множина цифр десяткової нумерації (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), множина натуральних чисел, множина зернин у даному колосі, множина літер українського алфавіту, множина точок на прямій та ін.

Предмети, з яких складається множина, називаються її **елементами** і позначаються малими літерами латинського алфавіту. Наприклад, $a = 5$ — елемент множини цифр десяткової нумерації. Для позначення множин використовують великі літери латинського алфавіту або фігурні дужки, всередині яких записуються елементи множини. При цьому порядок запису елементів не має значення. Наприклад, множину цифр десяткової нумерації можна позначити літерою M (чи будь-якою великою літерою латинського алфавіту) або записати так $\{1, 3, 5, 2, 4, 6, 8, 7, 9, 0\}$.

Належність предмета даній множині позначається символом « \in », а неналежність — символом « \notin » (інколи $\overline{\in}$). Наприклад, число $7 \in A$, де A — множина чисел першого десятка, а число $12 \notin A$.

Множини бувають скінченні і нескінченні. У скінченній множині міститься певна кількість елементів, тобто кількість елементів скінченної множини виражається натуральним числом. Наприклад, множина M цифр десяткової нумерації скінчена і містить десять елементів. У нескінченній множині — нескінчена кількість елементів. Наприклад, множина



Мал. 77

Схематично переріз множин A і B можна зобразити за допомогою фігур так, як на малюнку 77. Символічно позначається так: $C = A \cap B$.

Приклад 2. M — множина прямокутників, N — множина ромбів, тоді $P = M \cap N$ — множина квадратів.

Об'єднання множин.

Об'єднанням (або сумаю) двох множин A і B називається така множина C , яка складається з усіх елементів множин A і B , і лише з них.

Позначається $C = A \cup B$.

Якщо множини A і B мають спільні елементи, тобто $A \cap B \neq \emptyset$, то кожний із цих спільних елементів береться в множину C лише один раз.

Приклад 3. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, тоді $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Приклад 4. Q — множина раціональних чисел, I — множина іrrаціональних чисел. Тоді множиною R усіх дійсних чисел буде об'єднання множин Q і I , тобто $R = Q \cup I$.

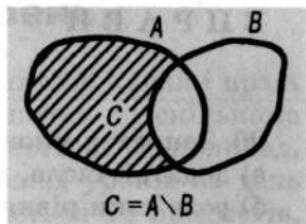
Схематично об'єднання множин A і B зображене на малюнку 78.

Операції над множинами широко використовуються в математиці, інших науках, на практиці. Наприклад, множиною

пробуваннях подія A може мати або різні імовірності, або одну ту саму імовірність. Якщо незалежні повторні випробування проводять за одного й того самого комплексу умов, то імовірність здійснення події A в кожному випробуванні одна й та сама. Надалі

Віднімання множин. Доповнення множини.

Різницею двох множин A і B називається така множина C , яка складається з усіх елементів множини A , які не належать множині B .



Мал. 79

Позначається $C = A \setminus B$.

Схематично різницю двох множин A і B зображенено на малюнку 79.

Приклад 5.

1. $A = \{5, 6, 8, 12\}$, $B = \{5, 6\}$, тобто $B \subset A$. Тоді $C = A \setminus B = \{8, 12\}$.

2. $A = \{5, 6, 8, 12\}$, $B = \{8, 12, 1, 2\}$, тоді $C = A \setminus B = \{5, 6\}$.

3. $A = \{5, 6, 12\}$, $B = \{1, 2\}$, тоді $C = A \setminus B = \{5, 6, 12\}$.

4. $A = \{5, 6\}$, $B = \{5, 6, 12\}$, тобто $B \supset A$, тоді $C = A \setminus B = \emptyset$.

У випадку коли $A \supseteq B$, то різниця $C = A \setminus B$ називається **доповненням** множини B відносно множини A і позначається $C_A B$.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Навести приклади множин.
2. Які бувають множини за кількістю елементів? Як вони позначаються?
3. Як позначаються належність і неналежність елемента певній множині?
4. Якими способами задаються множини? Навести приклади.
5. Які множини називаються рівними? Навести приклади рівних множин.
6. Яка множина називається підмножиною даної множини? Навести приклади і записати їх символічно.
7. Що називається перерізом двох множин? Навести приклад і записати його символічно.
8. Що називається об'єднанням двох множин? Навести приклад і записати його символічно.
9. Що називається різницею двох множин? Навести приклад і записати його символічно.
10. Що таке доповнення множини B відносно множини A ? Навести приклад і записати його символічно.

В П Р А В И

А

96. Записати множини, перелічивши їх елементи:

- додатні числа, кратні 7 і менші від 60;
- розв'язки рівняння $x^2 - 3x - 10 = 0$.

97. Записати всі підмножини множини $M = \{5, 12, 6\}$.

98. Знайти об'єднання і переріз множин розв'язків рівнянь $x^2 - 3x + 2 = 0$ і $x^2 - 1 = 0$.

99. Знайти різниці $A \setminus B$ і $B \setminus A$, якщо $A = \{a, b, c, d\}$ і $B = \{b, d, p, q, r\}$.

Б

100. Нехай A — множина цілих чисел, що діляться на 4, B — множина цілих чисел, що діляться на 3. Які з чисел 9, 0, -24, -53, 128, 1 242 048 входять у множину $A \cup B$?

101. Нехай A — множина, що складається з 20 студентів, які потребують проїзних квитків на тролейбус, B — множина проїзних квитків на тролейбус. Чи $A = B$? Обґрунтуйте відповідь.

102. Знайти суму множин: а) A — {парні числа}, B — {натуральні степені числа 2};

б) M = {прості числа}, P = {непарні числа}.

103. Знайти: а) переріз множин $M = \{\text{прості числа, менші від } 40\}$, $P = \{\text{непарні числа, більші за } 14\}$; б) різницю множин $K = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ і $L = \{2, 4, 6\}$.

В

104. Нехай $N = \{\text{натуральні числа}\}$, $D = \{\text{додатні раціональні числа}\}$, $P = \{\text{прості числа}\}$, $S = \{\text{додатні непарні числа}\}$. Чи правильне твердження: $P \subset (S \cap N) \cup D$?

105. Якщо $A \subset B \subset C$, то чи правильні твердження:
а) $A \cup B \subset C$; б) $A \setminus C = B \setminus C$; в) $C \setminus B = C \setminus A$?

106. Зі 100 студентів лише німецьку мову вивчають 18; німецьку, але не англійську — 23, німецьку і французьку — 8; німецьку — 26, французьку — 48, англійську і французьку — 8; ніякої мови не вивчають — 24. Скільки студентів вивчають англійську мову? Скільки студентів вивчають англійську і німецьку мови, але не французьку? Скільки студентів вивчають французьку мову в тому і лише тому випадку, якщо вони не вивчають англійську?

107. Якщо множина A містить n елементів, а множина B — m елементів, то в якому випадку множина $A \cup B$ буде містити $m + n$ елементів?