РОЗДІЛ 7

ПОЧАТКИ ТЕОРІЇ ІМОВІРНОСТЕЙ

Теорія імовірностей, подібно до інших розділів математики, розвинулася з потреб практики; в абстрактній формі вона відображає закономірності, властиві подіям масового характеру. Ці закономірності відіграють надзвичайно важливу роль у фізиці та інших галузях природознавства, військовій справі, різноманітних технічних дисциплінах, економіці тощо.

Б. В. Гнеденко

§ 36. Поняття про теорію імовірностей

Характерною особливістю математики, яку ви до цього часу вивчали, є визначеність невідомих, які знаходили під час розв'язування різних задач. Наприклад, об'єм V куба має певне значення, якщо відома довжина його ребра. Значення миттєвої швидкості визначається заданням функції $s = f(t)$, що виражає закон руху, і значенням моменту часу t, в який визначається миттєва швидкість.

Зокрема, миттєва швидкість тіла, що вільно падає, у момент часу $t = 4$ с дорівнює значенню похідної функції $s = \frac{gt^2}{2}$, якщо $t = 4$ с.

Але часто доводиться мати справу з явищами реального світу, які залежать від невідомих обставин або від таких, що не піддаються обліку. Наприклад, не можна передбачити, на який білет випаде виграш у майбутньому тиражі лотереї, скільки зернин дасть певний колос від посіяної зернини пшениці, скільки випускників середніх шкіл подадуть заяви до Національного педагогічного університету ім. М. Драгоманова, чи будуть серед деталей, оброблених токарем за зміну, браковані та скільки їх.

Розглянемо приклади, які показують, що у випадкових явищах (подіях) існують певні закономірності.

Теорія імовірностей вивчає масові випадкові події та їх закономірності.

Таблиця 8

Кількість випадань гербів у серіях з $n = 100$ випробувань										Загальна кількість гербів у серіях з $n = 1000$ випробувань
54	46	53	55	46	54	41	48	51	53	501
48	46	40	53	49	49	48	54	53	45	485
43	52	58	51	51	50	52	50	53	49	509
58	60	54	55	50	48	47	57	52	55	536
48	51	51	49	44	52	50	46	53	41	485
49	50	45	52	52	48	47	47	47	51	488
45	47	41	49	49	59	60	55	53	50	508
53	52	46	44	44	51	48	51	46	51	486
45	47	46	47	47	48	59	57	45	48	489
47	41	51	51	51	52	55	47	41	48	484

Приклад 1. Якщо підкинути монету один раз, то не можна наперед знати, яким боком вона впаде — гербом чи решкою. Не можна помітити якусь закономірність, якщо монету підкинути 10 разів. Але ще у XVIII ст. відомий французький природознавець Ж. Бюффон підкинув монету 4040 разів і при цьому 2048 разів випав герб. Англійський статистик К. Пірсон з 1200 підкидань монети дістав 602 випадання герба, а з 24 000 — 12 120 випадань. Учені помітили, що за багаторазового підкидання монети кількість появ герба чи решки є

приблизно однакова (табл. 8).

[illegible]

Приклад 2. [illegible]

Таблиця 9

Одне слово	Два слова	
	п	н
п	пп	пн
н	нп	нн

Таблиця 10

Перше і друге слова	Три слова	
	п	н
пп	ппп	ппн
пн	пнп	пнн
нп	нпп	нпн
нн	ннп	ннн

Таблиця 11

Перше, друге і третє слова	Чотири слова	
	п	н
ппп	пппп	пппн
ппн	ппнп	ппнн
пнп	пнпп	пнпн
пнн	пннп	пннн
нпп	нппп	нппн
нпн	нпнп	нпнн
ннп	ннпп	ннпн
ннн	нннп	нннн

котитися як вправо, так і вліво. Проте шріт збирається у гніздах не рівномірно, а має дзвіноподібний розподіл.

Приклад 3. Учні одного класу провели такий дослід (проведіть його і ви). Кожен учень навмання написав на аркуші паперу якісь чотири слова і підрахував, скільки літер має кожне з написаних слів. Знайдені числа записав проти відповідного слова, а число слів з парною кількістю літер записав у прямокутнику.

Запис може мати такий вигляд:

математика — 10
квітка — 6
стіл — 4
літак — 5

$\boxed{3}$

Кожний із 20—35 учнів класу виконував три такі записки.

Після цього два учні зібрали всі записки і підрахували, не оголошуючи результатів, кількість записок, що мають у рамці числа 0, 1, 2, 3, 4.

У цей час учитель біля дошки веде розрахунки, які дадуть змогу передбачити можливу кількість таких записок. При цьому враховувалося, що поява в рамці кожної записки чисел 0, 1, 2, 3,4 — події випадкові, масові.

В основу розрахунку покладемо, що слова з парною і непарною кількістю літер трапляються однаково часто. Крім того, для одного слова можливі лише дві випадкові події:

І подія — слово має парне число літер (п);

ІІ подія — слово має непарне число літер (н).

Для двох слів можливі чотири події (табл. 9).

Для трьох слів можливі вісім випадкових подій (табл. 10).

Для чотирьох слів можливі шістнадцять випадкових подій

(табл. 11). Кожна з 16-ти подій можлива в $\frac{1}{16}$ частині всіх записок.

На основі таблиці 11 можна зробити висновок щодо можливого розподілу записок.

1) Подія, що відповідає появі всіх чотирьох слів з парним числом літер, трапляється в таблиці лише один раз. Тому всі чотири слова можуть мати парне число літер в $\frac{1}{16}$ частині всіх записок.

2) Подія, що відповідає появі трьох слів з парним числом літер, повторюється в таблиці чотири рази. Тому три слова можуть мати парне число літер в $\frac{1}{16} \cdot 4 = \frac{1}{4}$ частині всіх записок.

3) Подія, що відповідає появі двох слів з парним числом літер, трапляється шість разів. Тому два слова можуть мати парне число літер в $\frac{1}{16} \cdot 6 = \frac{3}{8}$ частині всіх записок.

4) Подія, що відповідає появі одного слова з парним числом літер, повторюється в таблиці чотири рази. Тому слід чекати появи одного слова з парним числом літер в $\frac{1}{16} \cdot 4 = \frac{1}{4}$ частині всіх записок.

5) Немає слів з парним числом літер в $\frac{1}{16}$ частині всіх записок.

У класі, де проводився дослід, 26 учнів написали $26 \cdot 3 = 78$ записок. Тому розрахунки дають такі результати:

з числом 4 у рамці має бути $78 \cdot \frac{1}{16} = 4\frac{7}{8}$, тобто 4 або 5 записок;

з числом 3 має бути $78 \cdot \frac{1}{4} = 19\frac{1}{2}$, тобто 19 або 20 записок;

з числом 2 має бути $78 \cdot \frac{3}{8} = 29\frac{1}{4}$, тобто 29 або 30 записок;

з числом 1 має бути $78 \cdot \frac{1}{4} = 19\frac{1}{2}$, тобто 19 або 20 записок;

з числом 0 має бути $78 \cdot \frac{1}{16} = 4\frac{7}{8}$, тобто 4 або 5 записок.

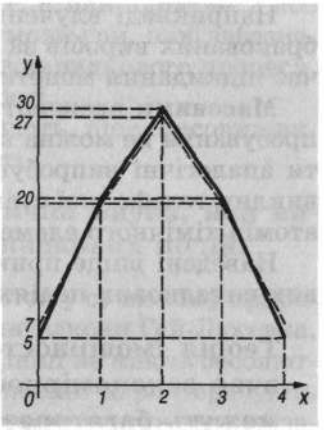
Результати досліду, які дістали учні, підрахувавши наявну кількість записок, виявилася такими: з числом 4 було 5 записок, з числом 3 — 20, з числом 2 — 27, з числом 1 — 19 записок, з числом 0 — 7 записок.

Наочне уявлення характеру розподілу записок дає графік, на якому вздовж осі Ox відкладено числа 0, 1, 2, 3, 4, а вздовж осі Oy — відповідну кількість записок. Якщо в одній системі координат побудувати графік розподілу записок за результатами досліду і результатами попереднього розрахунку вчителем, то графіки мало чим відрізнятимуться один від одного (мал 81). До того ж

форма графіків нагадує розподіл шроту на дошці Гальтона.

Як бачимо, ще до проведення досліду можна теоретично передбачити його результати з невеликою похибкою. Таке передбачення є найціннішим у будь-якому науковому дослідженні і в теорії імовірностей зокрема.

Узагальнюючи розглянуті приклади, введемо поняття стохастичного експерименту.



Мал. 81

Будемо називати **експеримент** (дослід, випробування) **стохастичним**, якщо за виконання певної сукупності умов його можна повторювати необмежену кількість разів і результати якого наперед не можна передбачити.

Можливий результат стохастичного експерименту називають **подією** і позначають великими літерами латинського алфавіту A, B, C, ...

Подія — це не якийсь випадок, пригода, а лише можливий результат стохастичного експерименту (випробування, досліду).

Подію називають випадковою, якщо за виконання певної сукупності умов S вона може відбутися або не відбутися.

Для скорочення вимови надалі замість того, щоб говорити «певну сукупність умов виконано», говоритимемо «виконане випробування».

Приклади випробувань і відповідних їм подій наведено в таблиці 12.

Наведіть самостійно приклади випробувань і відповідних їм подій.

Масовими називають однорідні випадкові події, що спостерігаються за певних умов, які можуть бути відтворені необмежену кількість разів.

Таблиця 12

Випробування	Випадкова подія
Підкидання грального кубика	Поява чотирьох очок на верхній грані
Гра в шахи	Виграш у суперника
Випуск ламп електроламповим заводом	Поява бракованої лампи

Наприклад, влучення або промах у серії пострілів, поява бракованих виробів за їх серійного випуску, поява решки під час підкидання монети.

Масовими вважаються і ті події, для яких відповідні випробування не можна відтворити, але є можливість спостерігати аналогічні випробування у великій кількості. Наприклад, виклик телефонної станції абонентами, радіоактивний розпад атомів хімічного елемента.

Наведені вище приклади 1—3 свідчать про те, що в масових випадкових подіях існують закономірності.

Теорія імовірностей — математична наука, яка вивчає закономірності масових випадкових подій, що можуть багаторазово повторюватися за поновлення певної сукупності умов.

Методи теорії імовірностей застосовуються лише для дослідження масових випадкових подій; вони не дають змоги передбачити появу окремого випадкового явища, наприклад падіння Тунгуського метеорита.

Під час дослідження масових випадкових подій виникає природне бажання з'ясувати, які події мають більше «шансів» відбутися, які — менше. У зв'язку з цим багатьом випадковим подіям ставлять у відповідність певне число, яке тим більше, чим більш можлива подія (чим більше у неї «шансів» відбутися). Таке число називають **імовірністю** події. Імовірність є числова міра її об'єктивної можливості відбутися.

Виникнення теорії імовірностей як науки пов'язане з потребами практики, демографії, страхової справи, азартних ігор тощо. Перші праці, в яких зароджувались основні поняття теорії імовірностей, з'явилися в XVI—XVII ст. і належали Д. Кардано (1501—1576), Б. Паскалю (1623—1662), П. Ферма (1601—1665) і Х. Гюйгенсу (1629—1695). У них робилася спроба створити теорію азартних ігор з метою надання рекомендацій гравцям, передбачення їх результатів. Приклади таких передбачень дає історія азартних ігор, які були поширені вже у XVII ст. Одна з них — гра в кості — полягає в тому, що кожний гравець по черзі кидав на стіл два чи три гральні кубики і підраховувалася сума очок, що випала на верхніх гранях у кожного за певної кількості кидань. Умови виграшу були різними. Наприклад, домовлялися, що всю ставку отримує той, у кого загальна сума очок раніше досягне певного числа.

Для визначення шансів на виграш важливо знати, як часто випадає та чи інша кількість очок. Досвідчені гравці помітили,

що за великої кількості кидань двох гральних кубиків найчастіше випадає сума очок, що дорівнює 7, а найрідше — 2 або 12. Враховуючи це, вони ставили такі умови гри, щоб забезпечити собі виграш, тобто впливали на хід випадкового процесу, обмежуючи тим самим вплив випадковості.

Наведені вище приклади 1—3 показують, що в масових випадкових подіях існують закономірності.

Теорія імовірностей — математична наука, яка вивчає закономірності масових випадкових подій.

У наш час зросла роль теорії імовірностей у сучасному природознавстві. Виявляється, що відомі фізичні закони Гей-Люссака, Бойля—Маріотта, Паскаля, Авогадро та інші не мають абсолютного характеру і лише в певному наближенні характеризують існуючі закономірності в природі. Для малих густин газу ці закони вже не діють, і на зміну їм приходять закономірності масових випадкових подій, які вивчає теорія імовірностей.

Сучасне природознавство широко користується теорією імовірностей як теоретичною основою для обробки результатів спостережень у фізиці, механіці, астрономії, геодезії, біології, обчислювальній математиці та інших галузях. Теорія імовірностей застосовується в економіці, статистиці, військовій справі, при встановленні оптимальних каналів зв'язку, на транспорті, у виробництві. У зв'язку з широким розвитком підприємств, що випускають серійну продукцію, теорія імовірностей використовується не лише для бракування виробів, а й для організації виробництва (статистичний контроль у виробництві). Закони спадковості в генетиці формулюються мовою теорії імовірностей.

Теорію імовірностей використовують навіть у гуманітарних науках, зокрема в історичних дослідженнях, в археології для розшифрування написів мовами давно зниклих народів, у шифруванні й дешифруванні, у вивченні закономірностей літературної мови письменників і поетів. Той факт, що свого часу не було змоги дослідити закономірності мови методами теорії імовірностей, призвів до того, що телеграфна азбука Морзе потребує на 10—12 відсотків знаків більше для передачі українського тексту, ніж їх треба для оптимального кодування алфавіту.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. Чим займається теорія імовірностей як математична наука?

2. Що таке стохастичний експеримент?

3. Які події називають випадковими?

4. Навести приклади випадкових подій; масових випадкових подій?

5. Які приклади підтверджують існування закономірностей у масових випадкових подіях.

6. Як виникла теорія імовірностей? Де вона застосовується?

§ 37. Основні поняття теорії імовірностей

Теорія імовірностей, як і будь-яка галузь математики, оперує певною низкою понять. Більшості понять теорії імовірностей даються означення, але є й такі, які приймаються за первісні, неозначувані. Такими, наприклад , у геометрії є точка, пряма, площина.

До первісних понять теорії імовірностей належать поняття **стохастичного експерименту** і поняття **події**.

Множина подій утворює повну групу подій, якщо внаслідок кожного випробування хоч одна з цих подій напевно відбудеться.

Приклади.

1. Поява 1, 2, 3, 4, 5, 6 очок під час одного кидання гральної кості.

2. Виграш чи програш по даному лотерейному білету в певному тиражі.

3. Виймання білої або чорної кулі з урни, де є 2 білі й 3 чорні кулі.

Події $A_1, A_2 ..., A_n$ називаються попарно несумісними в даному випробуванні, якщо жодні дві з них не можуть відбутися разом, або іншими словами, якщо поява однієї з них виключає появу інших подій в одному й тому самому випробуванні.

Приклади.

1. Влучення і промах під час одного пострілу. Тут маємо множину двох попарно несумісних подій.

2. Поява 1, 2, 3, 4, 5, 6 очок під час одного кидання грального кубика — приклад множини із шести попарно несумісних подій.