§20. ФОРМУЛА КОРЕНІВ КВАДРАТНОГО РІВНЯННЯ

Розв'яжемо рівняння

$$x^2 + 6x - 112 = 0,$$

яке ми склали за умовою задачі (с. 185).

Розв'язання. Якщо до виразу $x^2 + 6x$ додати 9, то одержимо квадрат двочлена $x + 3$. Тому дане рівняння рівносильне рівнянню

$$x^2 + 6x + 9 - 9 - 112 = 0, \text{ або } (x + 3)^2 = 121.$$

Отже, $x + 3 = 11$, звідки $x = 8$; або $x + 3 = -11$, звідси $x = -14$.

Відповідь. $x_1 = 8$, $x_2 = -14$.

Розглянутий спосіб розв'язування квадратного рівняння називають ***способом виділення квадрата двочлена.***

Розв'яжемо цим способом рівняння

$$5x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Щоб перший його член став квадратом одночлена з цілим коефіцієнтом, помножимо обидві частини даного рівняння на 5:

$$25x^2 - 10x - 15 = 0,$$

$$25x^2 - 2 \cdot 5x + 1 - 1 - 15 = 0, \quad (5x - 1)^2 = 16.$$

Отже, $5x - 1 = 4$, звідси $5x = 5$, $x = 1$; або $5x - 1 = -4$, звідси $5x = -3$, $x = -0{,}6$.

Відповідь. $x_1 = 1$, $x_2 = -0{,}6$.

Розв'яжемо таким способом рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Помножимо обидві частини рівняння на $4a$ (пам'ятаємо, що $a \neq 0$):

$$4a^2x^2 + 4ax \cdot b + 4ac = 0,$$

$$(2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b + b^2 - b^2 + 4ac = 0,$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Вираз $b^2 - 4ac$ називають *дискримінантом* (від латинського *discriminans* — розрізняючий) **даного квадратного рівняння і позначають буквою D.**

Якщо $D < 0$, то дане рівняння не має коренів: не існує такого значення x, при якому значення виразу $(2ax + b)^2$ було б від'ємним.

Якщо $D = 0$, то $2ax + b = 0$, звідси $x = -\frac{b}{2a}$ — єдиний корінь.

Якщо $D > 0$, то дане квадратне рівняння рівносильне рівнянню $(2ax+b)^2 = (\sqrt{D})^2$, звідси

$$2ax+b=\sqrt{D}\ ,\ x=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$$

або $$2ax+b=-\sqrt{D}\ ,\ x=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\ .$$

У цьому випадку дане рівняння має два корені, які відрізняються тільки знаками перед $\sqrt{D}$. Коротко записують їх так:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}\ ,\ \text{де}\ D=b^2-4ac.$$

Це ***формула коренів квадратного рівняння*** $ax^2+bx+c=0$. Користуючись нею, можна розв'язати будь-яке квадратне рівняння.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння:

а) $3x^2 - 5x + 2 = 0$; б) $x^2 + 6x + 9 = 0$; в) $5x^2 - x + 1 = 0$.

Р о з в ' я з а н н я. а) $D = 25 - 24 = 1$, $D > 0$,

$$x=\frac{5\pm\sqrt{1}}{6}=\frac{5\pm1}{6};\ x_1=1,\ x_2=\frac{2}{3};$$

б) $D = 36 - 36 = 0$,

$$x=\frac{-6\pm0}{2}=-3;\ x_1=-3;$$

в) $D = 1 - 20 = -19$, $D < 0$. Рівняння коренів не має.

В і д п о в і д ь. а) $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{2}{3}$; б) $x = -3$; в) рівняння коренів не має.

Формулу коренів квадратного рівняння використовують для розв'язування багатьох рівнянь, які зводяться до квадратних.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння:

а) $4x^4 - 9x^2 + 5 = 0$; б) $(3x^2 - x - 3)(3x^2 - x + 5) = 9$.

Р о з в ' я з а н н я. Такі рівняння зручно розв'язувати шляхом уведення допоміжної змінної.

а) $4x^4 - 9x^2 + 5 = 0$. Нехай $x^2 = t$, тоді $x^4 = t^2$, одержимо рівняння відносно змінної t:

$4t^2 - 9t + 5 = 0$, $D = (-9)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = 81 - 80 = 1$, $D > 0$,

$$t_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 4} = \frac{9 \pm 1}{8},\ t_1 = \frac{9+1}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4},\ t_2 = \frac{9-1}{8} = 1.$$

Повернемося до змінної x:

1) $x^2 = 1$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$;

2) $x^2 = \frac{5}{4}$, $x_3 = -\frac{\sqrt{5}}{2}$, $x_4 = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Рівняння виду $ax^4 + bx^2 + c = 0$ називають *біквадратним*.

б) $(3x^2 - x - 3)(3x^2 - x + 5) = 9$. Нехай $3x^2 - x = t$, тоді відносно змінної t одержимо рівняння:

$(t - 3)(t + 5) = 9$, $t^2 + 2t - 15 = 9$, $t^2 + 2t - 24 = 0$,

$D = 4 - 4 \cdot (-24) = 4 + 96 = 100$, $D > 0$,

$$t_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-2 \pm 10}{2},\ t_1 = 4,\ t_2 = -6.$$

1) $3x^2 - x = -6$, $3x^2 - x + 6 = 0$, $D = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6 = -71$, $D < 0$, отже, це рівняння коренів не має.

2) $3x^2 - x = 4$, $3x^2 - x - 4 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1\frac{1}{3}$.

Відповідь. а) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -\frac{\sqrt{5}}{2}$, $x_4 = \frac{\sqrt{5}}{2}$;

б) $x_1 = -1$, $x_2 = 1\frac{1}{3}$.

Хочете знати ще більше?

Формулу коренів рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ можна записати і в такому вигляді:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Якщо другий коефіцієнт рівняння — парне число, тобто рівняння має вигляд $ax^2 + 2kx + c = 0$, то

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Якщо перший коефіцієнт квадратного рівняння дорівнює 1, то таке рівняння називають *зведеним*. Зведене квадратне рівняння має вигляд $x^2 + px + q = 0$. Формула його коренів така:

$$x_{1,2} = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Виведіть ці формули з основної формули коренів квадратного рівняння.

Перевірте себе

1. Як називають рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$?
2. Що таке дискримінант квадратного рівняння?
3. Скільки коренів має квадратне рівняння залежно від його дискримінанта?
4. Який вигляд має формула коренів квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$?
5. Яке квадратне рівняння називають зведеним?

Виконаємо разом!

1. Зведіть рівняння $(x - 4)(2x + 1) = 3x(x - 1)$ до квадратного та знайдіть його корені.

✔ Розв'язання. $(x - 4)(2x + 1) = 3x(x - 1)$. Розкриємо дужки і зведемо подібні доданки:

$$2x^2 - 8x + x - 4 = 3x^2 - 3x,$$
$$3x^2 - 2x^2 - 3x + 8x - x + 4 = 0,\ x^2 + 4x + 4 = 0.$$

Одержане рівняння розв'яжемо, зваживши на те, що в його лівій частині — квадрат двочлена: $x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = (x + 2)^2$.

Отже, $(x + 2)^2 = 0$, звідси $x + 2 = 0$, $x = -2$.

Відповідь. $x = -2$.

2. Розв'яжіть дробове раціональне рівняння:

$$\frac{x}{x-2} + \frac{2}{(x-2)(x-3)} = \frac{2}{x-3}.$$

✔ Розв'язання. $\frac{x}{x-2} + \frac{2}{(x-2)(x-3)} - \frac{2}{x-3} = 0,$

$$\frac{x(x-3) + 2 - 2(x-2)}{(x-2)(x-3)} = 0,\quad \frac{x^2 - 5x + 6}{(x-2)(x-3)} = 0.$$

Дріб дорівнює нулю, якщо чисельник дорівнює нулю, а знаменник не дорівнює нулю: $x^2 - 5x + 6 = 0$.

$D = 25 - 4 \cdot 6 = 1$, $x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2}$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

Дане рівняння ці значення не задовольняють, оскільки при $x = 2$ знаменник першого дробу дорівнює 0, а при $x = 3$ знаменник другого дробу дорівнює 0.

Відповідь. Рівняння коренів не має.

Виконайте усно

921. Обчисліть дискримінант рівняння:

а) $x^2 - 2x + 1 = 0$; б) $x^2 + 2x + 1 = 0$;

в) $y^2 - 6y + 1 = 0$; г) $z^2 + 6z - 1 = 0$;

ґ) $2x^2 - x - 1 = 0$; д) $3x^2 - 2x - 1 = 0$.

922. Скільки коренів має рівняння:

а) $x^2 - 2x + 2 = 0$; б) $x^2 + 2x + 2 = 0$;

в) $x^2 - 5x + 6 = 0$; г) $x^2 + 5x + 6 = 0$;

ґ) $x^2 - 6x + 9 = 0$; д) $x^2 + 6x + 9 = 0$?

923. Чому не має коренів рівняння:

а) $x^2 + (x - 1)^2 = 0$; б) $x^2 + |x| + 1 = 0$;

в) $3x^2 + \sqrt{2} = 0$; г) $(2x - 5)^2 + 3 = 0$?

Рівень А

Способом виділення квадрата двочлена розв'яжіть рівняння (**924 – 926**).

924. а) $x^2 - 6x + 8 = 0$; б) $x^2 - 12x + 35 = 0$;

в) $x^2 - 4x - 12 = 0$; г) $z^2 + 4z - 12 = 0$.

925. а) $x^2 - 11x + 18 = 0$; б) $y^2 - 5y - 24 = 0$;

в) $m^2 - 12m + 36 = 0$; г) $x^2 + 14x + 49 = 0$.

926. а) $x^2 + 6x - 27 = 0$; б) $x^2 - 10x + 9 = 0$;

в) $x^2 + 3x - 4 = 0$; г) $x^2 - 5x + 6 = 0$.

927. Знайдіть дискримінанти квадратних рівнянь у завданнях **924—926**.

928. Яке з рівнянь не має коренів:

а) $x^2 + x + 1 = 0$; б) $2y^2 - 3y + 2 = 0$;

в) $0{,}5x^2 + 2x + 2 = 0$; г) $8z^2 - z + 4 = 0$?

Користуючись формулою коренів, розв'яжіть рівняння (929–936).

929. а) $x^2 - 7x - 18 = 0$; б) $x^2 + 7x - 18 = 0$;
в) $x^2 + x - 6 = 0$; г) $x^2 - x - 42 = 0$.

930. а) $x^2 + 3x - 130 = 0$; б) $x^2 - 7x - 120 = 0$;
в) $4x^2 - 4x - 3 = 0$; г) $4x^2 - 4x - 15 = 0$.

931. а) $9x^2 - 12x - 5 = 0$; б) $9z^2 - 24z - 20 = 0$;
в) $2y^2 - 7y + 3 = 0$; г) $5z^2 - 8z + 3 = 0$.

932. а) $2x^2 - 7x - 30 = 0$; б) $4x^2 + 3x - 10 = 0$;
в) $9y^2 - 13y + 4 = 0$; г) $5x^2 + 31x - 28 = 0$.

933. а) $16x^2 - 24x + 27 = 0$; б) $25c^2 + 15c - 4 = 0$;
в) $6x^2 - 5x - 6 = 0$; г) $4x^2 - 19x + 12 = 0$.

934. а) $2p^2 - 7p + 6 = 0$; б) $10m^2 - 53m + 15 = 0$;
в) $6x^2 - 12{,}5x + 6 = 0$; г) $8x^2 - 8{,}8x + 2{,}1 = 0$.

935. а) $10y^2 - 0{,}8y = 1{,}92$; б) $4n^2 + 11n + 7{,}36 = 0$;
в) $6x^2 - \frac{19x}{6} - 1 = 0$; г) $6x^2 - 25\frac{1}{2}x + 26\frac{1}{4} = 0$.

936. а) $5x^2 - 7\frac{1}{6}x + 2\frac{1}{2} = 0$; б) $\frac{x^2}{2} - 2\frac{1}{2}x - 7 = 0$;
в) $2y^2 + 3\frac{1}{3}y = 18\frac{2}{3}$; г) $\frac{x^2}{4} + \frac{x}{9} = 1\frac{2}{9}$.

Розв'яжіть рівняння, що зводиться до квадратного (937–950).

937. а) $4x(x - 1) = 3$; б) $4z(z - 1) = 15$;
в) $3x(3x - 8) = 20$; г) $3y(3y - 4) = 5$.

938. а) $(2x - 3)^2 = 8x$; б) $(2x + 1)^2 = 3x + 4$;
в) $2(3z + 9) = (2z + 5)^2$; г) $12(3 - x) = (3x - 1)^2$.

939. а) $x(7 - x) = 5x - 8$; б) $2x(3x + 4) = 4x^2 + 5x + 27$.

940. а) $3x(2x - 5) = 2(x^2 + 2)$; б) $3x(5x + 3) = 2x(6x + 5) + 2$.

941. а) $(x - 5)^2 = 3x + 25$; б) $(x + 4)^2 = 3x^2 - 8$;
в) $(p - 3)^2 = 2(p + 1)$; г) $(3c - 5)^2 = 10c + 9$.

942. а) $(2x + 4)^2 = 11x^2 + 1$; б) $(9 - 4x)^2 = 5(4x + 1)$;
в) $x^2 + 1 = 625 - 2x$; г) $y^2 + 4 = 961 + 4y$.

943. а) $(x + 4)(2x - 3) - (5x - 6)(x - 3) = 10$;
б) $(2x - 8)(3x + 1) = (4x - 12)(x - 2) + 8$.

944. а) $x+3=\frac{x+3}{x}$; б) $\frac{2c^2}{c-1}=c-2$.

945. а) $\frac{16}{x+2}=x$; б) $y=\frac{18}{y-3}$.

946. а) $\frac{z+2}{z}=\frac{5z+1}{z+1}$; б) $\frac{5}{5-m}=\frac{m^2-6m}{m-5}$.

947. а) $\frac{x-5}{x+3}=\frac{3+2x}{2x-1}$; б) $\frac{2x-1}{3-2x}=\frac{x-1}{2x+3}$.

948. а) $x^4-5x^2+4=0$; б) $x^4+5x^2+4=0$;
в) $x^4-x^2-6=0$; г) $x^4+x^2-6=0$.

949. а) $x^4-8x^2-9=0$; б) $x^4+8x^2-9=0$;
в) $x^4-6x^2+5=0$; г) $x^4+6x^2+5=0$.

950. а) $4x^4-3x^2-1=0$; б) $4x^4+3x^2-1=0$;
в) $9x^4-10x^2+1=0$; г) $9x^4+10x^2+1=0$.

951. Складіть рівняння виду $(x-a)(x-b)=0$, корені якого:
а) 2 і 3; б) 1 і 5; в) 3 і -2; г) -2 і -6.

952. Складіть квадратне рівняння, корені якого:
а) 2 і 5; б) 3 і -7; в) 0,5 і 4; г) $-0{,}2$ і -8.

953. Один корінь квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$ дорівнює 1. Чому дорівнює $a+b+c$?

Рівень Б

Розв'яжіть рівняння способом виділення квадрата двочлена (**954 – 955**).

954. а) $4x^2+4x-15=0$; б) $9y^2+18y+8=0$;
в) $6x^2-13x+6=0$; г) $5x^2+31x-28=0$.

955. а) $2z^2=9z-10$; б) $8=3y+5y^2$;
в) $3x^2+4x-7=0$; г) $5x^2+3x+2=0$.

956. Розв'яжіть рівняння, розклавши його ліву частину на множники:
а) $x^2+5x+4=0$; б) $x^2+5x+6=0$;
в) $x^2-8x+15=0$; г) $x^2-x-6=0$.

957. При яких значеннях змінної x правильна рівність:

а) $(3x+1)^2 = 3x+1$; б) $(3x+1)^2 = 3(x+1)$;

в) $4(3x+1)^2 = (6x+2)^2$; г) $(3x+1)^2 = 3x^2+x$?

Розв'яжіть рівняння (**958—973**).

958. а) $(2{,}5x-7)(2x+3)+3x+4 = (4x-9)(1{,}5x+1)$;

б) $(3z-5)(4z+1)+(2z+3)(5z-4) = 6z(3+2z)-11$.

959. а) $(2t-3)(5t+2)+(3t-1)(4t+2) = 10t^2-5$;

б) $(3n-2)(3n+2)-(2n-3)^2 = 3n(n+7)-17$.

960. а) $\dfrac{1+3x}{2+x}+\dfrac{x-1}{2-x}=1$; б) $\dfrac{2y-2}{y+3}-\dfrac{3y-y}{3-y}=6$.

961. а) $\dfrac{c-6}{c+5}-2=\dfrac{c-4}{5-c}$; б) $\dfrac{7}{2x-3}+\dfrac{5}{x-1}=12$.

962. а) $\dfrac{7}{x+2}-\dfrac{3}{2-x}=\dfrac{16}{x}$; б) $\dfrac{5}{z-2}-\dfrac{4}{z-3}=\dfrac{1}{z}$.

963. а) $\dfrac{3}{2x-1}-\dfrac{39}{2x+1}+\dfrac{45}{4x^2-1}=5$;

б) $\dfrac{2(x+7)}{x+1}-\dfrac{x+11}{x^2-1}+\dfrac{x-1}{x+1}=4$.

964. а) $\dfrac{30}{x^2-1}-\dfrac{13}{x^2+x+1}-\dfrac{7+18x}{x^3-1}=0$;

б) $\dfrac{x+6}{x-1}-\dfrac{x^2-x+16}{x^2+x+1}=\dfrac{x+36}{x^3-1}$.

965. а) $\dfrac{x+1}{4x}-\dfrac{8-x}{3x^2-6x}=\dfrac{5x-1}{2x-4}$; б) $\dfrac{3-2x}{5-x}+\dfrac{3}{3-x}-\dfrac{x+3}{x+1}=1$.

966. а) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x^2-3x+2}=\dfrac{2x-7}{x^2-9x+14}$;

б) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^2+9x+18}=\dfrac{2x+7}{x^2+5x-6}$.

967. а) $\dfrac{5x-7}{9}+\dfrac{14}{2x-3}=x-1$; б) $\dfrac{x-4}{12}+\dfrac{2x-22}{x-6}=\dfrac{16-x}{4}$.

968. а) $\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{6}{x^2-7x+10}=\dfrac{2}{x-5}$;

б) $\dfrac{2}{x-7}=\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{10}{(x-2)(x-7)}$.

969. а) $\dfrac{2z-3}{z-2}+\dfrac{z+1}{z-1}=\dfrac{3z+11}{z+1}$; б) $\dfrac{3c+1}{c-3}+\dfrac{2c-1}{c-2}=\dfrac{5c-14}{c-4}$.

970. а) $(x+1)^2=7918-2x$; б) $(x+2)^2=3131-2x$.

$\dfrac{x}{3}=x-1$; б) $\dfrac{}{12}+\dfrac{}{x-6}=\dfrac{x}{4}$.

967. а) $\dfrac{}{9}+\dfrac{}{2x-}$