

§5. ДОДАВАННЯ І ВІДНІМАННЯ ДРОБІВ



Для натуральних чисел a і b і

г) $20a^2 - 45b^2$; д) $48x^2 - 75y^2$.

г) $3x^4 - 12x^2$;

Приклади. $\frac{5ax}{3m} + \frac{2c}{3m} = \frac{5x+2c}{3m}$; $\frac{a}{m+x} - \frac{m}{m+x} = \frac{a-m}{m+x}$.

Якщо треба знайти суму або різницю дробів з різними знаменниками, то спочатку їх зводять до спільного знаменника, як це роблять при додаванні та відніманні звичайних дробів.

Щоб звести дробі до спільного знаменника, попередньо знаменник кожного дробу розкладають на множники. Якщо знаменники дробів не мають спільних множників, то додавання і віднімання дробів виконують за формулою:

$$\frac{A}{B} \pm \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D}{B \cdot D} \pm \frac{C \cdot B}{D \cdot B} = \frac{A \cdot D \pm C \cdot B}{B \cdot D}$$

Приклади.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2a} + \frac{3a}{5x} &= \frac{5x}{10ax} + \frac{6a^2}{10ax} = \frac{5x+6a^2}{10ax}; \\ \frac{x}{x^2-4} - \frac{2}{3x+6} &= \frac{x}{(x-2)(x+2)} - \frac{2}{3(x+2)} = \\ &= \frac{3x}{(x-2)(x+2)3} - \frac{2(x-2)}{3(x+2)(x-2)} = \frac{3x-2x+4}{3(x-2)(x+2)} = \frac{x+4}{3(x^2-4)}. \end{aligned}$$

Іноді виникає потреба знайти суму або різницю дробу і цілого виразу. Їх можна додавати або віднімати, як дробі, записавши цілий вираз у вигляді дробу зі знаменником 1.

Приклад.

$$\frac{2xy}{3c} + 5c = \frac{2xy}{3c} + \frac{5c}{1} = \frac{2xy+15c^2}{3c}.$$

Подібним способом спрощують вирази, які складаються з трьох або більше дробів, сполучених знаками «плюс» або «мінус». Наприклад,

$$\frac{2c}{3x} + \frac{1}{a} - \frac{3a}{2x} = \frac{4ac}{6ax} + \frac{6x}{6ax} - \frac{9a^2}{6ax} = \frac{4ac+6x-9a^2}{6ax}.$$



Хочете знати ще більше?

Домовившись розглядати кожну тотожність тільки при її допустимих значеннях змінних, тобто за умови, коли її ліва і права частини мають зміст, ми свідомо спрощуємо задачу. Довівши тотожність, стверджуємо тільки, що вона правильна на всій області допустимих значень, не зазначаючи, яка це область.

Щоб дати вичерпне розв'язання такої вправи, варто не лише переконатися, що тотожність правильна на всій області допустимих значень, а й указати, якою є ця область. Або чітко зазначити, які з дійсних чисел не належать цій області. Наприклад, показавши, що

$$\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x} = \frac{y}{(x-y)x},$$

бажано вказати, що доведена рівність правильна, якщо $x \neq y$ і $x \neq 0$.

У відповідальних випадках, наприклад у екзаменаційних роботах, такі уточнення доцільні.

Перевірте себе

1. Сформулюйте правило додавання і віднімання дробів з однаковими знаменниками.
2. Як додавати дроби з різними знаменниками?
3. Як знайти різницю дробів з різними знаменниками?
4. Як знайти суму чи різницю дробу і цілого виразу?

✓ Виконаємо разом!

1. Знайдіть різницю дробів $\frac{3-a^2}{a^2}$ і $\frac{3}{a^2}$.

Розв'язання.
$$\frac{3-a^2}{a^2} - \frac{3}{a^2} = \frac{3-a^2-3}{a^2} = \frac{-a^2}{a^2} = -1.$$

Відповідь. -1 .

2. Знайдіть суму дробів $\frac{6}{a}$ і $\frac{3a}{a^2-c}$.

Розв'язання. Спільний знаменник даних дробів $a(a^2-c)$. Щоб звести дані дроби до спільного знаменника, треба домножити перший дріб на a^2-c , а другий — на a .

$$\frac{6}{a} + \frac{3a}{a^2-c} = \frac{6a^2-6c+3a^2}{a(a^2-c)} = \frac{9a^2-6c}{a(a^2-c)} = \frac{3(3a^2-2c)}{a(a^2-c)}.$$

Відповідь.
$$\frac{3(3a^2-2c)}{a(a^2-c)}.$$

3. Виконайте дії: $\frac{3a^2}{2a-b} - \frac{a^2-b^2}{b-2a}$.

Розв'язання. Використаємо формулу

$$-\frac{A}{B} = \frac{A}{-B}.$$

$$\begin{aligned} \frac{3a^2}{2a-b} - \frac{a^2-b^2}{b-2a} &= \frac{3a^2}{2a-b} + \frac{a^2-b^2}{2a-b} = \frac{3a^2+a^2-b^2}{2a-b} = \\ &= \frac{4a^2-b^2}{2a-b} = \frac{(2a-b)(2a+b)}{2a-b} = 2a+b. \end{aligned}$$

Відповідь. $2a+b$.

Виконайте усно

186. Додайте дробі:

а) $\frac{2}{5} + \frac{4}{5}$; б) $\frac{7}{13} + \frac{6}{13}$; в) $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{5}{4}$;

г) $\frac{a}{2x} + \frac{3}{2x}$; р) $\frac{2c^2}{3ab} + \frac{1-c^2}{3ab}$; д) $\frac{2x}{x+2} + \frac{6}{x+2} + \frac{x}{x+2}$.

187. Знайдіть різницю дробів:

а) $\frac{2c}{3ax} - \frac{c}{3ax}$; б) $\frac{7x}{6ab} - \frac{x}{6ab}$; в) $\frac{2a}{a-3} - \frac{6}{a-3}$;

г) $\frac{4x+1}{3x-2} - \frac{x-3}{3x-2}$; р) $\frac{a^2}{a-c} - \frac{c^2}{a-c}$; д) $\frac{x^2+1}{(x-1)^2} - \frac{2x}{(x-1)^2}$.

Подайте у вигляді дробу вираз (188—189).

188. а) $\frac{x}{3a} + \frac{y}{3a}$; б) $\frac{1}{-5x} + \frac{a}{-5x}$; в) $\frac{1}{4m} + \frac{3}{4m} + \frac{5}{4m}$;

г) $\frac{1}{9a} - \frac{c}{9a}$; р) $\frac{x+m}{2m} - \frac{x}{2m}$; д) $\frac{x+3}{0,5c} - \frac{9}{0,5c}$.

189. а) $\frac{a}{a+x} + \frac{2x}{a+x} - \frac{x}{a+x}$; б) $\frac{2c}{c-x} - \frac{c}{c-x} - \frac{x}{c-x}$;

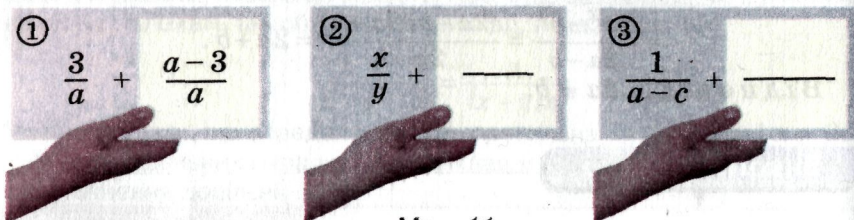
в) $\frac{m+c}{2x} + \frac{m-c}{2x}$; г) $\frac{2x}{0,5a} - \frac{x-c}{0,5a} - \frac{c}{0,5a}$.

190. Спростіть вираз:

а) $\frac{1}{2x} + \frac{3}{2x} - \frac{2}{2x}$; б) $\frac{a}{7m} + \frac{2a}{7m} + \frac{4a}{7m}$;

в) $\frac{3}{5ac} - \frac{2}{5ac} + \frac{4}{5ac}$; г) $\frac{5}{3am} - \frac{2,5}{3am} + \frac{0,5}{3am}$.

191. Який дріб слід записати у рамку на картці, щоб у сумі з написаним дробом одержати номер картки (мал. 11)?



Мал. 11

Рівень **A**

Подайте у вигляді дробу або одночлена вираз (192–196).

192. а) $\frac{2a}{a-c} - \frac{a}{a-c} - \frac{c}{a-c}$; б) $\frac{3a}{a^2-1} - \frac{2a}{a^2-1} + \frac{1}{a^2-1}$;
 в) $\frac{3x+y}{x+y+z} + \frac{z-2x}{x+y+z}$; г) $\frac{2a-b}{a+b-c} - \frac{a-2b+c}{a+b-c}$.
 193. а) $\frac{1-a}{1-c^2} + \frac{a-3}{1-c^2} - \frac{c-3}{1-c^2}$; б) $\frac{a^2-c^3}{a-c} + \frac{c^3-a^3}{a-c} + \frac{a^3-a^2}{a-c}$.

194. а) $\frac{a+b-c}{3abc} + \frac{a-b+c}{3abc} + \frac{b-a+c}{3abc}$;
 б) $\frac{x+y-z}{x+y+z} + \frac{x-y+z}{x+y+z} + \frac{-x+y+z}{x+y+z}$.

195. а) $\frac{2}{3a} + \frac{4}{3a} - \frac{6-a^2}{3a}$; б) $\frac{2a+3}{5b} + \frac{2a-9}{5b} + \frac{a+1}{5b}$;
 в) $\frac{x^2}{x+1} + \frac{2x-1}{x+1} + \frac{1-x}{x+1}$; г) $\frac{2(m+n)}{m-n} - \frac{m}{m-n} - \frac{m}{m-n}$.

196. а) $\frac{5x}{2y} - \frac{x+y}{2y} + \frac{2x+y}{2y}$; б) $\frac{2a^2}{a+b} + \frac{ab}{a+b} - \frac{a^2}{a+b}$;
 в) $\frac{2a-5}{2a-3} + \frac{a-2}{2a-3} - \frac{a-4}{2a-3}$; г) $\frac{x^3}{x^2-4} - \frac{x^3-x}{x^2-4} - \frac{2}{x^2-4}$.

197. Доведіть тотожність:

- а) $\frac{a}{a+c} + \frac{c}{a+c} = 1$; б) $\frac{a}{a-c} - \frac{c}{a-c} = 1$;
 в) $\frac{x(1+y)}{x-y} - \frac{y(1+x)}{x-y} = 1$; г) $\frac{a(b-1)}{a-b} - \frac{b(a-1)}{a-b} = -1$.

98. Спростіть вираз:

$$a) \frac{a^2}{a+3} - \frac{9}{a+3};$$

$$б) \frac{2}{m^2-4} + \frac{m}{m^2-4};$$

$$в) \frac{5a-1}{a^2-b^2} - \frac{5b-1}{a^2-b^2};$$

$$г) \frac{a^2-30}{a-5} + \frac{5}{a-5}.$$

99. Спростіть ліву частину рівняння і знайдіть його корені:

$$a) \frac{x}{x+5} - \frac{3}{x+5} = 0;$$

$$б) \frac{2x+3}{5x} + \frac{3x+2}{5x} = 0;$$

$$в) \frac{2x}{x+3} + \frac{6}{x+3} = 0;$$

$$г) \frac{1}{x^2-x} - \frac{x+1}{x^2-x} = 0.$$

100. Розв'яжіть рівняння:

$$a) \frac{8}{3x} + \frac{2x}{3x} = 0;$$

$$б) \frac{x}{x-2} - \frac{2}{x-2} = 0;$$

$$в) \frac{x-5}{x^2-25} - \frac{x}{x^2-25} = 0;$$

$$г) \frac{5x-1}{2x+5} + \frac{2x+15}{2x+5} = 0.$$

ведіть до спільного знаменника вирази (201–202).

$$01. a) \frac{3}{2x} \text{ і } \frac{1}{3x}; \quad б) \frac{a}{4c} \text{ і } \frac{c}{4a}; \quad в) \frac{35}{9a^2} \text{ і } \frac{7}{12a};$$

$$г) \frac{4}{a^3} \text{ і } \frac{7}{a^2b}; \quad р) \frac{1}{x^2y} \text{ і } \frac{1}{y^2z}; \quad д) \frac{2}{3ax^2} \text{ і } \frac{a}{6bx^2}.$$

$$02. a) \frac{1}{a^2-x^2} \text{ і } \frac{2}{a+x}; \quad б) \frac{a}{a-c} \text{ і } \frac{c}{a^2-c^2}; \quad в) \frac{a}{45b} \text{ і } \frac{b}{18a};$$

$$г) \frac{2c}{c^3-cz^2} \text{ і } \frac{3z}{c^2+cz}; \quad р) \frac{x}{a(x+a)^2} \text{ і } \frac{a}{x(x+a)}; \quad д) \frac{3x}{56a^3} \text{ і } \frac{x^2}{63a}.$$

використовуючи формули $\frac{M}{A-B} = \frac{-M}{B-A}$ або $(A-B)^2 =$

$(B-A)^2$, зведіть до спільного знаменника дробу (203–204).

$$03. a) \frac{1}{a-c} \text{ і } \frac{3}{c-a}; \quad б) \frac{x}{x-y} \text{ і } \frac{1-y}{y-x}; \quad в) \frac{-5}{a^2-4} \text{ і } \frac{a}{4-a^2}.$$

$$04. a) \frac{4ax}{a+x} \text{ і } \frac{5x}{x^2-a^2}; \quad б) \frac{3x}{x-1} \text{ і } \frac{1}{(1-x)^2};$$

$$в) \frac{4}{35(x-2)} \text{ і } \frac{x}{14-7x}; \quad г) \frac{1}{c-a}, \frac{2}{a-c} \text{ і } \frac{3}{(a-c)^2}.$$

205. Додайте дробі:


а) $\frac{1}{x} + \frac{3}{2x}$; б) $\frac{a}{c} + \frac{3-a}{4c}$; в) $\frac{a+x}{2x} + \frac{x-a}{3x}$;

г) $\frac{1}{a+b} + \frac{3}{x(a+b)}$; г) $\frac{a-c}{c} + \frac{-a^2}{c(a-c)}$; д) $\frac{1}{2a^2bx^3} + \frac{5}{3ax^4}$

206. Знайдіть різницю дробів:

а) $\frac{4a}{ax^2} - \frac{5}{ax}$; б) $\frac{1}{c} - \frac{1}{a-c}$; в) $\frac{x^2-m}{m(x+m)} - \frac{x}{m}$;


г) $\frac{3}{a-b} - \frac{2}{a+b}$; г) $\frac{x^2}{(a+x)^2} - \frac{x}{a+x}$; д) $\frac{x}{3a^2b^3c} - \frac{2}{5abc^3}$

 **207.** Знайдіть суму і різницю дробів:


а) $\frac{1}{3cx} + \frac{c-x}{3c^2x}$; б) $\frac{a^2}{(a-b)^2} - \frac{a}{a-b}$; в) $\frac{3}{c(x-y)} - \frac{2}{x^2-xy}$

Виконайте дії (208–211).

208. а) $\frac{1}{2x} + \frac{4}{x+2}$; б) $\frac{2}{3c} - \frac{1}{c-3}$; в) $\frac{2}{a-x} - \frac{1}{ax}$.

 **209.** а) $\frac{6}{4x-5y} - \frac{3}{2x}$; б) $\frac{3}{4} - \frac{x+2}{4-3x}$; в) $\frac{7+2x}{5-3x} + \frac{2}{3}$.


210. а) $\frac{a+b}{c} + 1$; б) $m + \frac{3c-m^2}{m-c}$; в) $5 - \frac{3x^2}{a-x^2}$.

 **211.** а) $a + \frac{1-a^2}{a}$; б) $2c - \frac{2c}{c-1}$; в) $x^2 - \frac{x^3}{a+x}$.

212. Доведіть, що значення виразу не залежить від значення змінної:

а) $\frac{5x-3}{4x+4} - \frac{4x-2}{3x+3}$; б) $\frac{3m-2}{8+4m} - \frac{2m-2}{6+3m}$.

Розв'яжіть рівняння (213–214).

 **213.** а) $\frac{5}{2x+1} - \frac{5}{3x-2} = 0$; б) $\frac{3}{1+2x} + \frac{2}{1-x} = 0$;

в) $\frac{3x-7}{x-5} + \frac{x+3}{5-x} = 0$; г) $\frac{1}{1+x} - \frac{x}{1-x^2} = 0$.

4. а) $\frac{3a-1}{3a^2} - \frac{2+a}{2a} = 0;$

б) $\frac{a}{3a-3} - \frac{5}{2-2a} = 0;$

в) $\frac{m}{(m+3)^2} + \frac{2}{m+3} = 0;$

г) $\frac{1+m^2}{m-m^2} + \frac{m+5}{m-1} = 0.$

Рівень Б

одайте у вигляді дробу вираз (215—218).

5. а) $\frac{4x-5y+8}{18y} + \frac{7x+3y-5}{30y} + \frac{2x+5y+3}{45y};$

б) $\frac{2a+3b}{4c} - \frac{a+2b}{6c} + \frac{4a-b}{8c} - \frac{3a-4b}{12c}.$

6. а) $\frac{x-4}{2x} - \frac{5x-7}{10x} - \frac{3x+9}{4x} + \frac{2x+5}{5x};$

б) $\frac{2a-ab+3b}{9ab} - \frac{a-2ab}{ab} - \frac{4a+ab-5b}{6ab}.$

7. а) $\frac{x+1}{x-1} - 1;$ б) $\frac{a}{3bc^2} + \frac{2b}{5ac^2} - c;$ в) $1-a + \frac{2a^2}{a+1}.$

8. а) $\frac{2}{3x+6} + \frac{x^2-x-2}{x^2-4} - 1;$ б) $1 + \frac{2m+1}{m^3-1} - \frac{m}{m-1}.$

простіть вираз (219—228).

9. а) $\frac{9x^2+4y^2}{12x^2y-8xy} + \frac{3x}{2xy-3x^2};$ б) $\frac{2a+1}{6-3a} - \frac{a+3}{6a-12} + \frac{2a+1}{2a-4}.$

10. а) $\frac{6a-4b}{4ab-2b^2} + \frac{8a-3b}{8a^2-4ab};$ б) $\frac{x-1}{2x+2} - \frac{3x-4}{3x+3} + \frac{2x-1}{6x+6}.$

11. а) $\frac{5}{a-1} - \frac{8}{1+a} + \frac{3a+7}{a^2-1};$ б) $\frac{1}{x} + \frac{x+1}{x^2-x} - \frac{x-1}{x^2-x}.$

12. а) $\frac{2}{x+1} + \frac{5}{x-1} - \frac{5}{x+2};$ б) $\frac{2}{(a+1)^3} + \frac{1}{(a+1)^2} - \frac{2}{1-a}.$

13. а) $\frac{2x-3}{3x-3} - \frac{3x-1}{4x+4} - \frac{x+2}{x^2-1};$ б) $\frac{7}{a+b} + \frac{3a^2-2b^2}{a^2-b^2} - 3 - \frac{5}{a-b}.$

$$224. \text{ а) } \frac{2}{a} + \frac{3}{x-2a} - \frac{2a-3x}{4a^2-x^2}; \quad \text{ б) } \frac{1}{a-2} + \frac{3}{a+2} + \frac{2a}{(a+2)^2}.$$

$$\text{225. а) } \frac{2}{x+4} - \frac{x-3}{x^2-4x+16} - \frac{x^2-9x}{x^3+64};$$

$$226. \text{ а) } \frac{1}{2a-3x} - \frac{2a+3x}{4a^2+6ax+9x^2} - \frac{6ax}{8a^3-27x^3}.$$

$$\text{227. а) } \frac{3}{(x-a)(x-c)} + \frac{2}{(x-a)(c-a)} - \frac{2}{(c-x)(a-c)};$$

$$228. \text{ а) } \frac{a+b}{(b-c)(c-a)} + \frac{b+c}{(c-a)(a-b)} + \frac{c+a}{(a-b)(b-c)}.$$

229. Знайдіть значення виразу:

$$\text{а) } \frac{2a}{1-a^2} + \frac{a+1}{2a-2} - \frac{a-1}{3a+3}, \text{ якщо } a = 3;$$

$$\text{б) } \frac{x+2}{x} - \frac{x}{x-2} + \frac{x+2}{x^2-2x}, \text{ якщо } x = \frac{1}{5};$$

$$\text{в) } \frac{1}{x} + \frac{x+2y}{x^2-2xy} - \frac{4x}{x^2-4y^2}, \text{ якщо } x = 2, y = 3;$$

$$\text{г) } \frac{x-3}{x^2+3x} - \frac{x+3}{x^2-3x} - \frac{4x}{x^2-9}, \text{ якщо } x = 7.$$

230. Подайте дріб у вигляді суми дробів:

$$\text{а) } \frac{2x+9}{12x^2}; \quad \text{б) } \frac{4a^2+5b^2}{10ab}; \quad \text{в) } \frac{6a^2+3b^2+ab}{ab(2a^2+b^2)}.$$

231. Подайте дріб у вигляді суми цілого і дробового виразів

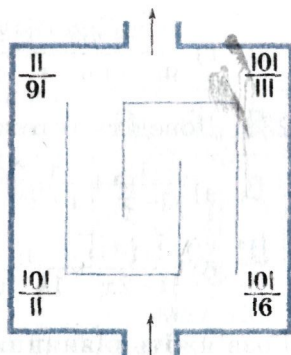
$$\text{а) } \frac{10x^2-y^2}{5x^2}; \quad \text{б) } \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}; \quad \text{в) } \frac{x^3-xy+y^3}{x^2-xy+y^2}.$$

232. Доведіть тотожність:

$$\text{а) } \frac{m}{m+n} + \frac{2mn}{m^2-n^2} - \frac{n}{m-n} = 1;$$

$$\text{б) } \frac{x^3}{x^2-4} - \frac{x}{x-2} - \frac{2}{x+2} = x-1.$$

33. Для кмітливих. Пройдіть через лабіринт так, щоб перетнути дробі, сума яких дорівнює 2. Не можна проходити двічі один і той самий відрізок шляху або перетинати пройдену лінію (мал. 12).



Мал. 12

34. Доведіть, що значення виразу

$$\frac{7x^2+4}{3x^2+3} - \frac{5x^2+3}{2x^2+2} \text{ не залежить від значення } x.$$

35. Доведіть, що значення виразу не може бути від'ємним числом:

$$\text{а) } \frac{2b^2}{a^2+2} - \frac{4b}{a^2+2} + \frac{2}{a^2+2}; \quad \text{б) } \frac{4y^2}{x^2+1} + \frac{12y}{1+x^2} + \frac{9}{x^2+1};$$

$$\text{в) } \frac{1}{(1-m)^2} + \frac{3m}{(m-1)^2} + \frac{m}{m-1}; \quad \text{г) } \frac{10x}{(x-2)^2} + \frac{6(x+4)}{(2-x)^2} + \frac{4x}{x-2}.$$

36. Доведіть, що при кожному допустимому a значення вира-

$$\text{зу } \frac{a^3+3a}{a+2} - \frac{3a^2-14a+16}{a^2-4} + 2a \text{ є додатним числом.}$$

37. Доведіть тотожність:

$$\text{а) } \frac{a^2-x^2}{a-x} = a+x; \quad \text{б) } \frac{a^3-x^3}{a-x} = a^2+ax+x^2;$$

$$\text{в) } \frac{a^4-x^4}{a-x} = a^3+a^2x+ax^2+x^3;$$

$$\text{г) } \frac{a^5-x^5}{a-x} = a^4+a^3x+a^2x^2+ax^3+x^4.$$

38. Виконайте дії:

$$\text{а) } \frac{1}{x^2+3xy} + \frac{2}{9y^2-x^2} + \frac{1}{2x-6y};$$

$$\text{б) } \frac{7-x^2}{x^3-1} + \frac{3x+5}{x^2+x+1} + \frac{2}{1-x};$$

$$\text{в) } \frac{3-b}{b-2} - \frac{b+4}{2b^3-8b} + \frac{b+3}{b+2} - \frac{b}{b^2-4};$$

$$\text{г) } \frac{3a+2}{9a^2-6a+4} - \frac{18a}{27a^3+8} - \frac{1}{3a+2}.$$

239. Доведіть тотожність:

$$\text{а) } \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} = \frac{8}{1-x^8};$$

$$\text{б) } \frac{1}{1-2x} + \frac{1}{1+2x} + \frac{2}{1+4x^2} + \frac{4}{1+16x^4} = \frac{8}{1-256x^8}.$$

Розв'яжіть рівняння (240—243).



$$\text{240. а) } \frac{x-25}{5x-25} - \frac{3x+5}{5x-x^2} = 0; \quad \text{б) } \frac{6}{x^2-6x} + \frac{12+x}{6x-36} = 0;$$

$$\text{в) } \frac{x^2-6x}{x^2-4} + \frac{x}{x-2} = 0; \quad \text{г) } \frac{x+3}{x^2-1} - \frac{x-1}{x^2+x} = 0.$$