203. Під час військових навчань для зруйнування мосту досить влучення однієї авіаційної бомби. Знайти імовірність того, що міст буде зруйновано, якщо на нього скинуто чотири бомби, імовірності влучення яких відповідно дорівнюють 0,3; 0,4; 0,6; 0,7.

204. Багаторазово вимірюють деяку фізичну величину. Імовірність того, що при зчитуванні показань приладу допущена похибка, становить P. Знайти найменшу кількість вимірів, які необхідно виконати, щоб з імовірністю $P > \alpha$ можна було сподіватися, що хоча б один результат вимірів виявиться неправильним.

§ 47. Незалежні випробування. Схема Бернуллі

У практичному застосуванні теорії імовірностей трапляються задачі, в яких одне й те саме випробування (або аналогічні до нього) *повторюється неодноразово. При цьому всі випробування* є взаємно незалежними.

Взаємно незалежними називаються такі випробування, в яких імовірність результату кожного з них не залежить від того, які результати має чи матиме решта випробувань.

Наприклад, кілька послідовних виймань кульок з урни, в якій міститься 5 білих і 7 чорних кульок, є незалежними випробуваннями за умови, що вийняту кульку щоразу повертають в урну і кульки перемішують. Якщо кульки не повертають, то ці випробування залежні.

Очевидно, що внаслідок незалежних випробувань відбуваються незалежні події.

Часто задачі практики являють собою випробування, які багаторазово повторюються за даного комплексу умов і вимагається знайти імовірність числа m появи деякої події A в n випробуваннях. Наприклад, треба визначити імовірність числа влучень у мішень при кількох пострілах, імовірність деякого числа бракованих виробів у певній партії і т. д.

Якщо імовірність появи події A в кожному випробуванні не змінюється залежно від появи інших, то такі випробування називають **незалежними відносно події** A. У різних незалежних випробуваннях подія A може мати або різні імовірності, або одну й ту саму імовірність. Якщо незалежні повторні випробування проводять за одного й того самого комплексу умов, то **імовірність появи події A в кожному випробуванні одна й та сама.** Надалі

будемо розглядати лише такі незалежні випробування, в яких подія A має одну й ту саму імовірність.

Розв'яжемо задачі.

Задача 1. Виконуються три незалежні постріли в мішень, імовірність влучення в яку $p = 0{,}8$. Знайти імовірність того, що під час цих трьох пострілів буде два влучення.

Розв'язання. Нехай A — подія, яка полягає в тому, що в мішень буде два влучення, і A_1, A_2, A_3 — влучення відповідно під час першого, другого і третього пострілів.

Подію A можна подати у вигляді суми трьох несумісних подій:

$$A = A_1 A_2 \overline{A_3} + A_1 \overline{A_2} A_3 + \overline{A_1} A_2 A_3,$$

де $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}$ — промахи відповідно під час першого, другого і третього пострілів, а кожний з доданків є добутком трьох незалежних подій.

Застосовуючи теореми додавання і множення, дістанемо:

$$P(A) = pp(1-p) + p(1-p)p + (1-p)pp.$$

Якщо позначити $q = 1 - p$, то $P(A) = 3p^2q$, тобто $P(A) = 3 \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}384$.

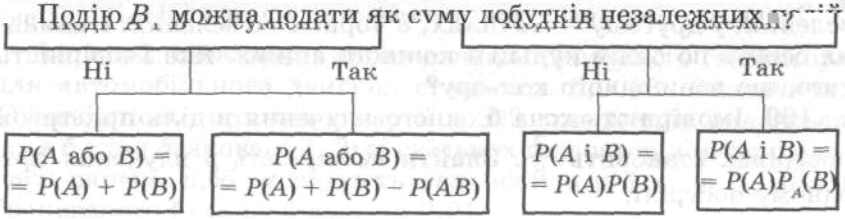
Узагальнення розв'язування задач такого виду називається **схемою Бернуллі, або схемою повернутої кульки.**

Задача 2. Відбувається n незалежних випробувань, у кожному з яких подія A може настати чи не настати. Імовірність здійснення події A в кожному випробуванні однакова і дорівнює p, а імовірність нездійснення події A є $q = 1 - p$.

Знайти ймовірність $p_{m,n}$ того, що подія A настане в цих n випробуваннях m разів.

Розв'язання. Нехай B_m — подія, яка полягає в тому, що подія A настане в n випробуваннях m разів.

Подію B_m можна подати як суму добутків незалежних подій



Отже, якщо виконується n незалежних випробувань, у кожному з яких подія A відбувається з імовірністю p, то імовірність того, що подія A настане m разів, визначається за формулою:

$$\boxed{P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}}.$$

Ця формула називається **формулою Бурнуллі.**

Оскільки права частина формули Бернуллі є членом розкладу бінома $(p+q)^n$, то розподіл імовірностей за цією формулою називається біноміальним розподілом.

Відомо, що $C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(m-1))}{m(m-1)\ldots 2\cdot 1}$, або $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, то формула Бернуллі матиме вигляд $P_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}$. Застосуємо формулу Бернуллі до обчислення імовірностей.

Задача 3. З урни, в якій міститься 3 білих і 2 чорні кульки, п'ять разів виймають по одній кульці і кульки повертають в урну перед наступним випробуванням. Знайти імовірність того, що в цих випробуваннях білу кульку виймають три рази в будь-якій послідовності.

Р о з в ' я з а н н я. Імовірність появи білої кульки в цих п'яти незалежних випробуваннях однакова і дорівнює $p = \frac{3}{5}$, а імовірність непояви — $q = \frac{2}{5}$.

За формулою Бернуллі, $P_{3,5} = C_5^3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{3^3\cdot 2^2}{5^5} = \frac{216}{625}$.

Інколи замість символа $P_{m,n}$ використовують символ $P_n(m)$. Тоді формула Бернуллі матиме вигляд

$$\boxed{P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}}.$$

Варто запам'ятати такі **окремі випадки** імовірності того, що подія A настане:

1) менш як m разів: $P(A) = P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P(m-1)$;
2) більш як m разів: $P(A) = P_n(m+1) + P_n(m+2) + \ldots + P_n(n)$;
3) не менш як m разів: $P(A) = P_n(m) + P_n(m+1) + \ldots + P_n(n)$;
4) не більш як m разів: $P(A) = P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(m)$.

Задача 4. Два рівносильні шахісти грають у шахи. Що імовірніше: виграти дві партії з трьох, чи три партії з п'яти (нічия до уваги не береться)?

Розв'язання. Оскільки шахісти рівносильні, то $p = 0{,}5$ і $q = 0{,}5$. Тоді

$$P_3(2) = C_3^2 \cdot (0{,}5)^2 \cdot (0{,}5)^1 = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} \cdot (0{,}5)^3 = 0{,}375;$$

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot (0{,}5)^3 \cdot (0{,}5)^2 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot (0{,}5)^5 = 0{,}3125.$$

Отже, імовірніше виграти дві партії з трьох.

Задача 5. Внаслідок багаторічних спостережень помічено, що з 1000 новонароджених у середньому 515 хлопчиків і 485 дівчаток.

Знайти імовірність того, що в родині, де шестеро дітей, не більш як дві дівчинки.

Розв'язання. Для здійснення події A, імовірність якої ми хочемо знайти, потрібно, щоб у родині або не було дівчаток, або була одна, або дві дівчинки. Отже, $A = A_0 + A_1 + A_2$, де A_0 — в родині немає дівчаток, A_1 — в родині одна дівчинка, A_2 — в родині дві дівчинки. Ці події несумісні.

За теоремою додавання, $P(A) = P(A_0) + P(A_1) + P(A_2)$. Для кожної дитини імовірності того, що це хлопчик — $p = 0{,}515$, а імовірність того , що дівчинка — $q = 1 - p = 0{,}485$. Імовірність події A_0 (усі шість — хлопчики) знайдемо за теоремою множення $P(A_0) = (0{,}515)^5 \approx 0{,}036$, або за формулою Бернуллі: $P(A_0) = C_6^0 \cdot 0{,}485^0 \cdot 0{,}515^6 \approx 0{,}036$.

Імовірності подій A_1 і A_2 обчислимо за формулою Бернуллі:

$$P(A_1) = C_6^1 \cdot 0{,}485 \cdot 0{,}515^5 = 6 \cdot 0{,}485 \cdot 0{,}515^5 \approx 0{,}105;$$

$$P(A_2) = C_6^2 \cdot 0{,}485^2 \cdot 0{,}515^4 = 15 \cdot 0{,}485^2 \cdot 0{,}515^4 \approx 0{,}248.$$

Отже, $P(A) \approx 0{,}036 + 0{,}105 + 0{,}248 = 0{,}389$.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. Які випробування називаються взаємно незалежними? Навести приклади.

2. Записати формулу Бернуллі. До розв'язування яких задач її застосовують?

ВПРАВИ

205. Імовірність виготовлення на автоматичному верстаті стандартної деталі становить 0,9. Чому дорівнює імовірність того, що з 5 виготовлених на ньому деталей 3 будуть стандартними?

206. Що імовірніше: виграти у рівносильного супротивника; а) три партії з чотирьох чи п'ять з восьми; в) не менше від трьох партій з чотирьох чи не менше від п'яти з восьми?

207. У три вагони метрополітену заходять дев'ять пасажирів. Кожний пасажир вибирає вагон навмання. Яка імовірність того, що в перший вагон зайдуть три з них?

208. У лотереї n білетів, з яких m виграшні. Учасник лотереї придбав k білетів. Яка імовірність того, що виграє хоча б один білет?

209. Робітник обслуговує 4 верстати. Кожний верстат за 6 год роботи кілька разів зупиняється. Загальна тривалість зупинок становить 0,5 год, причому зупинки верстатів у будь-який момент часу однаково імовірні. Визначити імовірність того, що в даний момент часу:

а) працює один верстат; б) працюють два верстати;

в) працюють не менш як три верстати.

210. Імовірність того, що затрата води на підприємстві виявляться нормальною, не більшою за певну кількість літрів на добу, становить $\frac{3}{4}$. Знайти імовірність того, що протягом найближчих одного, двох, трьох, чотирьох, п'яти і шести днів затрата води буде нормальною.

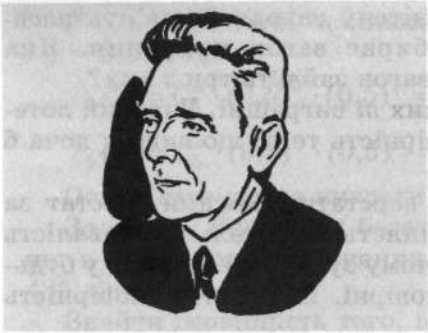
ІСТОРИЧНА ДОВІДКА

Теорія імовірностей, як і будь-яка інша наука, розвинулася з потреб практики. Вона виникла в середині XVII ст. у зв'язку з розв'язуванням задач, які висували страхова справа, демографія (наука про народонаселення), теорія азартних ігор та їн.

Уперше теорією ігор зайнявся італійський філософ і математик **Дж. Кардано** (1501—1576), який написав твір «Про азартні ігри». Проте початком виникнення теорії імовірностей вважають 1654 р., на який припадає листування між

Якоб БЕРНУЛЛІ
(1654—1705)

Андрій Миколайович КОЛМОГОРОВ
(1903—1987)



Олександр Якович
ХІНЧИН
(1894—1959)

Борис Володимирович
ГНЕДЕНКО
(1912—1995)

французькими математиками **Б. Паскалем** (1623—1662) і **П. Ферма** (1601—1665) з приводу задачі, пов'язаної з грою в кості. З розв'язуванням цієї задачі пізніше ознайомився відомий фізик **Х. Гюйгенс** (1629—1695), який написав твір «Про розрахунки в азартній грі».

У 1713 р., через вісім років після смерті відомого швейцарського математика **Якоба Бернуллі** (1654—1705), вийшла друком його праця «Мистецтво передбачень», у якій був викладений один з основних законів теорії імовірностей — закон великих чисел.

Дальший розвиток теорії імовірностей пов'язаний з діяльністю французького астронома і математика **П. Лапласа** (1749—1827), німецького математика **К. Гаусса** (1777—1855), французького математика **С. Пуассона** (1781—1840), російських математиків **П. Л. Чебишова** (1821—1894), **А. А. Маркова** (1856—1920), **О. М. Ляпунова** (1857—1919) та ін. Відкриття світового значення в галузі теорії імовірностей зробили російські та українські математики нашого часу **А. М. Колмогоров** (1903—1987), **О. Я. Хінчин** (1894—1959), **С. Н. Беренштейн** (1880—1968), **В. І. Романовський** (1879—1954), **В. І. Глівенко** (1897—1940), **Б. В. Гнеденко** (1912—1995), **Ю. В. Лінник** (1915—1972), **Є. Є. Слуцький** (1880—1948), **А. В. Скороход** (нар. 1930 р.), **М. Й. Ядренко** (нар. 1932 р.)

У наш час теорія імовірностей широко використовується у сучасному природознавстві, економіці, на транспорті, у виробництві, медицині, гуманітарних науках.

ВПРАВИ

211. З 30 карток, на яких написано літери українського алфавіту, беруть навмання 5 карток. Яка імовірність того, що з п'яти літер у порядку вибору карток можна скласти слово «хвиля»?

212. На полицю ставлять, не дивлячись, 10 книжок. Визначити імовірність того що при цьому три потрібні книжки стоятимуть поруч.

213. Під час перевірки готової деталі розрізняють брак за формою і за розмірами. Імовірність браку за формою становить 0,05, за розмірами — 0,01. Яка імовірність того, що взята навмання деталь буде бракованою і за формою, і за розмірами?

214. Відділ технічного контролю перевіряє половину виробів деякої партії і визнає придатною всю партію, якщо між перевіреними виробами немає жодного бракованого. Яка імовірність того, що партія з 20 виробів, у якій два браковані, буде визнана придатною?

215. Учасники жеребкування беруть з ящика жетони з номерами від 1 до 100. Знайти імовірність того, що номер першого жетона не містить цифри 6.

216. Нехай ви забули одну цифру потрібного вам номера телефону і набираєте її навмання. Яка імовірність того, що вам доведеться зробити не більше, ніж два виклики?

217. З 35 жетонів, занумерованих числами від 1 до 35, виймають один. Яка імовірність того, що номер вийнятого жетона буде кратним 4 або 9?

218. Статистики підрахували, що на 20 зупинок токарного верстата на одному із заводів припадає 10 зупинок через заміну різця, 3 — через поломку привода, 2 — через несвоєчасну подачу заготовок. Решта зупинок відбувається з інших причин. Знайти імовірність зупинки верстата з інших причин.

219. Імовірність того, що при одному вимірюванні деякої фізичної величини буде допущена помилка, яка перевищує задану точність, дорівнює 0,4. Виконано три незалежні вимірювання. Знайти імовірність того, що тільки в одному з них допущена помилка перевищить задану точність.

220. Для перевірки схожості льону було посіяно 200 насінин, з яких 170 проросло. Яка в середньому кількість насінин зійде з кожної тисячі посіяних?

221. Кількість x рибин в озері невідома. З озера виловили n рибин і позначили їх, а потім випустили в озеро. Через кілька днів за такої самої погоди знову закинули невід і в ньому виявилося m рибин, серед яких k позначених. Вказати наближено кількість рибин в озері.

222. В урні є п'ять кульок з номерами від 1 до 5. Навмання по одній виймають три кульки без повернення їх в урну. Знайти імовірність таких подій; а) послідовно з'являються кульки з номерами 1, 4, 5; б) вийняті кульки мають номери 1, 4, 5 незалежно від того, в якій послідовності вони з'являться.

223. Імовірність того, що подія A відбудеться хоча б один раз у двох незалежних дослідах, становить 0,75. Знайти ймовірність появи подій A в одному досліді (імовірність появи подій в обох дослідах однакова).

224. На відрізку OA довжини L числової осі Ox навмання поставлено дві точки $B(x)$ і $C(y)$. Знайти імовірність того, що довжина відрізка BC менше, ніж відстань від точки O до найближчої до неї точки. Припускається, що імовірність потрапляння точки на відрізок пропорційна довжині відрізка і не залежить від його розміщення на числовій осі.

225. На відрізку OA довжини L числової осі Ox навмання поставлено дві точки $B(x)$ і $C(y)$, причому $y \geq x$. Знайти імовірність того, що довжина відрізка BC виявиться менше, ніж $\frac{L}{2}$. Припускається, що імовірність потрапляння точки на відрізок пропорційна довжині відрізка і не залежить від його розміщення на числовій осі.