

6. Тотожно рівні вирази. Тотожності

1. Тотожно рівні вирази. Знайдемо значення виразів $5a - 5b$ і $5(a - b)$, якщо $a = 4$, $b = 2$:

$$5a - 5b = 5 \cdot 4 - 5 \cdot 2 = 20 - 10 = 10; \quad 5(a - b) = 5 \cdot (4 - 2) = 5 \cdot 2 = 10.$$

Значення цих виразів для даних значень змінних дорівнюють одне одному (кажуть: якщо $a = 4$, $b = 2$, то відповідні значення виразів дорівнюють

його тотожно рівним виразом, який має коротший запис або, як кажемо, «більш компактним»). Розглянемо приклади.

Приклад 1. Спростити вираз $7a + 23 + 2(-4a + 1)$.

$$\bullet 7a + 23 + 2(-4a + 1) = \underline{7a} + 23 - \underline{8a} + 2 = -a + 25. \bullet$$

Приклад 2. Спростити вираз $a + (2a - 3b) - (2 - 4b)$.

$$\bullet a + (2a - 3b) - (2 - 4b) = \underline{a} + \underline{2a} - \underline{3b} - 2 + \underline{4b} = 3a + b - 2. \bullet$$

Тотожні перетворення використовують і для доведення тотожностей.

Щоб довести тотожність, можна використати один з таких способів:

- 1) ліву частину тотожності шляхом тотожних перетворень звести до правої частини;
- 2) праву частину звести до лівої частини;
- 3) обидві частини звести до одного й того ж виразу;
- 4) утворити різницю лівої та правої частин і довести, що вона дорівнює нулю.

Розглянемо приклади.

Приклад 3. Довести тотожність $a - 3 - (4a + 7) = -3a - 10$.

• Перетворюватимемо ліву частину рівності:

$$a - 3 - (4a + 7) = \underline{a} - 3 - \underline{4a} - 7 = -3a - 10.$$

Шляхом тотожних перетворень ліву частину рівності звели до правої частини. Тому ця рівність є тотожністю. •

Приклад 4. Довести тотожність $15 = (27 - 5a) - (12 - 3a - 2a)$.

• Перетворюватимемо праву частину рівності:

$$(27 - 5a) - (12 - 3a - 2a) = 27 - \underline{5a} - 12 + \underline{3a} + \underline{2a} = 15.$$

Шляхом тотожних перетворень праву частину рівності звели до лівої частини. Тому ця рівність є тотожністю. •

Приклад 5. Довести тотожність $2c + 3 - 2(3 - 2c) = 3(2c - 3) + 6$.

• Перетворюватимемо ліву і праву частини рівності:

$$2c + 3 - 2(3 - 2c) = 3(2c - 3) + 6$$

3. Тотожні перетворення виразів. У виразі $4a + 3a - 1$ зведемо подібні доданки $4a$ і $3a$:

$$4a + 3a - 1 = (4 + 3)a - 1 = 7a - 1.$$

Вираз $4a + 3a - 1$ замінили тотожно рівним йому виразом $7a - 1$.

Заміну одного виразу тотожно рівним йому виразом називають **тотожним перетворенням виразу**.

У математиці часто доводиться спрощувати вираз, тобто замінювати його тотожно рівним виразом, який має коротший запис або, як кажуть, є «більш компактним». Розглянемо приклади.

Приклад 1. Спростити вираз $7a + 23 + 2(-4a + 1)$.

$$\bullet 7a + 23 + 2(-4a + 1) = \underline{7a} + 23 - \underline{8a} + 2 = -a + 25. \bullet$$

Приклад 2. Спростити вираз $a + (2a - 3b) - (2 - 4b)$.

$$\bullet a + (2a - 3b) - (2 - 4b) = \underline{a} + \underline{2a} - \underline{3b} - 2 + \underline{4b} = 3a + b - 2. \bullet$$

Тотожні перетворення використовують і для доведення тотожностей.

Щоб довести тотожність, можна використати один з таких способів:

1/3. Поясніть, на основі яких правил та яких властивостей дій здійснено такі

$$a = -2b + 3b - a + 5a = (-2 + 3) \cdot b + (-1 + 5) \cdot a = b + 4a.$$

в) $5x + (2 - x)$.



$$\begin{aligned} & -4 + 3z - 8z; \\ & 6,5b - 7a + 5a; \\ & m - 3n + 1,6n + 2n. \\ & -3b + 4b - 2b; \\ & 1,5a - 2,5b + 3,5a; \\ & 3b - a + 0,6a + 1,2a. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2(5b - 3a) - (1,5b - 2a); \\ & 2(2x - 4y) - 3(2x + 5y + 2). \\ & -3(3a + 1) - 5(a - 3b). \end{aligned}$$

$$= 6c - 3;$$

$$- 3.$$

176. Спростіть вираз:

$$-2b - (a - 3b) + 5a = -2b - a + 3b + 5a$$

$$-2b - a + 3b + 5a$$

а) $-7 + 4a - 3a;$

б) $4a \cdot 5b;$



Зведіть подібні доданки:

177. а) $7a - 3a + 6;$

в) $4b - 7 + 9;$

д) $-7,2x + 8y - 5x - 5y;$

178. а) $5a - 6 + 3a;$

в) $2c - 1 + 6c - 6;$

д) $-2x + 3y - 6x - 5y;$

Розкрийте дужки і зведіть подібні доданки:

179. а) $5(8a + 9) + (4a - 5);$

в) $-4(1,2x + 1,5y) + 4(1,2x + 1);$

180. а) $3(4x - 2z) - (5z + 10x);$

Спростіть вираз і знайдіть його значення:

181. а) $0,7(a - 10) + a - 5$, якщо $a = 3$;

б) $-2,5b - (11 - 1,5b) + b$, якщо $b = 0,2$;

в) $2x - 3(1 - 2c) = \underline{2x} + 3 - \underline{2c} + 4c$

$$3(2c - 3) + 6 = 6c - 9 + 6 = 6c - 3.$$

Приклад 6. Довести тотожність $3x - 2(2x - 3y) = 2x + 3(2y - x)$.

- Утворимо різницю лівої та правої частин і спростимо її:

$$\begin{aligned} 3x - 2(2x - 3y) - (2x + 3(2y - x)) &= 3x - 2(2x - 3y) - 2x - 3(2y - x) = \\ &= \underline{3x} - \underline{4x} + \underline{6y} - \underline{2x} - \underline{6y} + \underline{3x} = 0. \end{aligned}$$

Різниця лівої і правої частин рівності дорівнює нулю, тому дана рівність є тотожністю. •

Усно									
------	--	--	--	--	--	--	--	--	--

172. Чи є тотожно рівними вирази:

- а) $5 + 6x$ і $6x + 5$; б) $a \cdot 5b$ і $5ab$; в) $a - b$ і $b - a$?

Відповіді обґрунтуйте.

173. Чи є тотожністю рівність:

- а) $ab + 2 = 2 + ab$; б) $a - 1 = -1 + a$; в) $2(a - 3) = 2a - 3$?

Відповіді обґрунтуйте.

174. Назвіть кілька виразів, які тотожно рівні виразу $x + 4x$.

у кількість деталей, які виготовлять за

8 год обидва робітники.



одження:

му числа дорівнює нулю;

лежного числу b , дорівнює різниці чи-

ату модуля цього числа.

ля дорівнює нулю;

добутку протилежних їм чисел;

ату протилежного йому числа.

б) $0,2(x - 1) - 0,4(5 - 2x) - 2,3$;

г) $1\frac{1}{3}(2a - 7b) - \frac{2}{3}(3b + a) + 2a$;

е) $5(m + 3(n - 1) - 1) - 5m$.

б) $0,9(a - 3b) - 0,2(5b - 3a) - 1,7b$;

г) $\frac{2}{x} + \frac{2}{2(x - y)} - 4x + \frac{2}{x}$

Рівен									
-------	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Запишіть у вигляді тотожності тв

190. а) Сума числа і протилежного й

б) сума числа a й числа, прот

сел a та b ;

в) квадрат числа дорівнює квад

191. а) Добуток довільного числа і н

б) добуток двох чисел дорівнює

в) квадрат числа дорівнює квад

Спростіть вираз:

192. а) $2(3c + 5) + 4(3 + 5c) + 4 + 2c$;

в) $-(4x + y + 3z) + 3y - 2(x - 3z)$;

д) $4(2(x + 2) - 4x) + 2(x + 1)$;

193. а) $-(3a - 6) + 3(2 - 2a) + 15a$;

в) $4(5n - 2(n - 1)) + 10$;

182. а) $6 + 3(2a - 4) - 8a$, якщо $a = -1$;
 б) $3(a + 6) - (a - 3b) - 4b$, якщо $a = 3$, $b = -3$.

Доведіть тотожність:

183. а) $(a + b) - (a - b) = 2b$; б) $2b \cdot (-4) + 8b - 4 = -4$;
 в) $2x - 1 - 5(1 - 2x) = 12x - 6$; г) $2(3a - 4) + 14 - 6a = 6$;
 д) $a - (4a - 3b) = 3(b - a)$; е) $2c = 12c - 5(2c + 3) + 15$.
 184. а) $2b + 2(1 - b) = 2$; б) $2a - (1 + 2a) + 1 = 0$;
 в) $3a - 6(3 - 2a) = 3(5a - 6)$; г) $2x - 6 = -x - (7 - 3x) + 1$.

185. Ширина прямокутника дорівнює a см, а довжина на 3 см більша від ширини. Запишіть у вигляді виразу периметр прямокутника.
 186. Сторони трикутника дорівнюють b см, b см і 5 см. Запишіть у вигляді виразу периметр трикутника.
 187. На одній полиці стоїть n книжок, а на іншій — у 1,5 разу більше. Скільки книжок на обох полицях?
 188. На одній полиці стоїть k книжок, а на іншій — на 12 книжок менше. Скільки книжок на обох полицях?
 189. Один робітник виготовляє за годину c деталей, а інший — на 2 деталі менше. Зап

200. Нехай m і n — деякі натуральні числа. Доведіть, що:

- а) різниця чисел $11m + 3n$ і $7m + 7n$ ділиться на 4;
 б) сума чисел $10m + 3n + 2$ і $2m - 7n + 6$ ділиться на 4.

201. Доведіть, що сума трьох послідовних цілих чисел ділиться на 3.
 202. Доведіть, що сума чотирьох послідовних цілих чисел не ділиться на 4.
 203. Доведіть, що коли два цілі числа при діленні на 4 дають в остачі 2, то сума і різниця цих чисел діляться на 4.
 204. Двоцифрове число, яке має a десятків і b одиниць, позначають через \overline{ab} .

Отже, $\overline{ab} = 10a + b$. Доведіть, що сума $\overline{ab} + \overline{ba}$ ділиться на 11.

205. Доведіть, що різниця числа \overline{abc} і суми його цифр ділиться на 9.
 206. Доведіть, що коли два цілі числа при діленні на 3 дають рівні остачі, то різниця цих чисел ділиться на 3.

Вправи для повторення

207. Обчисліть:

а) $15^2 - 6^3$:

б) $(1x^2)^2$

Доведіть тотожність:

194. а) $2(a + b + c) - (a + b - c) - (a - b + c) = 2(b + c)$;

б) $28 + 2(2(b - 2) - 2) - 2 = 8b$.

195. а) $2(a - b - 1) - (a + b - 1) - (a - b + 1) = -2(b + 1)$;

б) $1 - x - (1 - (1 - (1 - x))) = 0$.

Розв'яжіть рівняння:

196. а) $2(3x - 1) - 3(2 - x) = 1$;

б) $0,2(y - 2(y - 1) + 5) - 2y + 3 = 0$.

197. а) $-3(1 - y) + 3(1 - 2y) = 9$;

б) $2((x - 2) - 2(x - 1)) + 4x = 1$.

198. Перший лижник пробіг a м, другий — на b м менше, ніж перший, а третій — 1200 м. На скільки метрів менше пробіг другий лижник, ніж перший і третій разом? Запишіть результат у вигляді виразу.199. На першій полиці є x книжок, а на другій — удвічі більше, ніж на першій. З першої полиці забрали 10 книжок, а на другу поставили 3 книжки. Якою стала загальна кількість книжок на полицях? Запишіть результат у вигляді виразу.

Рівняє. а) 10, б) 9, в) 4, г) 31, д) 0.

числовий вираз, значення якого д

ати

ності, ми користуємося математични-
та багатьма іншими. Така єдина систе-
є зараз, складалася в алгебрі посту-матик Діофант замість слова «рівний»
у і — першу букву слова *isos*, тобто
ували й інші математики, проте запро-
овживаними.булось у XIV–XVIII ст. Значну роль у
тематик Франсуа Вієт, який уперше
и рівняння.

ком

в) $(2 - \frac{x}{7}) - (\frac{x}{7})$.

-2) = 0; в) $(7 - 3x)(0,5x - 1) = 0$.

в) $|3x + 9| = 0$.

го ж, перше число на 20 менше, а
дідь ці числа.о 7 год 20 хв і пішки вирушив у
рах від станції. Йдучи зі сталою

Цікаво з

Записуючи вирази, рівняння, нер-
ми символами «+», «-», «=», «<», « a^2 »
ма умовних знаків, якою ми користує-
пово.Ще у III ст. давньогрецький мате-
використовував окремий знак — букву
рівний. Подібні скорочення використо-
поновані ними символи не були загаль-Створення сучасної символіки ві-
цьому процесі відіграв французький м-
за допомогою символів почав записува-Юрист за освітою, Вієт був радни-
французьких королів Генріха 2² - 1, 8

Розв'яжіть рівняння:

208. а) $(x - 7)(x + 9) = 0$; б) $(2x + 7)(3x$

209. а) $|x| = 5$; б) $|x + 5| = 2$;

210. Сума трьох чисел дорівнює 10, до т-
третє — на 15 більше, ніж друге. Зна-211*. Чоловік приїхав поїздом на станці-
село, розташоване у кількох кіломе-

швидкістю, чоловік розрахував, що прийде в село о 8 год 44 хв. Однак о 7 год 44 хв він сів у попутний автомобіль і прибув у село на 55 хв раніше. Знайдіть швидкість автомобіля, якщо вона на 55 км/год більша від швидкості чоловіка.

212. З урни, в якій є n білих і m чорних куляток, вийняли k куляток. Головною з яких є «вступ до алгебраїчних систем до мистецтва аналізу» (1591).