162. На полиці лежать десять різних книжок, п'ять з яких коштують по 40 к. кожна, три книжки — по 10 к. і дві — по 30 к. Яка імовірність того, що дві взяті навмання книжки разом коштують 50 к.?

163. В урні є 80 номерів, записаних на картках. Кожний учасник лотереї платить 1 гривню і виймає з урни 5 карток. Перед вийманням він записує три задумані номери. Якщо серед вийнятих номерів є три задумані, то учасник виграє 500 гривень. Чи виграшна ця лотерея для учасника?

164. Випадково взята кісточка доміно виявилася дуплем. Яка імовірність того, що другу, також навмання взяту кісточку, можна приставити до першої?

§ 40. Ймовірність з будь-якою точкою відрізка L;

ь потрапляння точки на відрізок l пропорційна довжині цього відрізка і не залежить від його розміщення відносно відрізка L.

их припущень імовірність потрапляння точки на відрізок l визначається рівністю $p = \frac{\text{довжина } l}{\text{довжина } L}$.

ад 1. На відрізок OA завдовжки L числової осі Ox навмання поставлена точка $B(x)$ (мал. 83). Знайти імовірність того, що менший із відрізків OB і BA має довжину, більшу від $\frac{L}{3}$. Пр

ипускається, що імовірність потрапляння точки $B(x)$ на відрізо

к пропорційна довжині відрізка і не залежить від розміщен

ня його на числовій осі.

язання. Розіб'ємо відрізок OA точками C і D на три рівні частини. Вимога задачі буде виконана, якщо точка $B(x)$ потра

апить на відрізок CD завдовжки $\frac{L}{3}$.

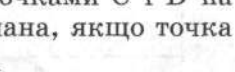
Тоді ш

укана імовірність $p = \frac{\frac{L}{3}}{L} = \frac{1}{3}$.

Нехай

плоскі фігури g і G мають скінченну площу і фігура g становить

частину фігури G. На фігу- ру G навма



ння поставлено точку. При Що ввести це поня

ття, повернемося до прикладу підки- дання гральної кості, як

а має однакову густину, є кубом і підки- дається навмання. Імов

ірність появи шестірки на її грані до- рівнює $\frac{1}{6}$.

Припустимо, що кіс

ть підкинули n разів і шестірка випа- ла m разів.

азивається статистичною частотою Відношення $\frac{m}{n}$ на

ід час проведення серії таких ви- появи шестірки п

пробувань.

Може трапитися, щ

о в n підкиданнях шестірка випаде m_1 разів. Статистична част

m_1

Під час підкидання кості $(n + 1)$ разів шестірка може випасти m_2 разів. Статистична частота в цьому разі $p_2 = \frac{m_2}{n+1}$ і т. д.

Під час підкидання кості N разів шестірка може випасти m_N разів, статистична частота при цьому $p_N = \frac{m_N}{N}$.

Виконавши такі випробування, можна помітити, що для статистичної частоти характерна властивість, яка полягає в тому, що зі збільшенням кількості підкидань вона наближається до числа $\frac{1}{6}$, тобто прямує до імовірності $p = \frac{1}{6}$.

Якщо підкидати неоднорідний гральний кубик (зі зміщенням від геометричного центра ваги), то статистичні частоти появи шестірки так само мають властивість групуватися навколо певного числа p зі збільшенням кількості випробувань. Але число p нам невідоме, бо гральний кубик неоднорідний, і для кожного кубика воно буде іншим.

Прийнято вважати це невідоме число p є **статистичною імовірністю** появи шестірки під час підкидання грального кубика.

Означення статистичної імовірності залежить від проведення випробувань. Наприклад, у разі визначення імовірності роботи діода понад 10 000 год проводять таке випробування: на стенд ставлять 1000 діодів, виготовлених у тих самих умовах і з тієї самої партії матеріалів. Якщо після 10 000 год роботи вийде з ладу 100 діодів, то статистична частота появи діодів (подія A), здатних працювати 10 000 год, дорівнюватиме $\frac{900}{1000} = 0{,}9$. Для великої кількості випробувань можна вважати, що ймовірність події A буде близькою до статистичної частоти.

Після розглянутих прикладів введемо означення статистичної імовірності.

Статистичною імовірністю події A називається невідоме число p, навколо якого зосереджується значення статистичної частоти здійснення події A при зростанні числа випробувань.

Поняття статистичної імовірності широко використовується в практиці: біології, медицині, інженерній справі, економіці та інших галузях.

Припущення про існування імовірності події, що нас цікавить, є гіпотезою, яка в кожному випадку вимагає спеціальної перевірки. Далеко не кожна подія з неоднозначним результатом (за незмінних умов випробування) має певну ймовірність.

Якщо позначити статистичну частоту символом $P_N\{A\}$, де $P_N\{A\} = \frac{m_N}{N}$, то $P_N\{A\} \approx P(A)$, де $P(A)$ — імовірність події A.

Індекс N ставиться спеціально, щоб підкреслити залежність статистичної частоти від кількості випробувань.

Ця наближена рівність, яка виражає властивість стійкості статистичних частот, багаторазово перевірена експериментально і підтверджена практичною діяльністю, є однією з найважливіших закономірностей масових випадкових подій. Математичне формулювання цієї закономірності вперше дав швейцарський математик Якоб Бернуллі у вигляді теореми.

Теорема.

Якщо в ряді випробувань імовірність деякої події залишається для кожного випробування сталою, то з достовірністю можна стверджувати, що при досить великій кількості випробувань статистична частота цієї події відрізнятиметься як завгодно мало від її імовірності.

Теорема Бернуллі є простішою формою так званого **закону великих чисел** — одного з найважливіших законів теорії імовірностей.

У теорії імовірностей велике значення має з'ясуваання питання про те, наскільки частота може відхилятися від імовірності. Таке відхилення вкаже на похибку, яка допускається, якщо прийняти частоту за імовірність.

На можливості визначення величини відхилення частоти від імовірності ґрунтується практичне застосування теорії імовірностей в економіці, метеорології, медицині, біології, астро-

о нас ціка-
спеціальної
м результа-
мовірність.
и $P_N\{A\}$, де
сть події A.

ґрунтується про існування імовірності події, і
вить, є гіпотезою, яка в кожному випадку вимагає
перевірки. Далеко не кожна подія з неоднозначни
том (за незмінних умов випробування) має певну й

Якщо позначити статистичну частоту символом
$P_N\{A\} = \frac{m_N}{N}$, то $P_N\{A\} \approx P(A)$, де $P(A)$ — імовірні

Розв'язання. Позначимо через A подію – навмання взята деталь бракована. Тоді статистична частота дорівнюватиме:

$$P_N\{A\} = \frac{4}{1000} = 0{,}004\,.$$

Якщо серед 2400 деталей виявиться x бракованих, то імовірність події A становитиме $P(A) = \frac{x}{2400}$.

Оскільки $P_N\{A\} \approx P(A)$, то $\frac{x}{2400} \approx 0{,}004$. Звідси $x \approx 10$.

§ 41. Означення геометричної імовірності

Одним з недоліків означення класичної імовірності є те, що його не можна застосовувати до випробувань з нескінченною кількістю наслідків. Для подолання цього недоліку вводиться поняття **геометричної імовірності** — імовірності потрапляння точки в область (відрізок, частину площини, частину простору і т. д.).

Нехай відрізок l становить частину відрізка L, і на відрізок L навмання поставлена точка за умови виконання таких припущень: ця точка мож

ї, теорії стрільби та багатьох інших галузях науки і практ-
і.

еорему Бернуллі вперше було опубліковано в 1713 р. На
дення цієї «золотої теореми», як він її називав, було за-
ено 20 років життя вченого. Доведення Я. Бернуллі ґрун-
лося на розгляді поведінки біноміальних членів $C_n^m p^m q^{n-m}$
мало 12 сторінок тексту.

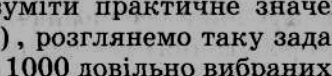
адзвичайно коротке і строге доведення цієї теореми дав у
р. російський математик П. Л. Чебишов.

1837 р. французький математик С. Пуассон довів теоре-
яка узагальнює теорему Бернуллі на випадок, коли імо-
ість події, що розглядається, змінюється в разі повторен-
випробувань.

Доб зрозуміти практичне значення наближеної рівності
$A\} \approx P(A)$, розглянемо таку задачу.

адача. З 1000 довільно вибраних деталей приблизно 4 бра-

ня та-
е суміі-
ури G.



Мал. 83

номі
тики
Т
дове
трач
тува
і зай
Н
1845
У
му,
вірн
ня в
П
$P_N\{$
З
цьому припускається виконан
ких умов: поставлена точка мож
щатися з будь-якою точкою фіг