

3. Лінійні рівняння з однією змінною

Розглянемо рівняння:

$$2x = -4; \quad -1,7x = 5,1; \quad \frac{2}{3} \cdot x = 0; \quad 0x = 2,4.$$

Ліва частина кожного із цих рівнянь є добутком деякого числа й змінної, а права частина — деяким числом. Такі рівняння називають *лінійними* рівняннями з однією змінною.

Означення

Рівняння виду $ax = b$, у якому a і b — деякі відомі числа, а x — змінна, називають лінійним рівнянням з однією змінною.

Числа a і b називають *коефіцієнтами* лінійного рівняння.

Коли, розв'язуючи рівняння, виконують певні перетворення, зводячи дане рівняння до більш простого, то в багатьох випадках отим «простим» рівнянням є саме лінійне рівняння.

З'ясуємо, скільки коренів може мати лінійне рівняння. Для цього розглянемо спочатку такі три рівняння:

$$1) 3x = 2; \quad 2) 0x = 2; \quad 3) 0x = 0.$$

1) Щоб розв'язати рівняння $3x = 2$, досить обидві його частини поділити на 3. Одержимо один корінь: $x = \frac{2}{3}$.

2) У рівнянні $0x = 2$ значення лівої частини дорівнює 0 для будь-якого числа x . Права ж частина рівняння відмінна від нуля. Отже, дане рівняння коренів не має.

3) Рівність $0x = 0$ є правильною для будь-якого числа x . Тому коренем рівняння $0x = 0$ є будь-яке число (рівняння має безліч коренів).

У загальному випадку для лінійного рівняння $ax = b$ матимемо:

якщо $a \neq 0$, то рівняння має єдиний корінь $x = \frac{b}{a}$;

якщо $a = 0$, а $b \neq 0$, то рівняння коренів не має;

якщо $a = 0$ і $b = 0$, то коренем рівняння є будь-яке число (рівняння має безліч коренів).

Підсумок: кількість коренів лінійного рівняння

	Коефіцієнти	Корені
$ax = b$ — лінійне рівняння	$a \neq 0$	$\frac{b}{a}$ — єдиний корінь
	$a = 0$ і $b \neq 0$	коренів немає
	$a = 0$ і $b = 0$	коренем є будь-яке число (рівняння має безліч коренів)

Для тих, хто хоче знати більше



Рівняння з модулями

Нагадаємо, що модулем додатного числа й числа 0 є це саме число, модулем від'ємного числа є протилежне йому число:

$$|a| = a, \text{ якщо } a \geq 0; \quad |a| = -a, \text{ якщо } a < 0.$$

Так, $|1,4| = 1,4$; $|0| = 0$; $|-2| = 2$. Модуль будь-якого числа x є невід'ємним числом, тобто $|x| \geq 0$.

Рівняння $|x| = 3$, $|x - 5| = 1$, $|2x - 3| = 0$, $|x| + 3x = 1$ містять змінну під знаком модуля. Такі рівняння називають *рівняннями з модулем*.

Рівняння виду $|x| = a$. Розв'язуючи рівняння виду $|x| = a$, де a — деяке відоме число, можна використовувати геометричний зміст модуля числа: модуль числа x — це відстань від початку відріку до точки, що зображує число x на координатній прямій.

Розглянемо рівняння $|x| = 2$. На координатній прямій існують дві точки, розміщені на відстані 2 одиниці від початку відріку. Це точки, що відповідають числам 2 і -2 (рис. 1). Тому рівняння $|x| = 2$ має два корені: 2 і -2 .



Рис. 1

Рівняння $|x| = 0$ має один корінь — число 0, а рівняння $|x| = -2$ не має коренів (модуль будь-якого числа x є невід'ємним числом і не може дорівнювати -2).

У загальному випадку рівняння $|x| = a$:

має два корені a і $-a$, якщо $a > 0$;

має один корінь 0, якщо $a = 0$;

не має коренів, якщо $a < 0$.

Розв'язування рівнянь з модулями, виходячи з означення модуля числа.

Розв'яжемо рівняння

$$|x| + 3x = 4. \quad (1)$$

Це рівняння не можна звести до вигляду $|x| = a$, де a — деяке число. Для його розв'язання розглянемо два випадки.

1. Якщо x — невід'ємне число ($x \geq 0$), то $|x| = x$ і рівняння (1) набуває вигляду $x + 3x = 4$, звідки $x = 1$. Число 1 — невід'ємне (задовольняє нерівність $x \geq 0$), тому воно є коренем рівняння (1).

2. Якщо x — від'ємне число ($x < 0$), то $|x| = -x$ і рівняння (1) набуває вигляду $-x + 3x = 4$, звідки $x = 2$. Число 2 не є від'ємним (не задовольняє нерівність $x < 0$), тому воно не є коренем рівняння (1).

Отже, рівняння $|x| + 3x = 4$ має один корінь $x = 1$.

Приклади розв'язання вправ



Приклад 1. Розв'язати рівняння $5(2x - 1) = 4x - 23$.

$$\bullet 10x - 5 = 4x - 23; \quad 10x - 4x = -23 + 5; \quad 6x = -18; \quad x = -3.$$

Відповідь. -3 . •

Приклад 2. Розв'язати рівняння $3x - 4 = 3(x - 2)$.

• $3x - 4 = 3x - 6$; $3x - 3x = -6 + 4$; $0x = -2$ (або $0 = -2$).

Відповідь. Рівняння коренів не має.●

Приклад 3. Розв'язати рівняння $3x - 2(x - 1) = x + 2$.

• $3x - 2x + 2 = x + 2$; $3x - 2x - x = 2 - 2$; $0x = 0$ (або $0 = 0$).

Відповідь. Коренем рівняння є будь-яке число.●

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\frac{2x-1}{18} = \frac{x}{12} + \frac{1}{9}$.

• Помноживши обидві частини рівняння на 36 (36 — найменше спільне кратне знаменників дробів), матимемо:

$$36 \cdot \frac{2x-1}{18} = 36 \cdot \left(\frac{x}{12} + \frac{1}{9} \right); \quad 2(2x-1) = 3x+4; \quad 4x-2 = 3x+4;$$

$$4x - 3x = 4 + 2; \quad x = 6.$$

Відповідь. 6●

Підсумок. Розв'язуючи рівняння, варто дотримувати таких кроків:

1. Якщо у рівнянні є вирази з дробовими коефіцієнтами, то помножити обидві його частини на найменший спільний знаменник дробів.

2. Розкрити дужки.

3. Перенести всі доданки, які містять змінну, в одну частину рівняння (як правило, в ліву), а доданки, які не містять змінної, — в іншу частину (в праву).

4. Звести подібні доданки.

5. Поділити обидві частини рівняння на коефіцієнт біля змінної, якщо він відмінний від нуля. Якщо ж він дорівнює 0, то рівняння або не має коренів, або його коренем є будь-яке число.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $|5x - 3(x + 2) + 3| = 3$.

• $|5x - 3x - 6 + 3| = 3$; $|2x - 3| = 3$.

Якщо модуль числа дорівнює 3, то цим числом є 3 або -3. Тому можливі два випадки:

1) $2x - 3 = 3$; $2x = 6$; $x = 3$; 2) $2x - 3 = -3$; $2x = 0$; $x = 0$.

Відповідь. 3; 0●

Приклад 6. Розв'язати рівняння $2|z| - 3 = 5$.

• $2|z| - 3 = 5$; $2|z| = 8$; $|z| = 4$; $z = 4$ або $z = -4$.

Відповідь. -4; 4●

Усно

40. Які з даних рівнянь є лінійними рівняннями?

а) $\frac{2}{9} \cdot x = 8$;

б) $4 : x = 2$;

в) $-2,7y = 0$;

г) $\frac{4}{z} = \frac{2}{5}$.

41. Скільки коренів має рівняння:

а) $56x = 64$;

б) $0x = -2$;

в) $8x = 0$;

г) $0y = 0$?

42. Розв'яжіть лінійне рівняння:

а) $6x = 42$;

б) $4x = -12$;

в) $-3y = 6$;

г) $-5z = -45$;

д) $3x = -2$;

е) $0y = -4$;

є) $0x = 0$;

ж) $-2x = 0$.

Рівень А



Розв'яжіть рівняння:

43. а) $36x = -54$;

б) $0,04z = 1,4$;

в) $2y = -\frac{2}{3}$;

г) $-1,2x = -0,09$;

д) $-3,86t = 7,913$;

е) $\frac{4}{15}x = -\frac{2}{5}$;

є) $2\frac{1}{4}s = 1\frac{7}{8}$;

ж) $-2,5x = -\frac{1}{6}$;

з) $3\frac{5}{9}y = 0,6$.

44. а) $5x - 3 = 17$;

б) $7x + 32 = 12x + 25$;

в) $4 - 3y = 6y + 22$;

г) $4,5z + 1 = 7z + 2,5$;

д) $-1,2m - 2 = m - 0,9$;

е) $-1,74x + 7,92 = -1,08x$;

є) $4y + 1 = -1 + 4y$;

ж) $0,77x = 1,65 + 1,1x$;

з) $-16,8x - 3 = 6x + 2,7$.

45. а) $56x = -196$;

б) $8x = -8 + 12x$;

в) $1,15 - 3z = 2,5$;

г) $2y - 18 = -3y + 67$;

д) $6x + 2 = 20x - 5$;

е) $4,5x + 1 = 2 + 4,5x$;

є) $8 - 1,2z = -6z + 152$;

ж) $4,02t - 1 = 1,52t$;

з) $1,7x + 2,04 = -6,8x$.

46. а) $6(x - 2) = 2x$;

б) $3(2x + 1) = 7x$;

в) $1 - (3x + 1) = 2x$;

г) $-2(2x - 4) = -3$;

д) $2(x + 5) = 2(x - 4)$;

е) $-3(10 - 2x) = 6x - 30$.

47. а) $8x - 7 = 3(x - 4)$;

б) $-(3x + 1) = 3(3 - x)$;

в) $6x - 2 = -2(1 - 3x)$.

Рівень Б



Розв'яжіть рівняння:

48. а) $2(x - 11) - 5(5 - 2x) = -23$;

б) $8(-3x + 4) + 14(3 + 2x) = 4 + 2x$;

в) $-5(4x + 3) + 3x = -12(x - 3)$;

г) $0,5x = 0,1(2x - 5) + 1,7$.

49. а) $3,5(x - 3) - 0,7(7 - x) = -7$;

б) $0,4(2x - 7) + 1,2(3x + 0,7) = 1,6x$;

в) $5(4(x + 1) - 9x) = 25(x + 1)$;

г) $0,8(2,2(x - 1) - 1) - 1,4x = -0,4$.

50. а) $5(3x - 6) + 4(3 - 2x) = 5x - 8$;

б) $9(x - 3) - 4(7 - 3x) - 5 = -3x$;

в) $-0,3(8 - 4x) = 0,6(x - 3) + 0,9$;

г) $2(-0,9x + 1,4) + 1,4(1,5 + x) = x$;

д) $40(5x - 8(x - 1)) = 160(x + 9)$;

е) $12 + 3(2(x - 1) - 4) = 6(x + 1)$.

51. Знайдіть значення x , для яких значення виразів $2x - 3$ і $-3 + 7x$ дорівнюють одне одному.

52. Знайдіть значення x , для яких значення виразу $25x - 30$ на 5 менше від значення виразу $15x + 15$.
53. Знайдіть значення x , для яких значення виразу $4x + 6$ у 6 разів більше від значення виразу $6x - 15$.

Розв'яжіть рівняння:

54. а) $\frac{5}{12} + \frac{x}{6} = \frac{x}{4} + \frac{1}{3}$; б) $\frac{x-1}{5} + \frac{x-2}{3} = 2 - \frac{x-2}{15}$;
 в) $-\frac{2x+1}{6} + \frac{2-11x}{9} = \frac{2}{3} - \frac{x-3}{2}$; г) $\frac{2x-1}{8} + \frac{3x-2}{4} - \frac{2x-3}{2} = \frac{7}{8}$.
55. а) $2\frac{5}{6} - \frac{3}{8}x = \frac{1}{4}x + 3\frac{1}{3}$; б) $2(3\frac{3}{4} - 2x) + 2,5 = 1\frac{2}{9} - (-x + \frac{2}{3})$;
 в) $5y - 4\frac{2}{7}(2\frac{1}{3}y + 1\frac{1}{6}) = 3\frac{1}{3}$; г) $2\frac{3}{8}(\frac{1}{3} - 3x) + \frac{5}{8}(\frac{1}{3} - 3x) = 1$.
56. а) $\frac{x+1}{6} + \frac{2-x}{8} = \frac{1}{4} + \frac{x-3}{12}$; б) $\frac{x}{2} - \frac{x+3}{3} - \frac{x-3}{4} = \frac{x}{6}$;
 в) $\frac{2}{5}(\frac{5}{6} - \frac{3}{4}x) = \frac{1}{5}x + 4\frac{1}{3}$; г) $2\frac{2}{5}(\frac{5}{6} - 2x) - (5\frac{1}{6} - \frac{4}{5}x) = 1\frac{5}{6}$.
57. а) $|x| = 5$; б) $|x| = -6$; в) $|x| = 0$;
 г) $|2x - 7| = 11$; д) $|15 - 4x| = 5$; е) $|7x - 2| = 0$.
58. а) $|x| + 3 = 7$; б) $3|x| = 6$; в) $|x| + 8 = 3$.
59. а) $|3x| = 12$; б) $|x - 3| = 8$; в) $|x + 2| = -2$;
 г) $|x - 7| = 0$; д) $2|x| - 1 = 5$; е) $5 - |x| = -11$.

Рівень В



Розв'яжіть рівняння:

60. а) $200(2(2(x-1) - 1) - 1) = -600$; б) $\frac{4}{5}(\frac{3}{4}(\frac{2}{3}(\frac{1}{2} - x) - x) - x) - x = 1$.
61. а) $|2(x-3) - (x+4)| = 2$; б) $|5x - 4(2x+3)| = 6$;
 в) $2(|x-3| - 4(2|x|+9)) = -48$; г) $|2x-1| - 4(1 - |2x-1|) = 6$.
62. а) $3x + |x| = 20$; б) $5|x| + x = 12$; в) $|x| + x = 8$;
 г) $x - |x| = 12$; д) $x + |x| = 0$; е) $x - |x| = 0$.
63. а) $|x| + x^2 = 0$; б) $x^2 + |x| = -7$; в) $|x| + |2x| + 4 = 0$.
64. У рівнянні $ax = 4389$ коефіцієнт a є трицифровим числом виду $**1$. Розв'яжіть це рівняння, якщо відомо, що його коренем є натуральне число.