

§2. ДІЛЕННЯ І ДРОБИ

Ділення двох цілих виразів не завжди можна виконати без остачі. Наприклад, частки $a^3 : a^5$, $4xy^2 : 2yz$ не можна записати у вигляді цілих виразів. Ділення одночленів не можна виконати без остачі, якщо дільник містить змінну, якої немає в діленому, або якщо показник степеня будь-якої змінної в дільнику більший від показника степеня тієї самої змінної в діленому.



Якщо частка від ділення одного виразу на інший не є цілим виразом, то її записують у вигляді дробу. Наприклад:

$$2 : 3 = \frac{2}{3}, a^3 : a^5 = \frac{a^3}{a^5}, 2ax : 3bx^2 = \frac{2ax}{3bx^2},$$

$$ax : (a + x) = \frac{ax}{a+x}.$$

♦ **Дробом називають частку від ділення двох виразів, записану за допомогою дробової риски.**

Які б не були вирази A і B , їх частка $\frac{A}{B}$ — дріб. Вирази A і B — члени цього дробу, A — *чисельник*, B — *знаменник*.

Як і інші вирази, дробу бувають числові й зі змінними.

Наприклад, дробу $\frac{5}{7}$, $\frac{-3}{0,4}$, $\frac{2^2+3^2}{4^2+5^2}$ — числові вирази, а

$\frac{ab}{x}$, $\frac{4m}{m+1}$, $\frac{a-2b}{a+b}$ — вирази зі змінними.


Звичайний дріб — окремий вид дробу. Це дріб, члени якого — натуральні числа. Якщо члени дробу — многочлени, його називають *алгебраїчним дробом*.

Дробу зі змінними мають значення (зміст) не при всіх значеннях змінних. Наприклад, якщо $a = 5$, то

$$\frac{2a+3}{a-5} = \frac{2 \cdot 5 + 3}{5 - 5} = \frac{13}{0}.$$

Запис $\frac{13}{0}$ — не число, бо на 0 ділити не можна. Отже,

дріб $\frac{2a+3}{a-5}$ при $a = 5$ не має змісту. При всіх інших значеннях a він має зміст. Говорять, що для даного дробу **допустимими** є всі значення змінної a , крім $a = 5$.

 Для змінних, що входять у знаменник дробу, допустимими є тільки ті значення, які не перетворюють цей знаменник на нуль.

Розглянемо два дробі:

$$\frac{6}{a} \text{ і } \frac{6(a-3)}{a(a-3)}$$

Складемо таблицю їх значень для таких a : $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

a	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$\frac{6}{a}$	-1,5	-2	-3	-6		6	3	2	1,5	1,2	1	$\frac{6}{7}$
$\frac{6(a-3)}{a(a-3)}$	-1,5	-2	-3	-6		6	3		1,5	1,2	1	$\frac{6}{7}$

Як видно з таблиці, при значеннях a , що дорівнюють $-4, -3, -2, -1, 1, 2, 4, 5, 6, 7$, обидва дробі мають рівні значення. Рівні вони і при інших значеннях змінної a , за винятком 0 і 3. Значення $a = 0$ недопустиме для обох розглядуваних дробів, значення $a = 3$ недопустиме для другого дробу. При всіх допустимих значеннях змінної a всі відповідні значення цих дробів рівні.

 Два вирази, відповідні значення яких рівні при всіх допустимих значеннях змінних, називаються **тотожно рівними, або тотожними**.

Це означення від подібного означення для цілих виразів відрізняється тільки словом «допустимих». Говорячи тільки про цілі вирази, це слово раніше ми вилучали, оскільки для них усі значення змінних допустимі.

► Два тотожних вирази, сполучені знаком рівності, утворюють *тотожність*. Заміна одного виразу іншим, тотожним йому, називається *тотожним перетворенням* даного виразу.



Хочете знати ще більше?

Як співвідносяться між собою різні види дробів, можна ілюструвати такою діаграмою (мал. 3). Тут кожне вужче поняття є складовою ширшого. Звичайні дроби є складовою частиною числових дробів, які, у свою чергу, є складовою алгебраїчних дробів, і т. д. Приклади звичайних дробів:

$$\frac{3}{7}, \frac{11}{35}, \frac{1}{149};$$

числових:

$$\frac{0,5}{2,3}, \frac{-\frac{3}{4}}{0,25}, \frac{3,7-\frac{1}{2}}{2^2+7};$$

алгебраїчних:

$$\frac{a}{5}, \frac{1}{n}, \frac{x^2-2}{2x}, \frac{a^2-3ac+5c^2}{2ac}.$$



Мал. 3

Загальне поняття дробу досить широке. Крім алгебраїчних дробів бувають і неалгебраїчні, поки що вам не відомі, наприклад,

$$\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{x}}, \frac{\cos x}{\sin x}, \frac{\sqrt{1-x^2}}{3x^2}, \frac{1+\ln x}{2\ln x}.$$

Перевірте себе

1. Що таке дріб?
2. Як називають члени дробу?
3. Які дроби називають алгебраїчними? Наведіть приклади.
4. Що таке допустимі значення змінних? Наведіть приклади.
5. Які вирази називають тотожними?
6. Що таке тотожність?


Виконаємо разом!

1. Які значення змінних допустимі для дробу:

$$\text{а) } \frac{1}{x+7}; \quad \text{б) } \frac{x-a}{x^2-a^2}?$$

Розв'язання. а) $x+7=0$, якщо $x=-7$. Це значення x недопустиме для даного дробу. Всі інші значення допустимі;

б) $x^2-a^2=0$, якщо $(x-a)(x+a)=0$, звідси або $x=a$, або $x=-a$.

Відповідь. а) Для даного дробу допустимі всі значення, крім $x=-7$;

б) допустимі всі значення, крім $x=a$ і $x=-a$.

2. Доведіть, що дріб $\frac{m}{m^2+1}$ має зміст при всіх значеннях m .

Доведення. При кожному раціональному значенні m число m^2 невід'ємне, а m^2+1 — додатне. Знаменник даного дробу при кожному значенні m не дорівнює 0.

Отже, при кожному значенні m даний дріб має зміст. А це й треба було довести.

3. Чи тотожні вирази:

$$\text{а) } \frac{14a^3b^2}{7ab} \text{ і } 2a^2b; \quad \text{б) } \frac{(-a)^7}{a^6} \text{ і } \frac{(-a)^6}{a^5}?$$

Розв'язання. а) Подамо дріб $\frac{14a^3b^2}{7ab}$ у вигляді частки двох одночленів і виконаємо ділення:

$$\frac{14a^3b^2}{7ab} = 14a^3b^2 : 7ab = 2a^2b.$$

При всіх допустимих значеннях змінних ($a \neq 0, b \neq 0$) перший вираз дорівнює другому, а тому їх відповідні значення

рівні. Отже, вирази $\frac{14a^3b^2}{7ab}$ і $2a^2b$ тотожні.

б) Виконаємо дії в кожному виразі, використовуючи властивості степенів:

$$\frac{(-a)^7}{a^6} = \frac{-a^7}{a^6} = -a; \quad \frac{(-a)^6}{a^5} = \frac{a^6}{a^5} = a.$$

Як бачимо, при всіх допустимих значеннях змінної ($a \neq 0$) вирази набувають протилежних значень. Отже, вони нетотожні.

Відповідь. а) Вирази тотожні; б) вирази нетотожні.

Виконайте усно

47. Які з наведених нижче виразів — дробі:

а) $x - \frac{1}{x}$; б) $\frac{1}{2} - \frac{3}{x}$; в) $\frac{2}{0,5}$; г) $\frac{1-a^2}{2a}$?

48. Обчисліть:

а) $\frac{0,8}{2}$; б) $\frac{2}{0,5}$; в) $\frac{0,6}{-0,2}$; г) $\frac{2^5}{2^6}$.

49. Які значення змінних допустимі для дробів:

а) $\frac{2x}{x+3}$; б) $\frac{1}{x(x-y)}$; в) $\frac{c-x}{1+c^2x^2}$; г) $\frac{a}{a^2-1}$?

50. Чи тотожні вирази:


а) $\frac{4x^4}{4x^2} i x^2$; б) $\frac{8m^5}{5m^4} i 3m$; в) $\frac{7x^2}{7x^4} i x^2$;
 г) $\frac{a-b}{ab} i \frac{a+b}{ab}$; д) $\frac{ab}{a+b} i \frac{ba}{a+b}$; е) $1 + \frac{a^2}{b} i \frac{a+b}{b}$?

Рівень




51. Запишіть у вигляді дробу частку від ділення:

а) 2 на 7; б) x на y ; в) $3m$ на c ;
 г) $2x$ на $3y$; д) x^2 на $1+x$; е) $4ab$ на $(a+b)^2$.

 52. Запишіть дріб, у якого: а) чисельник $2c$, знаменник $3r$;
 б) чисельник 1, знаменник $x-y$; в) чисельник z^2 , знаменник $2+z^2$.

53. Складіть дріб, у якого чисельник дорівнює $6t$, а знаменник: а) на 5 менший від чисельника; б) дорівнює чисельнику; в) удвічі менший за чисельник; г) дорівнює квадрату чисельника без одиниці.


 54. Обчисліть:

а) $\frac{5^8}{5^5}$; б) $\frac{0,3^{10}}{0,3^{11}}$; в) $\frac{(-3)^{12}}{5 \cdot (-3)^9}$; г) $\frac{-0,5^8}{(-0,5)^9}$; ґ) $\frac{3,4^0}{2^5 - 5^2}$.

55. Знайдіть значення виразу:

а) $\frac{8^9}{8^6 \cdot 8^4}$; б) $\frac{7^2 \cdot (-7)^5}{(-7)^6}$; в) $\frac{0,2^7}{0,2^8 \cdot 10}$; г) $\frac{2,4^4}{8^4 \cdot 0,3^4}$.

Визначте, при яких значеннях змінних не має змісту дріб (56–58).


 56. а) $\frac{m}{n}$; б) $\frac{2}{a-3}$; в) $\frac{x+p}{x+4}$; г) $\frac{3c-8}{3c+8}$.

57. а) $\frac{3}{x-5}$; б) $\frac{a-6}{a+9}$; в) $\frac{3m}{2-m}$; г) $\frac{12z}{3z-15}$.

58. а) $\frac{3a}{a^2-16}$; б) $\frac{1}{x(x^2-9)}$; в) $\frac{m}{(m^2-1)(m^2-4)}$; г) $\frac{a^0}{a^2+1}$.

59. Наведіть приклади дробів, знаменники яких дорівнюють нулю, якщо:

а) $x = 5$; б) $z = -1$; в) $t = 0$; г) $x = 0$ або $x = -3$.

 60. Укажіть значення x , допустимі для дробу:

а) $\frac{1}{x-5}$; б) $\frac{2}{5-x}$; в) $\frac{3x}{x^2-4}$; г) $\frac{x-3}{x^2+3}$.

61. Які значення x допустимі для дробу:

а) $\frac{3}{x+5}$; б) $\frac{x}{x-1}$; в) $\frac{3x}{3+x}$;

г) $\frac{-5}{x}$; ґ) $\frac{2}{x^2+4}$; д) $\frac{1}{2x-5}$?

62. Знайдіть значення дробу:

а) $\frac{36}{3x-x^2}$, якщо $x = -3$; б) $\frac{a+4}{6a}$, якщо $a = \frac{1}{2}$;

в) $\frac{1}{c^2-9}$, якщо $c = -3$; г) $\frac{m}{|m|}$, якщо $m = -5$.



63. Заповніть таблицю:

a	-2	-1	0	1	2	3	4	10
$\frac{2}{a-3}$								
$\frac{2a}{a^2-3a}$								

Які значення a недопустимі для дробу $\frac{2}{a-3}$? А для дробу

б) $\frac{2a}{a^2-3a}$? Чи рівні значення цих дробів, коли $a = 100$?

64. Чи є тотожністю рівність:

а) $\frac{a^5}{a^4} = a$; б) $\frac{m^5}{m^4} = m^3$; в) $\frac{6x^3}{3x} = m^3$?

65. Чи можна вважати тотожними дроби:

а) $\frac{12}{x}$ і $\frac{12x^3}{x^2}$; б) $\frac{2a}{b}$ і $\frac{2a^2}{b^2}$;

в) $\frac{3x^2}{6x}$ і $\frac{6x^2}{12x}$; г) $\frac{m}{n}$ і $\frac{n}{m}$?

Доведіть тотожність (66—67).



66. а) $\frac{2a \cdot 3b}{a+b} = \frac{6ab}{a+b}$; б) $\frac{15a^3b^2}{5a^2b} = 3ab$;

в) $\frac{2a+5a}{3a+4a} = \frac{3a+4a}{2a+5a}$; г) $\left(\frac{2ab^2}{6a}\right)^3 = 3 \cdot \left(\frac{b^3}{9}\right)^2$.

67. а) $\frac{a^6}{a^3} = a^2 \cdot a$;

б) $\frac{(m-1)^7}{(m-1)^5} = \frac{(m-1)^5}{(m-1)^3}$;

в) $\frac{3a^5+2a^5}{a^5} = \frac{15a^5}{2a^5+a^5}$; г) $x+y = \frac{(x+y)^2}{x+y}$.

Рівень **Б**

Запишіть у вигляді одночлена або дробу частку (68—69).

68. а) $-8x^4 : 2a$; б) $-6x^4 : 3x^5$; в) $-9x^7 : 9x^7$;
 г) $32ac^2 : 8a^3c$; г) $2,5x^7 : 0,5x^3$; д) $1,2 : (-0,3xy^3)$.

69. а) $6ac : (-3a)$; б) $6xy : (-3xz)$; в) $4a^2 : (-2a^3)$;
 г) $-3 : 21x$; г) $3,3a^5c^3 : 11a^3$; д) $1,8p^2 : 6q^2$.

70. Знайдіть значення дробу:

а) $\frac{x^2}{a^2 - 10}$, якщо $x = 2,5$;

б) $\frac{2x}{x^2 - y^2}$, якщо $x = -12$ і $y = 13$;

в) $\frac{2(a+b)}{a-b}$, якщо $a = 9$ і $b = -7$;

г) $\frac{x}{y(x-2)}$, якщо $x = 6$ і $y = \frac{1}{3}$.

71. Користуючись калькулятором, знайдіть значення дробу

$\frac{2x^2 + 3}{3x}$, якщо: а) $x = 2,75$; б) $x = 21,8$.

72. Складіть і заповніть таблицю значень дробів $\frac{2a}{2+a}$,

$\frac{a}{1+0,5a}$ і $\frac{2a^2}{2+a^2}$ для цілих значень a , $|a| \leq 5$. Який ви-
 сновок можна зробити?

73. Чи при будь-якому значенні змінної x значення дробу:

а) $\frac{9}{x^2 + 1}$ додатне; б) $\frac{3x^2}{4x^2 - 4x + 1}$ додатне;

в) $\frac{-x^2}{x^2 + 15}$ від'ємне; г) $\frac{x^2 + 6}{2x - x^2 - 1}$ від'ємне?

74. Доведіть, що при будь-якому значенні змінної x значення дробу $\frac{5}{x^2+3}$ додатне, а значення дробу $\frac{(-3)^2}{-3-x^2}$ від'ємне.

75. Доведіть, що для даного дробу допустимими є будь-які значення змінних:

а) $\frac{3x}{x^2+1}$; б) $\frac{5}{(x-1)^2+3}$; в) $\frac{2}{4x^2-4x+3}$.

76. При яких значеннях змінної x не має змісту дріб:


а) $\frac{2}{x(1+x)}$; б) $\frac{1+x^2}{1-x^2}$; в) $\frac{x^3}{4x^2-100}$;

г) $\frac{1-x^2}{1+x^2}$; д) $\frac{-1}{x^3-x^2}$; е) $\frac{3}{9x-x^3}$?

77. Які значення x допустимі для дробу:

а) $\frac{1}{x(x-1)(x+2)}$; б) $\frac{3-x}{(2x-1)(x^2-16)}$; в) $\frac{(x-3)^2}{(2x+1)^2(x-7)^2}$;

г) $\frac{x+13}{(x^2+1)(2x^2+3)}$; д) $\frac{x^2-5x+100}{(x^2-4)(x^4-1)}$; е) $\frac{1}{x^2-4x+4}$?

 78. Укажіть допустимі значення змінної для дробу:

а) $\frac{2x}{x+7}$; б) $\frac{4}{1-2x}$; в) $\frac{5a}{a^2+3}$; г) $\frac{m+12}{m^2-16}$;


д) $\frac{3}{(y-1)(y+6)}$; е) $\frac{8-x}{x(x^2+1)}$; ж) $\frac{(c-2)^2}{24}$; з) $\frac{7a-2}{a^2-5a}$.

79. Запишіть дробі, які не мають змісту, якщо:

а) $x = 3$; б) $y = -1$; в) $y = -4$ і $y = 0$; г) $a = 0$ і $a = 0,5$;
 д) $m = 1$ і $m = -5$; е) $x = 0$ і $x = -2$, або $x = 2$.

80. Розв'яжіть рівняння відносно змінної x і вкажіть, при яких значеннях a рівняння має корені:

а) $ax - 2 = 2x + 3$; б) $ax - a = 7x - 4$;
 в) $4(a^2x - 3) = a + x$; г) $9x - 5 = a(ax - 2)$.

 81. При яких значеннях c значення дробу $\frac{c+2}{5}$ дорівнює:

а) 1; б) 0; в) -1; г) 2; д) -100?

82. При яких значеннях x значення дробу $\frac{3x-12}{4}$ дорівнює:

- а) -3 ; б) 0 ; в) 1 ; г) 3 ?

Розв'яжіть рівняння (83—86):

83. а) $\frac{4x+1}{3} = 3$; б) $\frac{2x-3}{7} = 9$; в) $\frac{2x+3}{5} = 7$.

84. а) $\frac{x+4}{3} = \frac{2x-1}{5}$; б) $\frac{x+1}{3} = \frac{2x+1}{9}$; в) $\frac{x-3}{4} = \frac{2-3x}{5}$;

г) $\frac{7+3x^2}{3} = \frac{2x^2+5x-2}{2}$; г) $\frac{4x^2-x+9}{6} = \frac{2x^2+1}{3}$.

85. а) $\frac{2x}{3} - \frac{3x}{5} = 6$; б) $\frac{x}{2} + \frac{2x}{3} = 14$; в) $\frac{5x}{3} = \frac{x}{5} - 2$.

86. а) $\frac{x+2}{3} = \frac{x-2}{5}$; б) $\frac{2x-1}{5} = \frac{5-x}{3}$; в) $\frac{3x+1}{5} - \frac{2x}{3} = 6$.

87. Чи можна вважати тотожними дробі:

а) $\frac{a}{a-2}$ і $\frac{a^2}{a^2-4}$; б) $\frac{a}{a-2}$ і $\frac{a^2}{(a-2)^2}$?

88. Чи тотожні вирази:

а) $\frac{a}{a^2-b^2}$ і $\frac{b}{a^2-b^2}$; б) $\frac{x}{x^2-y^2}$ і $\frac{x}{(x-y)(x+y)}$;

в) $\frac{a^2+2ab^2+b^2}{(a+b)^2}$ і $\frac{(a-b)^2}{a^2-2ab+b^2}$; г) $\frac{x+1}{x-1}$ і $\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-2xy-y^2}$?

89*. Доведіть тотожність, поділивши чисельник на знаменник:

а) $\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x-1} = x^2-5x+6$;

б) $\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x-2} = x^2-4x+3$;

в) $\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x-3} = x^2-3x+2$.

90. Доведіть тотожність:

а) $\frac{x^4+2x^3-13x^2-14x+24}{(x-3)(x+4)} = x^2+x-2$;

$$б) \frac{x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24}{(x-1)(x+2)} = x^2 + x - 12.$$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

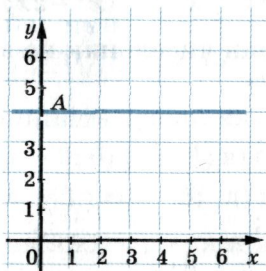
91. Скоротіть дріб

а) $\frac{35}{56}$; б) $\frac{144}{441}$; в) $\frac{5120}{2520}$; г) $\frac{693}{825}$; г) $\frac{3366}{4488}$.

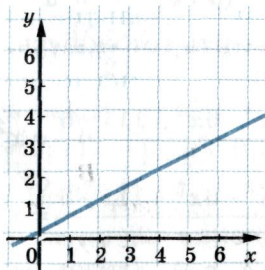
92. Заповніть порожні клітинки таблиці.

Ділене	Дільник				
	a^2	ac	$2a^3c$	$-2ac^3$	$-12c^2$
$6a^5c^4$					
$12a^3c^5$					
$-6a^4c^3x$					
$0,5a^3c^2$					

93. Задайте формулами функції, графіки яких зображено на малюнках 4 і 5.



Мал. 4



Мал. 5