

§3. ОДНОЧЛЕНИ

7. Степінь з натуральним показником

Нагадаємо, що добуток двох або трьох однакових множників, кожен з яких дорівнює a , — це відповідно квадрат або куб числа a . Наприклад:

$$5 \cdot 5 = 5^2; \quad 5^2 \text{ — квадрат числа } 5;$$

$$5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3; \quad 5^3 \text{ — куб числа } 5.$$

Квадрат числа 5 називають ще другим степенем цього числа, а куб — третім степенем.

Відповідно добуток $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ позначають 5^4 і називають четвертим степенем числа 5. У виразі 5^4 число 5 називають *основою степеня*, число 4 — *показником степеня*, а весь вираз 5^4 називають *степенем*.

Означення

Степенем числа a з натуральним показником n , більшим від 1, називають добуток n множників, кожен з яких дорівнює a . Степенем числа a з показником 1 називають саме число a .

Степінь з основою a й показником n записують так: a^n , читають: « a в степені n », або « n -ий степінь числа a ».

Отже, за означенням

$$a^n = \underbrace{aa \dots a}_n, \text{ якщо } n > 1,$$

$$a^1 = a.$$

З'ясуємо знак степеня з натуральним показником.

1) $a = 0$, тоді $0^1 = 0$, $0^2 = 0 \cdot 0 = 0$, ... — будь-який натуральний степінь числа 0 дорівнює 0.

2) $a > 0$, тоді $a^1 = a > 0$, $a^2 = aa > 0$, ... — будь-який натуральний степінь додатного числа є число додатне.

3) $a < 0$, тоді $a^1 = a < 0$, $a^2 = aa > 0$, $a^3 = aaa < 0$, $a^4 = aaaa > 0$, Степінь від'ємного числа з парним показником є число додатне, оскільки добуток парного числа від'ємних чисел додатний. Степінь від'ємного числа з непарним показником є число від'ємне, оскільки добуток непарного числа від'ємних чисел від'ємний.

Підносити числа до степеня з натуральним показником можна за допомогою мікрокалькулятора. Обчислити, наприклад, значення $3,5^6$ можна за схемою:

3,5	×	3,5	×	3,5	×	3,5	×	3,5	×	3,5	=
-----	---	-----	---	-----	---	-----	---	-----	---	-----	---

або за більш зручною схемою:

3,5	×	=	=	=	=	=
-----	---	---	---	---	---	---

Отримаємо значення степеня: $1838,265625$.

Піднесення до степеня — дія третього ступеня. Нагадаємо, що коли вираз без дужок містить дії різних ступенів, то спочатку виконують дії вищого ступеня, відтак — нижчого. Так, щоб знайти значення виразу $2 \cdot 3^2 - 64$, дії потрібно виконувати в такій послідовності: 1) піднесення до степеня; 2) множення; 3) віднімання.

Приклади розв'язання вправ



Приклад 1. Обчислити $4 \cdot (-5)^3 + 8 \cdot 0,5$.

• Виконуючи обчислення, можна:

а) записувати кожну дію окремо:

$$1) (-5)^3 = -125;$$

$$2) 4 \cdot (-125) = -500;$$

$$3) 8 \cdot 0,5 = 4;$$

$$4) -500 + 4 = -496;$$

б) записувати обчислення в рядок:

$$4 \cdot (-5)^3 + 8 \cdot 0,5 = 4 \cdot (-125) + 4 = -500 + 4 = -496.$$

Відповідь. -496 . •

Усно

233. Прочитайте вирази, назвіть основи й показники степенів:

$$a^{12}; (-3)^4; (-0,05)^{20}; m^9; 3^m; \left(\frac{1}{3}\right)^3; \left(-\frac{2}{5}\right)^7.$$

234. Обчисліть: 1^7 ; 2^4 ; $(-2)^4$; 3^3 ; $(-3)^3$; $(-5)^2$; 4^3 ; $\left(\frac{1}{2}\right)^3$; $0,1^2$.

235. Значення яких степенів є додатними; від'ємними:

$$(-7)^4; (-11)^3; 15^6; (-21)^2; 3^3; 17^{31}; (-1,5)^{20}; (-0,05)^{11}?$$

Рівень А



Запишіть добуток у вигляді степеня:

236. а) $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$;

б) $\underbrace{3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3}_{10 \text{ разів}}$;

в) $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$;

г) $\underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_n$ разів;

д) $(-b) \cdot (-b) \cdot (-b) \cdot (-b)$;

е) $(x-y) \cdot (x-y) \cdot (x-y)$.

237. а) $(-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5)$;

б) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$;

в) $\underbrace{(-1,5) \cdot (-1,5) \cdot \dots \cdot (-1,5)}_{12 \text{ разів}}$;

г) $(ab) \cdot (ab) \cdot (ab) \cdot (ab) \cdot (ab)$.

238. Запишіть степені у вигляді добутку:

а) 6^4 ; $(-7)^6$; $1,2^5$;

б) a^5 ; $(2x)^3$; $(bc)^4$.

Знайдіть значення степеня:

239. а) 12^2 ;

б) 4^4 ;

в) $(-0,7)^3$;

г) $(-1,5)^4$;

д) $(-\frac{1}{4})^3$;

е) $(\frac{2}{3})^2$;

є) $(2\frac{1}{3})^4$;

ж) $(-0,02)^3$.

240. а) 2^5 ;

б) $(-3)^4$;

в) $(-1)^5$;

г) $0,4^3$;

д) $1,1^3$;

е) $0,04^3$;

є) $(-\frac{1}{3})^3$;

ж) $(1\frac{2}{3})^4$.

Обчисліть:

241. а) $6 \cdot (-2)^4$;

б) $6 \cdot (-2^4)$;

в) $5 \cdot (-3)^3$;

г) $5 \cdot (-3^3)$;

д) $5^3 - 5^2$;

е) $(-6 \cdot 0,5)^5$;

є) $0,1^3 - 0,1^2$;

ж) $(15 - 16)^{10}$.

242. а) $(3 - 7)^4$;

б) $2 \cdot (-7^3)$;

в) $2^6 + (-3)^3$;

г) $(-4 + 3)^9$.

243. Знайдіть значення виразів:

а) a^2 ; $(-a)^2$; $-a^2$, якщо $a = 3$;

б) a^3 ; $(-a)^3$; $-a^3$, якщо $a = 10$.

244. Знайдіть значення виразу:

а) $2a^3 + 1$, якщо $a = -2$; $a = 0$; $a = 2$; б) $(x + 1)^4$, якщо $x = -2$; $x = 2$.

Рівень Б



Заповніть таблицю:

245.

n	1	2	3	4	5
n^4					
4^n					

246.

n	1	2	3	4	5
n^3					
3^n					

Порівняйте значення виразів:

247. а) $(5 \cdot 2)^2$ і $5^2 \cdot 2^2$;

б) $(2 + 3)^3$ і $2^3 + 3^3$;

в) $7^4 - 6^4$ і 5^4 ;

г) $5^3 + 21^3$ і 26^3 .

248. а) $(7 - 5)^2$ і $7^2 - 5^2$;

б) $(10 : 2)^3$ і $10^3 : 2^3$;

в) $14^2 + 19^2$ і 33^2 ;

г) $12^4 - 3^5$ і $12^3 + 3^6$.

Знайдіть значення виразу:

249. $b^4 + b^3 + b^2 + b + 1$, якщо $b = -2$; $b = -1$; $b = 0$; $b = 1$; $b = 2$.

250. $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x$, якщо $x = -1$; $x = 0$; $x = 2$.

Подайте у вигляді квадрата або куба числа:

251. 27; 144; -125; 216; 0,125; 0,001; $\frac{25}{81}$; $6\frac{1}{4}$; $-3\frac{3}{8}$.

252. 64; 1000; -8; 6,25; 0,008; $-\frac{27}{125}$; $1\frac{11}{25}$.

253. Доведіть, що вираз набуває лише додатних значень:

а) $a^2 + 1$;

б) $a^{10} + 5$;

в) $(a-2)^2 + 2$;

г) $(a+4)^4 + 0,5$.

Рівень В



254. Знайдіть значення виразу, якщо $a = 0$; $a = 1$; $a = -1$:

а) $a + a^2 + a^3 + \dots + a^{99} + a^{100}$ (ця сума має 100 доданків, кожен з яких є степенем числа a ; показники степенів — усі натуральні числа від 1 до 100 включно);

б) $a + a^2 + a^3 + \dots + a^{98} + a^{99}$;

в) $aa^2a^3 \dots a^{99}a^{100}$;

г) $aa^2a^3 \dots a^{98}a^{99}$.

255. Знайдіть найменше значення виразу:

а) $a^2 + 1$;

б) $a^4 - 2$;

в) $(a-1)^2 + 12$;

г) $(2a+2)^4 - 5$.

Для якого значення a значення виразу є найменшим?

256. а) Доведіть, що вирази $x^2 + (x+1)^2$ і $x^4 + |x+1|$ набувають лише додатних значень.

б) Розв'яжіть рівняння: $x^2 + (x+1)^2 = 0$; $x^4 + |x+1| = -1$.

257. Знайдіть останню цифру числа 987^{987} .

Вправи для повторення

258. Розв'яжіть рівняння:

а) $5x - 3 = 3x + 17$;

б) $7x + 32 = 12x + 25$;

в) $2(x-11) - 5(5-2x) = -23$;

г) $8(-3x+4) + 14(3+2x) = 4+2x$.

259. Футбольна команда у 15 матчах набрала 23 очка, програвши 6 матчів. У скількох матчах команда здобула перемогу і скільки матчів зіграла внічию? (За перемогу команді нараховується 3 очка, за нічию — 1 очко, за поразку — 0 очок.)

260. Середнє арифметичне трьох чисел дорівнює -8 . Перше число на 5 більше від другого, а друге — на 1 менше від третього. Знайдіть ці числа.

8. Властивості степеня з натуральним показником

1. Множення степенів з однаковими основами.

Розглянемо добутки двох степенів з основою a . Врахувавши, що $a^1 = a$, матимемо:

$$a^1 a^1 = aa = a^2 = a^{1+1}; \quad a^2 a^1 = (aa)a = aaa = a^3 = a^{2+1}.$$

Отже, $a^1 a^1 = a^{1+1}$, $a^2 a^1 = a^{2+1}$. У цих прикладах добуток степенів з однаковими основами дорівнює степеню з тією ж основою і показником, який дорівнює сумі показників степенів. Таку властивість має добуток будь-яких степенів з однаковими основами.