

§15. ДІЙСНІ ЧИСЛА

Відомі вам досі числа — цілі й дробові, додатні й від'ємні — становлять множину *раціональних*



2 3

Час

Мал. 40

с

від'ємних, рухаючись з тією самою швидкістю?

1

Ці числа — нераціональні.

Числа, які зображаються нескінченними неперіодичними десятковими дробами, називають *іраціональними*. Іраціональний — значить не раціональний (латинське *ir* відповідає заперечувальній частці *ne*).

♦ Іраціональні числа разом з раціональними утворюють множину дійсних чисел.

Множини натуральних, цілих, раціональних і дійсних чисел позначають відповідно буквами N , Z , Q і R . Кожна з цих множин є підмножиною (частиною) наступної множини (мал. 41). Кожне натуральне число є водночас і цілим, і раціональним, і дійсним. Кожне ціле число є також раціональним і дійсним. Наприклад, усі числа

12 , -3 , $\frac{2}{7}$, $\sqrt{10}$ — дійсні, три перших — раціональні, два перших — цілі і тільки число 12 — натуральне.

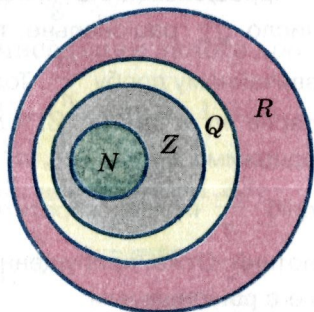
Дійсні числа, записані у вигляді нескінченних десяткових дробів, порівнюють за тим самим правилом, що й десяткові дробі. Наприклад, число $3,131313\dots$ менше від $4,0111\dots$, і від $3,25$, і від π , але більше від $3,1222\dots$, від -2 , від 0 .

Дійсні числа можна додавати, віднімати, множити, підносити до степеня і ділити (на числа, відмінні від 0). Для додавання і множення їх справедливі переставний, сполучений і розподільний закони.

Наприклад,

$$\begin{aligned}\sqrt{2} + \pi &= \pi + \sqrt{2}, & (3 + \pi) + \sqrt{5} &= 3 + (\pi + \sqrt{5}), \\ \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} &= \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}, & (\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}) \cdot \sqrt{8} &= \sqrt{5} \cdot (\sqrt{20} \cdot \sqrt{8}), \\ \pi \cdot (1,020202\dots + 5,12345\dots) &= \\ &= \pi \cdot 1,020202\dots + \pi \cdot 5,12345\dots\end{aligned}$$

Усі правила дій над виразами зі змінними, доведені раніше для раціональних значень змінних, справедливі і для довільних дійсних значень цих змінних. Зокрема, для будь-яких дійсних чисел правильні відомі вам властивості пропорцій, дробів, степенів.



Мал. 41

Розв'язуючи прикладні задачі, ірраціональні числа звичайно округлюють, відкидаючи їх нескінченні «хвости» десяткових знаків. Наприклад, якщо треба знайти значення суми чисел π і $\sqrt{2}$ з точністю до тисячних, пишуть:

$$\pi + \sqrt{2} \approx 3,1416 + 1,4142 \approx 4,556.$$



Хочете знати ще більше?

Ірраціональність числа $\sqrt{2}$ можна довести так. Припустимо, що число $\sqrt{2}$ раціональне, тобто дорівнює деякому не скоротному звичайному дроби $\frac{m}{n}$. Тоді: $2n^2 = m^2$, тобто число m^2 , а отже, і m — парне: $m = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Тоді, підставивши $m = 2k$ у рівність $2n^2 = m^2$, одержимо $2n^2 = 4k^2$, $n^2 = 2k^2$, число n також парне. Виходить, що дріб $\frac{m}{n}$ можна скоротити на 2. А припускалось, що цей дріб не скоротний. Отже, припущення приводить до протиріччя, тому число $\sqrt{2}$ не є раціональним.

Доведіть таким способом, що числа $\sqrt{3}$ і $\sqrt{5}$ — ірраціональні.

Перевірте себе

1. Які числа називають дійсними?
2. Які числа називають раціональними, які — ірраціональними?
3. Наведіть приклади ірраціональних чисел.
4. Чи бувають ірраціональні числа від'ємними?
5. Чи є число 0 цілим, раціональним, дійсним?
6. Які дії можна виконувати над ірраціональними числами? А над дійсними числами?
7. Чи завжди сума, різниця, добуток або частка двох ірраціональних чисел є числом ірраціональним?



Виконаємо разом!

1. Подайте у вигляді десяткового дроби: а) $\frac{3}{8}$; б) $\frac{5}{11}$; в) $\frac{13}{6}$.

✓ **Розв'язання.** а) Щоб перетворити звичайний дріб у десятковий, потрібно чисельник даного дроби поділити на його знаменник. Маємо:

а) $\frac{3}{8} = 0,375$; б) $\frac{5}{11} = 0,4545\dots = 0,(45)$;

в) $\frac{13}{6} = 2,1666\dots = 2,1(6)$.

Відповідь: а) 0,375; б) 0,(45); в) 2,1(6).

2. Порівняйте числа:

а) $-\frac{4}{3} \text{ і } -1,33$; б) $-\frac{4}{3} \text{ і } -1,34$; в) $-\frac{4}{3} \text{ і } -1,333\dots$

✓ Розв'язання. а) Поділивши чисельник даного дробу $\frac{4}{3}$ на знаменник, одержимо $1,333\dots$. Число $1,333\dots$

більше від $1,33$. Тому $-1,333\dots < -1,33$, або $-\frac{4}{3} < -1,33$;

б) $1,333\dots < 1,34$, отже, $-\frac{4}{3} > -1,34$;

в) $\frac{4}{3} = 1,333\dots$, отже, $-\frac{4}{3} = -1,333\dots$.

Виконайте усно

668. Які з чисел 35 , -128 , π , $\sqrt{25}$, $\sqrt{10}$, $-\sqrt{0,04}$ — раціональні, які — ірраціональні, які — дійсні?

669. Яке з тверджень правильне:

а) кожне натуральне число є дійсним;

б) кожне ціле число є дійсним;

в) кожне раціональне число є дійсним;

г) кожне ірраціональне число є дійсним;

ґ) не кожне дійсне число є раціональним;

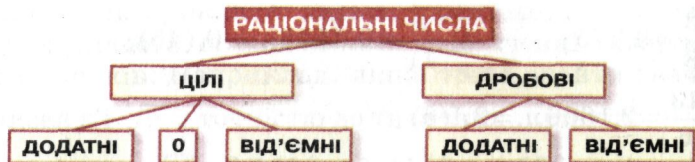
д) не кожне дійсне число є ірраціональним?

670. Укажіть правильні твердження:

2π — число дійсне, $-\pi$ — число ірраціональне,

$1 + \pi$ — число ірраціональне, $\pi : 2\pi$ — число раціональне.

671. Чи правильні схеми на малюнках 42 і 43?



Мал. 42



Мал. 43


672. Чи правильно, що:

- а) $10 \in N$; б) $11 \in Z$; в) $12 \in Q$; г) $13 \in R$?

673. Який із записів правильний:

- а) $10,5 \in N$; б) $10,6 \in Z$; в) $10,7 \in Q$; г) $10,8 \in R$;
 ґ) $\sqrt{3} \in N$; д) $\sqrt{4} \in Z$; е) $\sqrt{5} \in Q$; є) $\sqrt{6} \in R$?

Рівень А

 674. Із наведених чисел випишіть — а) цілі, б) ірраціональні:

$$5, \frac{3}{4}, \sqrt{-4}, -32, \sqrt{3}, 0,7, -\sqrt{49}, \frac{12}{3}, 0, 7\frac{1}{2}, 2\sqrt{\frac{25}{4}},$$

$$-1,1111, \sqrt{3\frac{1}{16}}.$$

675. Які з чисел $-3,5, -\sqrt{39}, 6, 1,010010001, \frac{2}{3}, \sqrt{7},$
 $-\sqrt{1024}, 5\frac{1}{3}$ є раціональними?

676. Чи є серед чисел $49, -1,21, 1, -2,5\sqrt{100}, 3, 0, \sqrt{1000}$
 а) натуральні; б) дійсні?

677. Яке з наведених чисел є ірраціональним: $\sqrt{17}, \sqrt{17,64},$

$4\sqrt{3}$, $3\sqrt{4}$, $\sqrt{2\frac{7}{9}}$, $\sqrt{2\frac{8}{9}}$, $5+\sqrt{2}$, $-0,30033000333$, π , -2π ?

678. Подайте у вигляді звичайного дробу:
а) 0,7; б) 0,53; в) 3; г) 1,25.

679. Подайте у вигляді десяткового дробу:

а) $\frac{9}{4}$; б) $\frac{2}{5}$; в) $\frac{13}{25}$; г) $\frac{17}{16}$; г) $\frac{1}{125}$.

680. Подайте у вигляді нескінченного десяткового дробу:

а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{5}{6}$; в) $\frac{16}{15}$; г) $\frac{38}{12}$; г) $\frac{1}{7}$.

681. Яке з чисел більше:

а) 0,3754 чи 1,2; б) 2,0379 чи 2,0401;
в) 2,333... чи 2,327; г) 13,777... чи 12,888...?

Порівняйте числа (682—685).

682. а) $\frac{5}{6}$ і $\frac{6}{7}$; б) $\frac{8}{3}$ і $\frac{9}{4}$; в) $-\frac{3}{8}$ і $-\frac{4}{9}$.

683. а) $\frac{2}{3}$ і 0,66; б) $\frac{2}{3}$ і 0,67; в) $\frac{2}{3}$ і 0,666... .

684. а) $\sqrt{2}$ і 1,41; б) $\sqrt{2}$ і 1,42; в) $\sqrt{2}$ і 1,414141... .

685. а) π і 3,14; б) π і $\frac{27}{7}$; в) π і $\sqrt{10}$.

Рівень Б

686. Користуючись таблицями, обчисліть з точністю до тисячних:

а) $\frac{2}{3} + \sqrt{15}$; б) $4,13 - \sqrt{10}$; в) $\sqrt{23} + \pi$;

г) $\sqrt{35} \cdot \sqrt{10}$; г) $\sqrt{45} \cdot \sqrt{20}$; д) $\pi \cdot \sqrt{5,7}$.

687. Користуючись калькулятором, обчисліть:

а) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{50}$; б) $\sqrt{40} + \sqrt{90}$; в) $\pi + \sqrt{18}$;

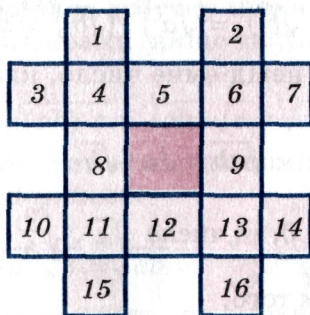
г) $3 \cdot \sqrt{30} - \frac{2}{3}$; г) $\frac{2}{3} + 2\sqrt{3}$; д) $\pi \cdot \sqrt{10} - \frac{2}{7}$.

- 688.** Подайте у вигляді нескінченного десяткового дробу:
- а) $\frac{1}{3}$; б) $-\frac{2}{15}$; в) $\frac{4}{9}$; г) $5\frac{7}{18}$.
- 689.** Яке з чисел більше:
- а) 0,257 чи 0,26; б) $-3,0973$ чи $-3,098$;
 в) 7,666... чи 7,67; г) $-0,0222...$ чи $-0,019$?
- 690.** Записи $0,(6)$ і $0,(58)$ означають нескінченні періодичні десяткові дробі $0,666...$ і $0,585858...$. Яке з цих чисел більше? Знайдіть таке раціональне число, яке менше одного з них, але більше за друге.
- 691.** Відомо, що числа a і b : 1) натуральні; 2) цілі; 3) раціональні. Яким буде в кожному з випадків 1) – 3) число:
- а) $a + b$; б) $a - b$; в) ab ; г) $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$)?
- 692.** Раціональне чи ірраціональне число $2,001001001...$, якщо група його цифр 001 нескінченно повторюється?
- 693.** Раціональне чи ірраціональне число $2,010010001...$, якщо після кожної його одиниці на один нуль більше, ніж перед нею?
- 694.** Обчисліть з точністю до тисячних:
- а) $0,5 + \sqrt{2}$; б) $\frac{1}{3} + \sqrt{10}$; в) $\pi + \sqrt{2}$;
 г) $\sqrt{10} - 0,4$; г) $\pi - \sqrt{10}$; д) $\sqrt{2} \cdot \pi$;
 е) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{2}$; е) $1 : \pi$; ж) $\pi : \sqrt{10}$.
- 695.** Користуючись калькулятором, обчисліть:
- а) $3\sqrt{20}$; б) $\sqrt{37} - 1,5$; в) $5,74 - \sqrt{74}$;
 г) $\sqrt{50} - \sqrt{30}$; г) $2\sqrt{13} + \sqrt{3}$; д) $\pi - \sqrt{37}$.
- 696.** Доведіть, що сума двох раціональних чисел — число раціональне.
- 697.** Доведіть, що добуток двох раціональних чисел — число раціональне.
- 698.** Чи правильно, що різниця двох будь-яких раціональних чисел є раціональним числом? А частка?
- 699.** Чи може сума двох ірраціональних чисел бути числом раціональним? Наведіть приклад.

700. Наведіть приклад двох ірраціональних чисел, добуток яких дорівнює раціональному числу.
701. Доведіть, що сума раціонального та ірраціонального чисел завжди є числом ірраціональним.
702. Доведіть, що ірраціональним є число:
а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\sqrt{6}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

703. Спростіть вираз:
а) $(x+4)(2x^4 - x^3 + 3x^2)$; б) $(a^3 + a^2 + a + 1)(a - 1)$.
704. а) $(x^2 - xy + y^2)(x + y)$; б) $(a^2 + ab - b^2)(a + b)$.
705. На скільки порядків число 342 000 000 більше за 4 000 000?
706. Виразіть:
а) $2,4 \cdot 10^3$ т у грамах; б) $6,23 \cdot 10^{12}$ кг у тоннах;
в) $5,4 \cdot 10^{-6}$ км у міліметрах; г) $3,8 \cdot 10^{-10}$ см у метрах.
707. Знайдіть суму, різницю, добуток і частку чисел:
а) $8 \cdot 10^9$ і $4 \cdot 10^9$; б) $4,8 \cdot 10^7$ і $4 \cdot 10^6$;
в) $6 \cdot 10^{-5}$ і $3 \cdot 10^{-5}$; г) $4,5 \cdot 10^{-6}$ і $1,5 \cdot 10^{-7}$.
708. Перенесіть у зошит малюнок 44 і переставте числа так, щоб чотири суми — в двох горизонтальних і двох вертикальних рядах — стали рівними. Знайдіть найменшу з таких сум.



Мал. 44