Б

114. Спростити: а) $\frac{(2n)!}{(2n+1)!}$; б) $\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}$.

115. У речовій лотереї розігруються 5 предметів. Перший, хто підійшов до урни, виймає з неї 5 білетів. Скількома способами він може їх вийняти, щоб три з них виявилися виграшними, якщо в урні 100 білетів?

116. Збори, на яких були присутні 30 осіб, у тому числі дві жінки, обирали чотирьох співробітників для роботи на виборчій дільниці. Скільки може бути випадків, коли до числа обраних увійдуть обидві жінки?

117. Шістнадцять екскурсантів розділилися на дві рівні групи для розшуку товариша, який заблукав. Серед них є лише 4, хто знає місцевість. Скількома способами вони можуть розділитися так, щоб до кожної групи ввійшли дві особи, які знають місцевість?

118. Розв'язати рівняння $\frac{A_{x+2}^{n+2}P_{x-n}}{P_x}=110$, якщо n — ціле, невід'ємне.

В

119. Довести, що $C_n^{m+1}+C_n^{m-1}+2C_n^m=C_{n+2}^{m+1}$.

120. Будівельна організація виділила на допомогу підшефному дитячому будинку бригаду з 5 робітників. В організації працюють 20 робітників, у тому числі 5 мулярів, 4 теслярі і 2 штукатури. Скількома способами можна укомплектувати бригаду, щоб вона складалася з робітників усіх цих спеціальностей по одному?

121. Скільки різних натуральних чисел можна утворити з цифр 0, 1, 2, 3, 4, якщо кожне число містить кожну з даних цифр не більше одного разу?

122. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} A_y^x : P_{x-1}+C_y^{y-x}=126, \\ P_{x+1}=720. \end{cases}$

123. Скількома різними способами можна посадити 6 гостей навколо круглого стола?

§ 35. Біном Ньютона

Двочлен $(a+b)$ називають також **біномом.** Подамо послідовно у вигляді многочлена степені бінома з нульовим і натуральними показниками:

$(a+b)^0=1;$

$(a+b)^1=1\cdot a+1\cdot b;$

$(a+b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2ab + 1 \cdot b^2;$

$(a+b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1 \cdot b^3;$

$(a+b)^4 = (a+b)^3 \cdot (a+b) = 1 \cdot a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + 1 \cdot ab^3 + 1 \cdot a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + 1 \cdot b^4;$

$(a+b)^4 = 1 \cdot a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1 \cdot b^4.$

Неважко помітити, що коефіцієнти розкладу степенів бінома збігаються з відповідними рядками трикутника Паскаля.

Виникає припущення, що такий збіг виконується і для будь-якого натурального показника n в розкладі $(a+b)^n$.

Теорема.

Коефіцієнти розкладу $(a+b)^n$ збігаються з n-м рядком трикутника Паскаля, тобто для будь-якого натурального показника n справджується рівність

$$\boxed{(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^m a^{n-m} b^m + \ldots + C_n^n b^n}. \quad (1)$$

Доведення (методом математичної індукції).

1. Для $n = 1$ маємо $(a+b)^1 = C_1^0 a + C_1^1 b$, тобто теорема справджується.

2. Припустимо, що для $n = k$ теорема правильна, і на основі цього припущення доведемо, що вона правильна і для $n = k + 1$.

Справді, припустимо, що для $n = k$ правильна рівність

$$(a+b)^k = C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b + \ldots + C_k^{m-1} a^{k-m+1} b^{m-1} + C_k^m a^{k-m} b^m + C_k^{m+1} a^{k-m-1} b^{m+1} + \ldots + C_k^{k-1} ab^{k-1} + C_k^k b^k.$$

Тоді $(a+b)^{k+1} = (a+b)^k \cdot (a+b) = C_k^0 a^{k+1} + C_k^1 a^k b + \ldots + C_k^{m-1} a^{k-m+2} b^{m-1} + C_k^m a^{k-m+1} b^m + C_k^{m+1} a^{k-m} b^{m+1} + \ldots + C_k^{k-1} a^2 b^{k-1} + C_k^k ab^k + C_k^0 a^k b + C_k^1 a^{k-1} b^2 + \ldots + C_k^{m-1} a^{k-m+1} b^m + C_k^m a^{k-m} b^{m+1} + C_k^{m+1} a^{k-m-1} b^{m+2} + \ldots + C_k^{k+1} ab^k + C_k^k b^{k+1} = C_k^0 a^{k+1} + (C_k^0 + C_k^1) a^k b + \ldots + (C_k^{m-1} + C_k^m) a^{k-m+1} b^m + (C_k^m + C_k^{m+1}) a^{k-m} b^{m+1} + \ldots + (C_k^{k-1} + C_k^k) ab^k + C_k^k b^{k+1}.$

Враховуючи, що $C_k^0 = C_{k+1}^0 + C_k^k = C_{k+1}^{k+1} = 1$ і $C_k^{m-1} + C_k^m = C_{k+1}^m$, остаточно матимемо $(a+b)^{k+1} = C_{k+1}^0 a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^k b + \ldots + C_{k+1}^m a^{k+1-m} b^m + \ldots + C_{k+1}^{k+1} b^{k+1}.$

Отже, теорема правильна і для $n = k + 1$.

3. На основі принципу математичної індукції теорема правильна для будь-якого натурального n.

Формула (1) дістала назву **формули бінома Ньютона** на честь видатного англійського фізика і математика Ісаака Ньютона.

Коефіцієнти правої частини формули бінома Ньютона називаються біноміальними коефіцієнтами.

Якщо $a = 1$ і $b = x$, то формула (1) дає $(1 + x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \ldots + C_n^n x^n$.

За формулою (1) можна швидко записувати розклад будь-якого натурального степеня бінома.

Приклад 1. Написати розклад степеня $(1 - x)^8$. Тут $a = 1$, $b = -x$. Враховуємо, що знаки розкладу чергуватимуться. За допомогою восьмого рядка трикутника Паскаля дістанемо $(1 - x)^8 = 1 - 8x + 28x^2 - 56x^3 + 70x^4 - 56x^5 + 28x^6 - 8x^7 + x^8$.

Розглянемо **властивості формули бінома Ньютона.**

1. Враховуємо, що в правій частині формули (1) міститься $(n + 1)$ членів, оскільки розклад включає всі степені b від 0 до n.

2. Позначимо k -й член розкладу через T_k. Врахуємо, що

$$T_1 = C_n^0 a^n b^0 = a^n, \quad T_2 = C_n^1 a^{n-1} b = na^{n-1} b, \ldots, T_k = \\ = C_n^{k-1} a^{n-k+1} b^{k-1}, \quad T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Отже,

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k. \tag{2}$$

Формулу $(k + 1)$-го члена можна записати у вигляді

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k} a^{n-k} b^k, \tag{3}$$

підставивши замість C_n^k його значення за формулою числа комбінацій.

Формулу (2) і відповідно (3) називають **формулою загального члена розкладу степеня бінома.**

3. Показник степеня a послідовно зменшується на 1, а b — збільшується на 1. Внаслідок цього сума показників степенів a і b в кожному члені стала і дорівнює показнику степеня бінома n.

4. Коефіцієнти членів, рівновіддалених від початку і кінця розкладу, рівні між собою (обґрунтуйте це самостійно, користуючись властивостями комбінацій).

5. Сума біноміальних коефіцієнтів дорівнює 2^n.

Для доведення цієї властивості достатньо покласти в формулі (1) $a = b = 1$.

6. Щоб дістати біноміальний коефіцієнт наступного члена, слід біноміальний коефіцієнт попереднього помножити на показник степеня a в цьому члені і розділити на число попередніх членів.

Справді, оскільки $C_n^{k+1} = \dfrac{C_n^k (n-k)}{k+1}$, то $T_{k+2} = = C_n^k \dfrac{n-k}{k+1} a^{k+1} b^{n-k-1}$.

Формула (2) дає змогу обчислювати будь-який член розкладу натурального степеня бінома.

Приклад 2. Знайти восьмий член розкладу $(x - a)^{12}$.

Розв'язання. Тут $(x - a)^{12} = (x + (-a))^{12}$.

За формулою (2) загального члена розкладу бінома маємо:

$$T_8 = T_{7+1} = C_{12}^7 x^{12-7}(-a)^7 = -C_{12}^7 x^5 a^7 =$$
$$= -C_{12}^5 x^5 a^7 = -792a^7x^5.$$

Приклад 3. У розкладі $(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2})^{12}$ знайти член, який містить після спрощення x у сьомому степені.

Розв'язання. За формулою (2):

$$T_{k+1} = C_{12}^k(\sqrt{x})^{12-k}(\sqrt[3]{x^2})^k = C_{12}^k(x^{\frac{1}{2}})^{12-k}(x^{\frac{2}{3}})^k =$$
$$= C_{12}^k x^{6-\frac{k}{2}} x^{\frac{2k}{3}} = C_{12}^k x^{6+\frac{k}{6}}$$

За умовою задачі, $6 + \frac{k}{6} = 7$. Звідки $k = 6$. Отже, шуканий член буде сьомий. Він дорівнює $T_{6+1} = C_{12}^6 x^7 = \frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}x^7 = 924\ x^7$.

Зауваження. Слід розрізняти поняття біноміальний коефіцієнт члена розкладу і коефіцієнт цього члена.

Наприклад, у розкладі $(1 - x)^8 = 1 - 8x + 28x^2 - 56x^3 + 70x^4 - 56x^5 + 28x^6 - 8x^7 + x^8$ біноміальний коефіцієнт четвертого члена дорівнює $C_8^3 = \frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3} = 56$, а його коефіцієнт дорівнює -56.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. Що таке формула бінома Ньютона?
2. Назвіть властивості бінома Ньютона.
3. Як знайти n-й член розкладу бінома Ньютона?
4. Доведіть формулу бінома Ньютона?

ВПРАВИ

А

124. За формулою бінома Ньютона знайти розклад степеня:

а) $(3x + 4y)^6$; б) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^5$.

125. У розкладі $\left(x^2 - \frac{3}{x^3}\right)^{15}$ обчислити член, який не містить x.

126. Обчислити $29^5 = (30 - 1)^5 = \ldots$.

Б

127. За формулою бінома Ньютона знайти розклад степеня: а) $(a - 2b)^8$; б) $(\sqrt[3]{2a} - \sqrt[3]{3b})^5$.

128. У розкладі $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{16}$ знайти член, який містить x^3.

В

129. За формулою бінома Ньютона знайти розклад степеня: а) $(x^2 + 2y^2)^4$; б) $(2\sqrt{2} + \sqrt{6})^6$.

130. У розкладі $\left(a\sqrt[3]{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^m$ знайти член, який після спрощення має a^6, а різниця коефіцієнтів третього і другого членів дорівнює 35.

131. Обчислити $99^5 = (100 - 1)^5$.