§ 42. Теорема додавання імовірностей несумісних подій

У теорії імовірностей розрізняють прості й складені події. Наприклад, під час кидання двох костей у сумі випало 2 очки. Це **проста** подія.

Подія називається **складеною**, якщо поява її залежить від появи інших, простих подій. Наприклад, під час кидання двох гральних кубиків у сумі випало 10 очок. Ця подія є складеною, бо вона може складатися з трьох простих подій:

1) на першому кубику випало 4, а на другому — 6 очок;

2) на першому і на другому кубиках випало по 5 очок;

3) на першому кубику випало 6, а на другому — 4 очки.

Обчислювати імовірності складених подій за формулою $P(A) = \frac{m}{n}$ буває складно, а інколи й неможливо. Їх імовірності обчислюють через імовірності простих подій, з яких утворюються складені. Таке обчислення спирається на застосування так званих теорем додавання і множення несумісних однаково можливих подій, які утворюють повну групу, тобто елементарних подій. Теореми додавання і множення доведено для елементарних подій, а для інших, які не належать до елементарних, ці теореми приймаються без доведення, тобто постулюються.

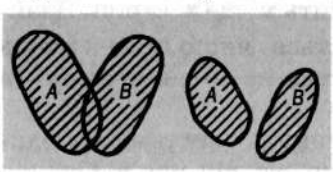
Введемо спочатку поняття про суму подій. Це поняття аналогічне поняттю суми чисел або суми векторів, у тому розумінні, що має ті самі властивості (сполучний і переставний закони). Проте додавання подій – це не дія, а специфічна для теорії імовірностей операція, аналогічна додаванню множин.

Сумою подій A і B називається подія C, яка полягає у здійсненні під час одиничного випробування або події A, або події B, або обох разом.

Суму двох подій позначають $C = A + B$, або $C = A \cup B$.

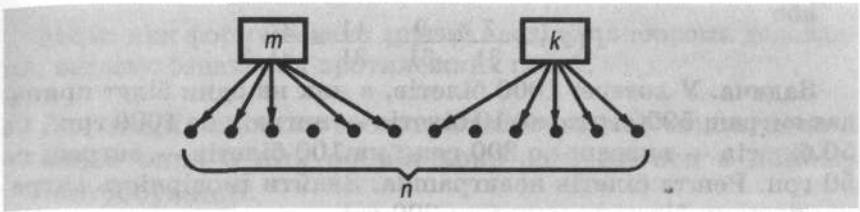
Геометрично сума подій зображена на малюнку 85.

Приклад. Подія A — влучення в ціль з першого пострілу, подія B — влучення з другого пострілу. Тоді $C = A + B$ — подія, яка означає влучення в ціль взагалі (не має значення з якого — першого, другого або обох пострілів).



Мал. 85

Суму подій A і B, як і суму множин, називають **об'єднанням**. Враховуючи означення суми двох подій і поняття несумісних подій, заува-



Мал. 86

жимо, що сумою C двох несумісних подій A і B є подія, яка полягає у здійсненні або події A, або події B. Одночасна поява подій A і B виключена.

Теорема (теорема додавання).

Імовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі імовірностей цих подій, тобто

$$\boxed{P(A + B) = P(A) + P(B)}. \qquad (1)$$

Доведення. Проведемо доведення для класичної імовірності. Нехай у результаті деякого випробування відбувається n елементарних подій. Зобразимо ці події n точками (мал. 86). Нехай з усіх n подій події A сприяють m подій, а події B – k подій. Тоді імовірність події A є $P(A) = \frac{m}{n}$, а події B є $P(B) = \frac{k}{n}$. Оскільки події A і B несумісні, то немає подій, які одночасно сприяли б обом подіям A і B.

Очевидно, що події $A + B$ сприяють $(m + k)$ подій, тому $P(A + B) = \frac{m + k}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} = P(A) + P(B)$, що і доводить теорему.

Методом математичної індукції можна довести, що теорема виконується для суми будь-якої скінченної кількості попарно несумісних подій, тобто

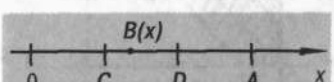
$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Покажемо застосування теореми додавання для обчислення імовірностей складених подій.

Задача. В урні лежать 4 чорних, 7 червоних, 9 зелених і 11 синіх кульок. З урни вийняли одну кульку. Визначити імовір-

…ну фігуру g

…. На фігу-
…очку. При
…нання та-
…може суміс-
… фігури G.



Мал. 83

…Нехай плоскі фігури g і
…становить частину фігури G
…ру G навмання поставлено т
…цьому припускається вико
…ких умов: поставлена точка
…щатися з будь-якою точкою

Перш ніж формулювати другий наслідок з теореми додавання, введемо означення протилежних подій.

Дві події називаються протилежними, якщо одна і лише одна з них обов'язково здійсниться в даному випробуванні.

Наприклад, влучення і промах під час одного пострілу, безвідмовна робота всіх елементів технічної системи і вихід з ладу одного з них.

Наведіть самостійно приклади протилежних подій.

Якщо A — деяка подія, то протилежна їй позначається $\overline{A}$.

Події A і $\overline{A}$ утворюють повну групу несумісних подій.

Наслідок 2. **Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці, тобто**

$$\boxed{P(A) + P(\overline{A}) = 1}.$$

Цей наслідок безпосередньо випливає з першого наслідку теореми додавання і властивості протилежних подій утворювати повну групу несумісних подій.

У задачах на обчислення ймовірностей інколи зручно обчислювати шукану ймовірність події A через ймовірність протилежної події за формулою

$$\boxed{P(A) = 1 - P(\overline{A})}.$$

Задача. Для виготовлення деталі придатні валики з діаметром (11,99—12,20) мм. Автомат виготовляє 1% валиків діаметром, меншим за 11,99 мм, 97% валиків діаметром (11,99—12,20) мм і 2% — діаметром, більшим за 12,20 мм. Яка ймовірність того, що навмання взятий із виробленої партії валик буде непридатний для виготовлення деталі?

Розв'язання. Нехай A — подія, ймовірність якої треба визначити; A_1 — взятий валик діаметром, меншим за 1,99 мм; A_2 — взятий валик, діаметром більшим, за 12,20 мм.

Тоді

$$A = A_1 + A_2,\ P(A) = P(A_1) + P(A_2) = 0{,}01 + 0{,}02 = 0{,}03.$$

Шукану ймовірність можна знайти інакше. Якщо $\overline{A}$ — подія, яка полягає в тому, що навмання взятий валик придатний, то

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}97 = 0{,}03.$$

У попередній задачі, як і в деяких інших практичних задачах, доводиться мати справу з подіями, імовірність яких дуже мала, тобто близька до нуля. А чи можна вважати, що при одиничному випробуванні (досліді) така подія не відбудеться? Досвід свідчить про те, що малоймовірні події в одиничному випробуванні в переважній більшості випадків не відбуваються. На підставі цього прийнятий так званий **принцип практичної неможливості малоймовірних подій:**

якщо випадкова подія має дуже малу імовірність, то практично можна вважати, що в одиничному випробуванні ця подія не відбудеться.

Виникає запитання: наскільки малою має бути імовірність подій, щоб до неї можна було застосувати принцип практичної неможливості?

Для різних задач відповідь на це запитання може бути різною. Наприклад, якщо імовірність того, що при одному стрибку парашут не розкривається, дорівнює 0,01, то не можна використати в цій ситуації згаданий принцип і не можна використовувати такі парашути, а якщо імовірність спізнення потяга становить 0,01, то можна практично бути впевненим, що потяг не спізниться.

Розглянутий принцип уможливлює передбачення і подій, імовірність яких близька до 1. В такому разі можна практично вважати, що в одиничному випробуванні така подія відбудеться.

Задача. На грошово-речовій лотереї на кожні 100 000 білетів припадає 20 речових і 5 грошових виграшів. Чому дорівнює імовірність виграшу (речового чи грошового) для того, хто має хоч один лотерейний білет?

За означенням класичної імовірності, $p = \frac{25}{100000} = 0{,}00025$.

Отже, виграти в такій лотереї на один білет практично неможливо.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

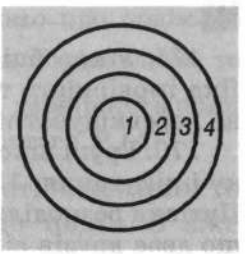
1. Яка подія називається складеною? Навести приклади.
2. Що називається сумою подій? Навести приклади.
3. Сформулювати теорему додавання імовірностей несумісних подій і наслідки з неї.
4. Які дві події називаються протилежними?
5. У чому полягає принцип практичної неможливості малоймовірних подій?

ВПРАВИ

А

167. Маємо 8 білетів, занумерованих числами від 1 до 8. Назвемо події A_1 — виймання білета 1, A_2 — виймання білета 2, ..., A_8 — виймання білета 8. Що означає подія $B = A_3 + A_4 + A_5 + A_6$?

168. Під час стрільби в мішень стрілець має змогу влучити в одну з чотирьох зон (мал. 87). Нехай імовірність влучення в першу зону — 0,24, у другу — 0,17, у третю — 0,12. Знайти імовірність того, що з одного пострілу стрілець влучає або в першу, або в другу зону.



Мал. 87

169. Стрілець влучає в десятку з імовірністю 0,05, у дев'ятку — з імовірністю 0,2, а у вісімку — з імовірністю 0,6. Зроблено один постріл. Яка імовірність подій: A — «вибито не менш ніж вісім очок»; B — «вибито більш ніж вісім очок».

170. У партії з 200 деталей 150 деталей першого ґатунку, 30 — другого, 16 — третього і 4 браковані деталі. Яка імовірність того, що навмання взята деталь буде або першого, або другого ґатунку.

Б

171. Маємо такий розподіл імовірностей світіння електричних ламп за кількістю годин (табл. 14).

Визначити імовірність того, що взята навмання лампа світитиметься: а) більш як 800 год; б) більш як 1000 год; в) не більш як 600 год; г) не менш як 600 год.

172. Завод у середньому випускає 27 % продукції вищого ґатунку і 70 % продукції першого ґатунку. Знайти імовірність того, що навмання взятий виріб буде або вищого, або першого гатунку.

173. У майстерні працюють три верстати. За зміну перший верстат може потребувати налагодження з імовірністю 0,17, другий — з імовірністю 0,3, третій — з імовірністю 0,15.

Таблиця 14

Кількість годин світіння	до 400	400—600	600—800	800—1000	1000—1200	Понад 1200
Імовірність	0,10	0,25	0,30	0,20	0,10	0,05

Знайти імовірність того, що за зміну хоча б один верстат потребує налагодження, вважаючи, що одночасно верстати потребувати налагодження не можуть.

174. Квиток на футбол можна купити з імовірністю 0,3, на баскетбол — з імовірністю 0,4, на волейбол — з імовірністю 0,2. Яка імовірність: 1) потрапити на змагання; 2) потрапити на змагання, де не грають ногами?

В

175. У коробці 10 монет по 25 к., 5 — по 10 к., 2 — по 5 к. Яка імовірність того, що сума взятих навмання шести монет не перевищуватиме однієї гривні?

176. Групі школярів з 30 осіб видали путівки для відпочинку і лікування: 15 — в Крим, 8 — в Одесі, 7 — у Миргороді. Путівки розподіляються жеребкуванням. Яка імовірність того, що двоє друзів відпочиватимуть разом?

177. У партії з п'ятнадцяти деталей 12 стандартних. З цієї партії взято навмання 2 деталі. Знайти імовірність того, що хоч одна з цих двох деталей стандартна.

178. У лотереї випущено n білетів, з яких m виграшні. Куплено k білетів. Яка імовірність того, що хоч один з них виграє?

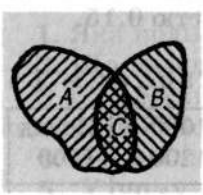
§ 43. Умовна імовірність. Теорема множення імовірностей

Введемо спочатку поняття добутку подій.

Добутком двох подій A і B називається подія C, що полягає у здійсненні під час одиничного випробування і події A, і події B.

Добуток подій позначається $\boxed{C = AB}$ або $\boxed{C = A \cap B}$.

Іншими словами, добутком двох подій A і B називається подія AB, яка полягає у сумісній появі (суміщенні) цих подій. Геометрично добуток двох подій (як і двох множин) зображено на малюнку 88.



Мал. 88

Для добутку n подій використовуються позначення $C = A_1A_2 \ldots A_n$ або $C = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$.

Раніше (в § 36) випадковими було названо події, які при виконанні певної сукупності умов S (випробовування) можуть відбутися або не відбутися. Якщо при обчисленні імовірності