Вправи для повторення

819. Для яких значень x значення виразу $15x - 6$ дорівнює 3?

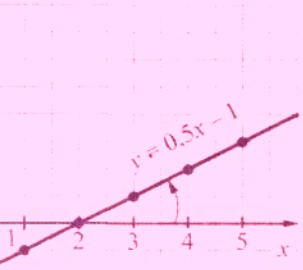
820. Розв'яжіть рівняння:

а) $(2x + 3)(4 - (2x + 3)) = 0$; **б)** $\frac{2x-1}{3} - \frac{3x-1}{2} = 1$.

821. У першому сплаві є 40% міді, а в другому — 10%. Скільки кілограмів другого сплаву потрібно додати до 10 кг пе

...ших значень x обчислили відповідні
...и координатами на координатній пло-

...пряму. Вона є графіком лінійної функ-

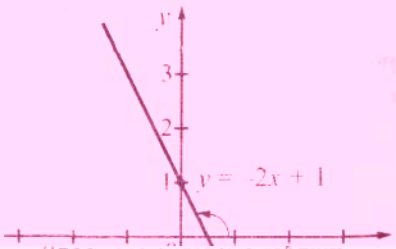


...23

...є пряма.

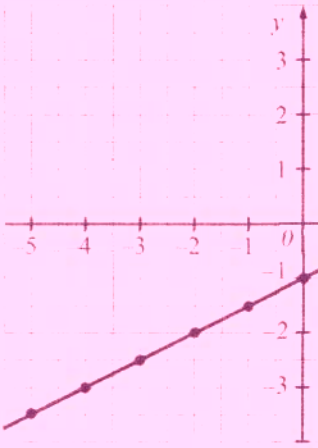
...нкції, досить знайти координати лише
... на координатній площині й провести
...рафік функції $y = 0,5x - 1$, досить було
... та провести через них пряму.

...улі
...ент
...ра-
...з
...На
...ної
...ції



...значення y і позначили б точки з таки...
...щині, то й вони лежали б на цій прямій.

Через позначені точки проведемо
...ції $y = 0,5x - 1$.



Рис

Взагалі, *графіком лінійної функці*

Щоб побудувати графік лінійної ф
двох точок графіка, позначити ці точки
через них пряму. Так, щоб побудувати
взяти дві точки, наприклад, (0; –1) і (2; 0

3. Кутовий коефіцієнт. У форм
лінійної функції $y = 0,5x - 1$ коефіц
біля змінної x додатний: $k = 0,5 > 0$.
фік цієї функції утворює гострий ку
додатним напрямом осі x (див. рис. 23)
рисунку 24 зображено графік лінії
функції $y = -2x + 1$. Для цієї фун
$k = -2 < 0$ і її г

Для цього складемо таблицю кількох значень x та відповідних значень y:

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5

Позначимо точки, координати яких подані в таблиці, на координатній площині (рис. 23). Приклавши лінійку, переконуємося, що усі позначені точки лежать на одній прямій. Якби для інших значень x обчислили відповідні значення y і позначили б точки з такими координатами на координатній площині, то й вони лежали б на цій прямій.

Через позначені точки проведемо пряму. Вона є графіком лінійної функції $y = 0{,}5x - 1$.

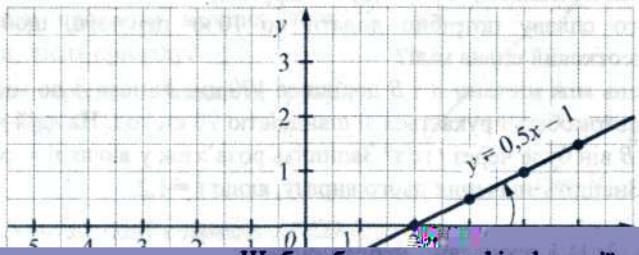


Рис. 23

Щоб побудувати графік функції $y = 2$, досить б
точку з ординатою 2 і провести через неї пряму, парал

4. Властивості лінійної функції $y = kx + b$.

1) *Область визначення функції утворюють усі ч*

2) *Якщо $k \neq 0$, то область значень функції утво*
$k = 0$, то функція набуває лише одного значення $y = b$.

3) *Графіком функції є пряма.*

4) *Графік функції утворює з додатним напрям*
якщо $k > 0$, тупий кут, — якщо $k < 0$. Якщо $k = 0$, то гр
зокрема, якщо $k = 0$ і $b = 0$, то він збігається з віссю x

5. Функція $y = kx$. У формулі $y = kx + b$, якою за
покладемо $b = 0$. Одержимо формулу $y = kx$, якою з
окремим, але досить важливим випадком лінійної фун
багатьох реальних процесів. Розглянемо приклади.

1. Нехай тіло рухається зі швидкістю 20 м . То
ним за час t с, можна обчислити за ф
додатним напрямом осі x.

Отже, від коефіцієнта k з
який утворює графік функції $y =$
дним напрямом осі x. Тому чис
ють *кутовим коефіцієнтом* прям

ило позначити на осі y
льну осі x.

сла.

ють усі числа; якщо

ом осі x гострий кут,
фік паралельний осі x,

ається лінійна функція,
дається функція, яка є
ції і служить моделлю

і шлях S м, пройдений

ий кут з

ить кут,
$x + b$ з до-
о k назива-
$y = kx + b$.

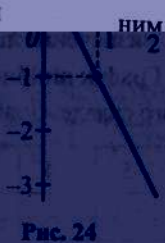


Рис. 24

Якщо $k > 0$, то пряма $y = kx + b$ утворює з додатним напрямом осі x гострий кут, якщо $k < 0$, — тупий кут.

Якщо $k = 0$, то формула, якою задається лінійна функція, має вигляд $y = 0x + b$, тобто $y = b$. Така функція для всіх значень x набуває одного й того ж значення b. Наприклад, лінійна функція $y = 2$ для всіх значень x набуває значення 2. Тому графіком функції є пряма, утворена точками $(x; 2)$, де x — будь-яке число. Ця пряма паралельна осі x (рис. 25), і проведемо через цю точку та

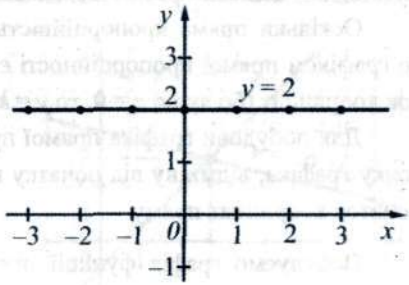


Рис. 25

початок координат прям

Побудуємо графік

точки графіка, відмінно

чимо на координатній

початок координат прям

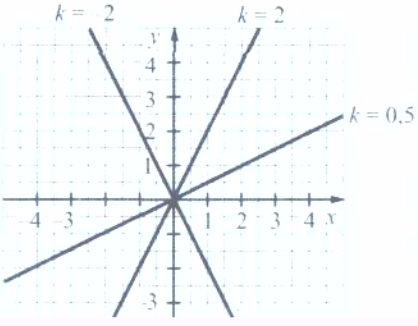
На рисунку 27 зоб

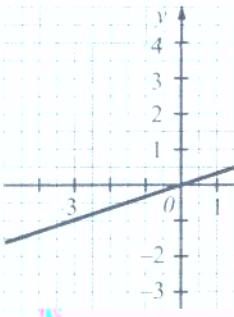
чень k.

функції $y = \frac{1}{3}x$. Знайдемо координати якої-небудь від початку координат: якщо $x = 3$, то $y = 1$. Позначлощині точку (3; 1) і проведемо через неї та через

(рис. 26). Ця пряма є графіком функції $y = \frac{1}{3}x$.

ражено графіки функцій виду $y = kx$ для різних зна-





Функцію, яку можна задати формулою виду $y = kx$, де x — незалежна змінна, k — деяке число, $k \neq 0$, називають ще *прямою пропорційністю.*

Оскільки пряма пропорційність є окремим випадком лінійної функції, то графіком прямої пропорційності є пряма. Ця пряма проходить через початок координат (бо якщо $x = 0$, то $y = k \cdot 0 = 0$).

Для побудови графіка прямої пропорційності досить знайти яку-небудь точку графіка, відмінну від початку координат, і провести через цю точку та

Рис. 28

ційність. Розглянемо дві лінійні
ні коефіцієнти біля x. З'ясує-
цього перевіримо, чи існує
й того ж значення; іншими
ність $0{,}5x - 2 = 0{,}6x + 1$. Роз-

$= -30$.

того ж значення:

$+ 1 = -18 + 1 = -17$.

$-17)$.

$5x + 1$, формули яких мають
не має коренів. Тому прямі,
0), не мають спільних точок

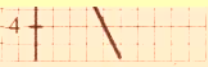


Рис. 27

ий у першій і третій координа-
чвертях.

точці (4; 3).

Взагалі, графіки двох функцій мають спільну точку, якщо існує значення x, для якого обидві функції набувають одного й того ж значення.

7. Взаємне розміщення графіків лінійних фун

функції $y = 0{,}5x - 2$ і $y = 0{,}6x + 1$, формули яких мають рі
мо, чи перетинаються графіки цих функцій (рис. 29). Д
значення x, для якого обидві функції набувають одног
словами: чи існує значення x, для якого виконується рі
в'яжемо дане рівняння:

$$0{,}5x - 0{,}6x = 2 + 1; \quad -0{,}1x = 3; \quad x$$

Якщо $x = -30$, то обидві функції набувають одного

$y = 0{,}5 \cdot (-30) - 2 = -15 - 2 = -17$ і $y = 0{,}6 \cdot (-30$

Отже, графіки функцій перетинаються в точці $(-30$

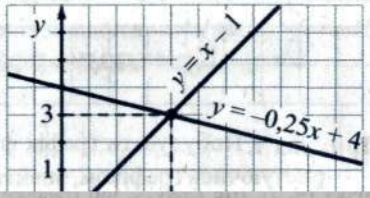
Розглянемо дві лінійні функції $y = 0{,}5x - 2$ і $y =$
однакові коефіцієнти біля x. Рівняння $0{,}5x - 2 = 0{,}5x +$
що є графіками функцій $y = 0{,}5x - 2$ і $y = 0{,}5x + 1$ (рис.
ці прямі

Рис. 26

Якщо $k > 0$, то графік функції $y = kx$ розміще
натних чвертях, а якщо $k < 0$, — у другій і четверті

Для тих, хто хоче знати більше

6. Точки перетину графіків функцій. На рисунку 28 зображені графіки двох лінійних функцій $y = -0{,}25x + 4$ та $y = x - 1$. Якщо $x = 4$, то функції набувають одного й того ж значення $y = 3$. Отже, графіки функцій мають спільну точку (4; 3). Ще кажуть, що графіки перетинаються.



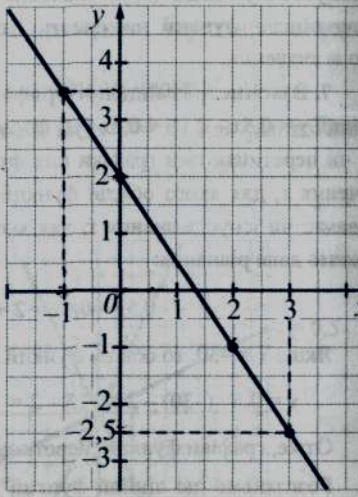
Користуючись графіком, знайти:

а) значення y, яке відповідає $x = -1$;

б) значення x, якому відповідає $y = -2{,}5$.

● Будуємо графік функції.

$y = -1{,}5x + 2$		
x	0	2
y	2	–1



а) Нехай $x = -1$. Через точку $(-1; 0)$ проводимо пряму, паралельну осі y, і знаходимо точку її перетину з графіком. Це точка $(-1; 3{,}5)$. Отже, значенню $x = -1$ відповідає значення $y = 3{,}5$.

б) Нехай $y = -2{,}5$. Через точку $(0; -2{,}5)$ проводимо пряму, паралельну осі x, і знаходимо точку перетину цієї прямої з графіком. Це точка $(3; -2{,}5)$. Отже, значення $y = -2{,}5$ відповідає значенню $x = 3$. ●

П[illegible]лельні).

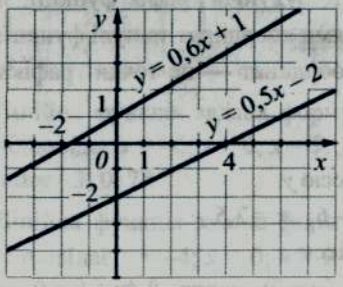


Рис. 29

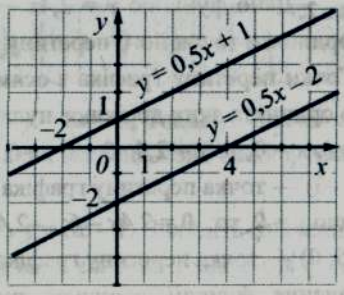


Рис. 30

Взагалі, ***графіки функцій виду*** $y = k_1x + b_1$ ***та*** $y = k_2x + b_2$ ***перетинаються, якщо*** $k_1 \neq k_2$ ***(коефіцієнти біля*** x ***різні), і паралельні, якщо*** $k_1 = k_2$ ***(коефіцієнти біля*** x ***однакові) та*** $b_1 \neq b_2$.

Приклади розв'язання вправ

Приклад 1. Побудувати графік функції, заданої формулою $y = -1{,}5x + 2$. Ко-

Усно

823. Які з даних функцій є лінійними:

а) $y = x + 5$; **б)** $y = -3x$; **в)** $y = \frac{2}{x}$; **г)** $y = 8$;

д) $y = \frac{1}{3}x - 1$; **е)** $y = 0$; **є)** $y = 3 - 7x$; **ж)** $y = x^2 + 4$?

824. Лінійні функції задані формулами:

а) $y = -5x + 1$; **б)** $y = 0{,}1x$; **в)** $y = -3$; **г)** $y = 0$.

Чому дорівнює коефіцієнт k у кожній із цих формул?

825. Дано дві лінійні функції $y = -3x + 1$ і $y = 2x - 4$. Графік якої із цих функцій утворює з додатним напрямом осі x гострий кут; тупий кут?

826. Вкажіть область визначення та область значень функції:

а) $y = 3x + 2$; **б)** $y = -3x + 2$; **в)** $y = 3x$; **г)** $y = 2$.

827. Яка із даних функцій є прямою пропорційністю:

а) $y = -3x$; **б)** $y = x^2$; **в)** $y = 8x + 1$; **г)** $y = \frac{4}{5}x$?

828. Вкажіть правильні твердження:

а) графіком прямої пропорційності є пряма;

б) графік прямої пропорційності проходить через початок координат;

в) якщо $k < 0$, то графік прямої пропорційності розміщений у I і III чвертях.

Рівень А

829. Лінійна функція задана формулою $y = 2x - 6$. Знайдіть значення y, яке відповідає $x = -6$; $x = 0$; $x = 9$. Для яких значень x значення функції дорівнює -3; 0; 7?

830. Лінійна функція задана формулою $y = 5x - 1$. Знайдіть значення y, яке відповідає $x = -4$; $x = 0$; $x = 2$. Для яких значень x значення функції дорівнює -6; 0; 4?

831. Чи проходить графік функції $y = 1{,}8x + 9$ через точку: $A(10; 27)$; $B(50; 89)$, $C(-20; -27)$?

Побудуйте графік функції, заданої формулою:

832. **а)** $y = 2x - 3$; **б)** $y = -0{,}5x + 1$; **в)** $y = 0{,}5x + 2$; **г)** $y = -3x$.

833. **а)** $y = x - 2$; **б)** $y = -2x + 0{,}5$, **в)** $y = -2{,}5$.

В одній системі координат побудуйте графіки функцій:

834. **а)** $y = -1{,}5x$; $y = -1{,}5x - 2$; $y = -1{,}5x + 2$;

б) $y = 4$; $y = 1{,}5$; $y = -2$.

835. $y = 2x$; $y = 2x - 2$; $y = 2x + 1$.

836. Побудуйте графік функції, заданої формулою $y = -1{,}5x + 1{,}5$. Користуючись графіком, знайдіть:

а) значення y, яке відповідає $x = -4$; $x = 0$; $x = 2$;

б) значення x, якому відповідає $y = -3$; $y = 1{,}5$;

в) нуль функції;

г) значення x, для яких функція набуває додатних значень.

837. Побудуйте графік функції, заданої формулою $y = 0{,}5x - 3$. Користуючись графіком, знайдіть:

а) значення y, яке відповідає $x = -2$; $x = 2$; $x = 4$;

б) значення x, якому відповідає $y = -2$; $y = 1$;

в) нуль функції;

г) значення x, для яких функція набуває від'ємних значень.

838. Пряма пропорційність задана формулою $y = 4x$. Заповніть таблицю:

x	-3		-1	2	3	
y		-8				20

839. Пряма пропорційність задана формулою $y = -2x$. Заповніть таблицю:

x	-5		-2			3
y		6		0	-4	

Побудуйте в одній системі координат графіки функцій:

840. **а)** $y = 4x$; **б)** $y = -4x$; **в)** $y = -\frac{2}{3}x$.

841. **а)** $y = -3x$; **б)** $y = 3x$; **в)** $y = \frac{1}{2}x$.

842. Побудуйте графік функції $y = -\frac{1}{2}x$. Користуючись графіком, знайдіть значення аргументу, яким відповідають такі значення функції: -1; 2; 3.

843. Побудуйте графік функції $y = 2x$. Користуючись графіком, знайдіть значення функції, які відповідають таким значення аргументу: –1,5; 2,5.

844. Чи належить графіку прямої пропорційності $y = 14x$ точка: $A(-2; -28)$; $B(0{,}5; 7)$; $C\left(-\frac{2}{7}; 4\right)$?

845. Які з точок належать графіку прямої пропорційності $y = -4x$: $K(4; -1)$; $M(0{,}3; -1{,}2)$; $N(0; -4)$?

Рівень Б

Побудуйте графіки функцій та знайдіть координати точки їх перетину:

846. **а)** $y = 4x - 1$ і $y = 2x + 2$; **б)** $y = -3x + 2$ і $y = x - 2$;

в) $y = \frac{1}{3}x - 1$ і $y = 1$.

847. **а)** $y = 3x - 2$ і $y = 2x - 1$; **б)** $y = -x + 2$ і $y = 1{,}5x + 2$.

848. Чи перетинаються графіки функцій:

а) $y = -2{,}5x + 1$ і $y = 2{,}5x - 1$; **б)** $y = 2x + 2$ і $y = 2x + 3$?

Не будуючи графік функції, знайдіть координати точок його перетину з осями координат та нулі функції:

849. **а)** $y = -1{,}6x + 4$; **б)** $y = 0{,}3x - 21$; **в)** $y = -8$.

850. **а)** $y = 8 - 2{,}5x$; **б)** $y = -1{,}6x + 4{,}8$; **в)** $y = 6$.

851. Запишіть формулу прямої пропорційності, якщо її графік проходить через точку: **а)** (1; 17); **б)** (–2; –4).

852. Функція $y = kx$ для $x = 2$ набуває значення 7. Знайдіть k.

853. Знайдіть значення функції $y = 2{,}5x$, якщо $x = -2$ та $x = 4$. Порівняйте дані значення аргументів і відповідні значення функції.

854. На рисунку 31 зображено графік прямої пропорційності.

а) Запишіть формулу, якою задається ця функція.

б) Вкажіть значення y, які відповідають значенням $x \geq 0$.

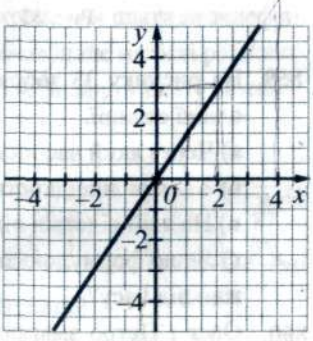


Рис. 31

855. В одній системі координат побудуйте графіки функцій $y = 3{,}5$ та $y = 2x$. Для яких значень x точки першого графіка лежать вище від точок другого графіка?

856. Для яких значень x графік функції $y = 0{,}5x$ лежить нижче від графіка функції $y = 2$?

857. Одна сторона прямокутника дорівнює 2 см, а друга — x см, де $x \geq 1$. Запишіть формулу, яка задає площу y прямокутника (у квадратних сантиметрах) як функцію від x. Побудуйте графік цієї функції.

858. У початковий момент часу велосипедист перебував на відстані 60 м до фінішу. На рисунку 32 зображено графік зміни відстані від велосипедиста до фінішу відповідно до зміни часу.

а) Через який час велосипедист досяг фінішу?

б) З якою швидкістю рухався велосипедист?

в) Який шлях проїхав велосипедист за дві останні секунди?

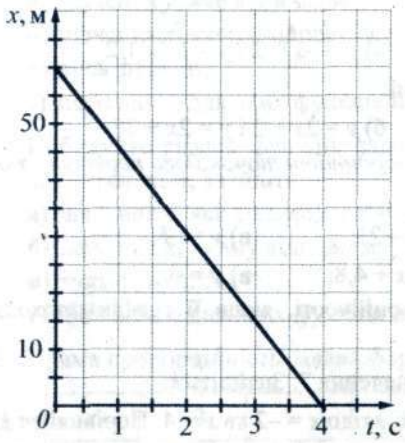


Рис. 32

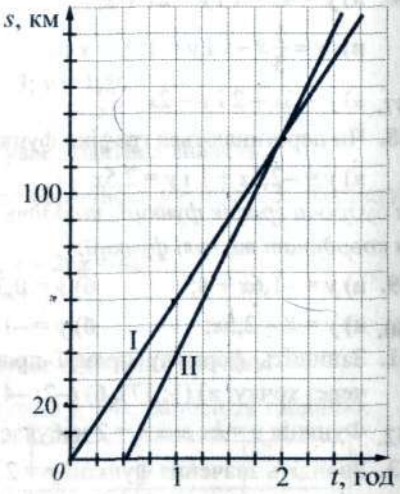


Рис. 33

859. На рисунку 33 зображено графік руху двох автобусів, що вирушили з однієї станції.

а) Через який час після відходу першого автобуса вирушив другий?

б) З якими швидкостями рухалися автобуси?

в) На якій відстані від станції другий автобус наздогнав перший?

г) Якою формулою задається шлях, пройдений першим автобусом, залежно від часу?

860. Олег і Петро змагалися у плаванні на дистанції 200 м у 50-метровому басейні. На рисунку 34 зображено графіки зміни відстані від хлопців до місця старту.

а) Скільки часу витратив кожен із хлопців на подолання перших 50 м дистанції?

б) Хто переміг у змаганні?

в) На скільки секунд відстав переможений від переможця?

г) Яка середня швидкість руху кожного із хлопців на першій стометрівці?

д) Що означають точки перетину графіків?

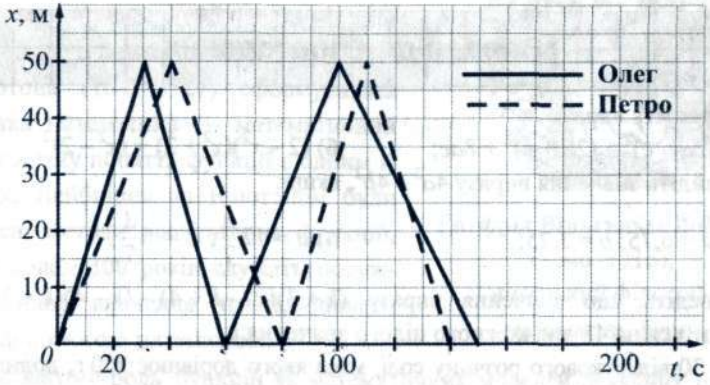


Рис. 34

861 Вартість телеграми визначається так: кожне слово коштує 5 к., додають ще 5 к. і до одержаної суми додають 20% для податку на додану вартість. Запишіть формулу для знаходження вартості телеграми, що складається з n слів. Знайдіть вартість телеграми, що складається з 21 слова.

862. Абонентна плата за телефон становить 7 грн. 34 к. Вартість однієї хвилини місцевих розмов дорівнює 2 к., до того ж, вартість 100 хв розмов входить до абонентної плати. Запишіть формулу для знаходження плати за телефон за місяць, якщо протягом місяця абонент здійснював лише місцеві розмови, загальна тривалість яких дорівнює n хв, де $n > 100$. Знайдіть плату за телефон, якщо $n = 320$.

Рівень В

863. Знайдіть координати точки перетину графіків функцій:

а) $y = 14x - 8$ і $y = 7x + 8$; **б)** $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{3}$ і $y = \frac{1}{4}x$.

864. Чи проходить графік функції $y = x + 4$ через точку перетину графіків функцій $y = 2x + 5$ і $y = -5x - 2$?

865. Знайдіть таке число a, щоб точка перетину прямих $y = ax$ та $y = 6x - 2$ мала абсцису 2.

Побудуйте графік функції, заданої формулою:

866. **а)** $y = |x| - 2$; **б)** $y = 5 - |x|$.

867. **а)** $y = x + 2|x|$; **б)** $y = 2x - |x|$.

Вправи для повторення

868. Спростіть вираз:

а) $(2a - c)^2 - (2a + c)^2 + 8ac$; **б)** $(2 - x^2)(x^2 + 2) + (x^2 - 2)^2$.

869. Знайдіть значення виразу $4a^2 - 4b^2$, якщо:

а) $a = 6{,}75$; $b = 3{,}25$; **б)** $a = 12\frac{4}{7}$; $b = 5\frac{4}{7}$.

870. Доведіть, що значення виразу $(k + 3)(k^2 - k + 4) - (k - 4)(k + 3)^2 + 32k$ ділиться на 48 для кожного цілого значення k.

871. До 30-відсоткового розчину солі, маса якого дорівнює 750 г, долили 150 г води. Скільки відсотків солі містить утворений розчин?

872. У першому бідоні було молока утричі більше, ніж у другому. Коли з першого бідона перелили 12 л молока у другий, то в другому бідоні його стало в 1,4 разу більше, ніж у першому. Скільки молока було в кожному бідоні спочатку?

873. Швидкість теплохода у стоячій воді дорівнює 28 км/год. Відомо, що за 2 год він проходить за течією річки на 41 км менше, ніж за 4 год проти течії. Яка швидкість течії річки?

Цікаво знати

«В одну ріку не можна увійти двічі» — ці слова приписують давньогрецькому філософу Геракліту Ефеському (з міста Ефес). Вони відображають суттєву особливість реального світу: усе в ньому перебуває у стані безперервної зміни і розвитку. Саме шукаючи закономірності у нескінченному морі видозмін природи, вчені дійшли до понять змінної величини і функції.

Поняття змінної величини вперше було введено в математику французьким математиком Рене Декартом (1596–1650) у його знаменитому творі «Геометрія» у 1637 році. Саме після введення цього поняття починає створюватись сучасне уявлення про функцію як про залежність однієї змінної вели-

чини від іншої. Слід зазначити, що хоча деякі залежності між величинами, які ми називаємо функціями, використовувалися ще у давні часи, математика до першої половини XVII ст. залишалася наукою про сталі величини.

Термін «функція» (від латинського functio — виконання, звершення) вперше увів німецький математик Готфрід Вільгельм Лейбніц у 1694 році.

Завдяки працям Лейбніца та відомого англійського фізика й математика Ісаака Ньютона (1643–1727) сформувалася нова гілка математики — математичний аналіз, у якому поняття функції є одним із головних. Лейбніцем та Ньютоном були розроблені методи дослідження функцій, які вже понад 300 років служать потужним засобом вивчення навколишнього світу за допомогою математики.

Готфрід Вільгельм Лейбніц (1646–1716), німецький філософ, математик, фізик

Про вагому роль функцій як математичних моделей реальних процесів Ньютон писав так: «Я не зміг би отримати багатьох своїх фундаментальних результатів, якби не відмовився від безпосереднього розгляду самих тіл і не звів усе просто до дослідження функцій».

Запитання і вправи для повторення § 6

1. Наведіть приклад залежності між змінними.
2. Поясніть на прикладі, що таке аргумент і що таке функція.
3. Які ви знаєте способи задання функції? Наведіть приклад функції, заданої за допомогою формули.
4. Що називають областю визначення і областю значень функції?
5. Які точки координатної площини утворюють графік функції?
6. Як за допомогою графіка функції знайти її значення за відомим значенням аргументу?
7. Яку функцію називають лінійною? Наведіть приклади лінійних функцій.
8. Що є графіком лінійної функції?
9. Яку функцію називають прямою пропорційністю? Наведіть приклади прямої пропорційності.