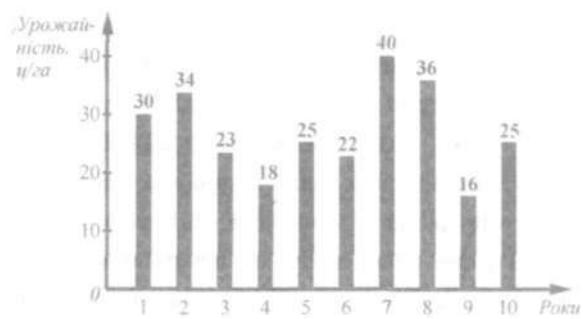


ЕЛЕМЕНТИ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

Жодної достовірності немає в науках там, де не можна застосувати жодну з математичних наук, і в тому, що не має зв'язку з математикою.

Леонардо да Вінчі

У цьому параграфі ми пригадаємо прикладні застосування математики, а також з'ясуємо, що таке випадкова подія, ймовірність випадкової події, що вивчає математична статистика.



17. Математичне моделювання

Вам, мабуть, уже доводилося бачити моделі човна, літака, автомобіля, виготовляти моделі куба, прямокутного паралелепіпеда. Кожна модель, залежно від її призначення, відображає певні властивості оригіналу.

Математична модель — це опис якогось реального об'єкта чи процесу мовою математики.

У попередніх класах для моделювання реальних процесів ми використовували рівняння, нерівності, системи рівнянь і нерівностей, функції тощо.

Розв'язування задач з будь-якої галузі з використанням математики передбачає такі три кроки:

- 1) формулюють задачу мовою математики, тобто будують математичну модель;

- 2) розв'язують одержану математичну задачу;

- 3) записують математичний розв'язок мовою, якою була сформульована початкова задача.

Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 1. Знайти, скільки потрібно квадратних плиток зі стороною 15 см, щоб застелити підлогу ванної кімнати, розміри якої $3,3 \text{ м} \times 2,8 \text{ м}$.

Побудуємо математичну модель задачі. Нехай для застелення підлоги потрібно x плиток. Площа однієї плитки дорівнює $0,15 \cdot 0,15 = 0,0225 (\text{м}^2)$, площа x плиток — $0,0225x \text{ м}^2$, а площа підлоги — $3,3 \cdot 2,8 = 9,24 (\text{м}^2)$. Площа усіх плиток має бути не меншою від площи підлоги:

$$0,0225x \geq 9,24.$$

Одержані нерівність і є математичною моделлю задачі.

Розв'яжемо математичну задачу, тобто нерівність:

$$0,0225x \geq 9,24; \quad x \geq 9,24 : 0,0225; \quad x \geq 410,6.$$

Запишемо одержаний результат мовою вихідної задачі: щоб застелити підлогу, потрібно не менше ніж 411 плиток.

В умові даної задачі використано нематематичні поняття. Такі задачі називають *прикладними*. Числове значення відповіді для прикладних задач здебільшого буває наближеним.

Приклад 2. На реостат подали напругу 22 В. Коли напругу збільшили на 10%, а опір реостата зменшили на 9 Ом, то сила струму в реостаті збільшилася на 1,1 А. Знайти початковий опір реостата.

Побудуємо математичну модель задачі. Нехай початковий опір реостата дорівнював x Ом, а початкова сила струму — y А. Оскільки початкова напруга дорівнювала 22 В, то $22 = ux$ ($U = IR$ — закон Ома для ділянки кола).

Коли напруга стала $22 \cdot 1,1 = 24,2$ (В) (збільшили на 10%), а опір став $(x - 9)$ Ом, то сила струму стала $(y + 1,1)$ А. Маємо: $24,2 = (y + 1,1)(x - 9)$.

Математичною моделлю задачі є система рівнянь:

$$\begin{cases} xy = 22; \\ (x-9)(y+1,1) = 24,2. \end{cases}$$

Розв'яжемо одержану математичну задачу.

$$\begin{cases} xy = 22; \\ (x-9)(y+1,1) = 24,2; \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 22; \\ xy - 9y + 1,1x - 9,9 = 24,2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 22; \\ 22 - 9y + 1,1x - 9,9 = 24,2; \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 22; \\ 1,1x - 9y = 12,1; \end{cases} \quad \begin{cases} x \cdot \frac{1,1x - 12,1}{9} = 22; \\ y = \frac{1,1x - 12,1}{9}; \end{cases}$$

$$1,1x^2 - 12,1x = 198; \quad x^2 - 11x - 180 = 0;$$

$$x_1 = -9, \quad x_2 = 20.$$

Число -9 умову задачі не задовольняє.

Запишемо результат мовою вихідної задачі: початковий опір реостата дорівнював 20 Ом.

Приклад 3. З пункту A в пункт B виїхав велосипедист і рухався зі швидкістю 20 км/год, а через півгодини услід за ним виїхав мотоцикліст і рухався зі швидкістю 36 км/год. Через скільки часу після виїзду велосипедиста його підніже мотоцикліст?

Можна побудувати різні математичні моделі цієї задачі. Побудуємо математичну модель за допомогою графіків функцій. За t год велосипедист проїде $20t$ км, а мотоцикліст, рухаючись на 0,5 год менше, за $(t - 0,5)$ год проїде $36(t - 0,5)$ км. На рисунку 66 зображені графіки функцій $s = 20t$ і $s = 36(t - 0,5)$, які виражають залежність шляхів, пройдених велосипедистом і мотоциклістом, від часу руху велосипедиста. Щоб відповісти на запитання задачі, потрібно знайти абсцису точки перетину

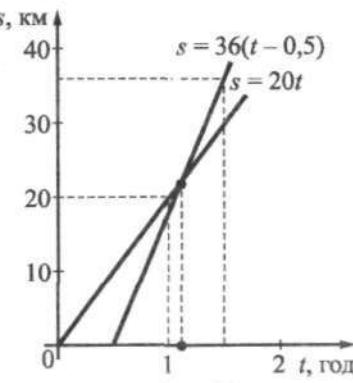


Рис. 66

ну графіків функцій. З рисунка знаходимо, що $t \approx 1,1$ год. Отже, мотоцикліст наїздожене велосипедиста приблизно через 1,1 год після виїзду велосипедиста.

Для тих, хто хоче знати більше



Історія науки знає чимало прикладів, коли в межах вдало побудованої математичної моделі за допомогою обчислень вдавалося передбачити існування нових фізичних явищ та об'єктів. Ми вже наводили один з таких прикладів: опираючись на математичні моделі, астрономи Дж. Адамс (Англія) у 1845 році та У. Левер'є (Франція) у 1846 році незалежно один від одного дійшли висновку про існування невідомої тоді ще планети і вказали її розміщення. За розрахунками У. Левер'є астроном Г. Галле (Німеччина) знайшов цю планету. Її назвали Нептуном.

Англійський фізик П. Дірак у 1928 році отримав рівняння руху електрона. З розв'язку цього рівняння випливало існування елементарної частинки, яка відрізняється від електрона лише знаком електричного заряду. Таку частинку у 1932 році відкрив фізик К. Д. Андерсон (США) і назвав її позитроном.

Метод математичного моделювання відіграє неабияку роль у корабле- та авіабудуванні, економіці тощо.

Усно

Побудуйте математичну модель задачі (503–505):

503. У залі є 400 місць для глядачів. Усі ряди містять однакову кількість місць. Скільки рядів у залі та скільки місць є в кожному ряді?
504. У залі є 400 місць для глядачів. Число рядів на 9 менше від числа місць у кожному ряді. Скільки рядів у залі та скільки місць має кожний ряд?
505. Учень купив кілька зошитів по 80 к. і витратив на покупку менше, ніж 3 грн. Скільки зошитів він міг купити?

Рівень А



Побудуйте математичну модель задачі та розв'яжіть задачу (506–525):

506. У 100 г гарбуза міститься 8 мг вітаміну С. Скільки потрібно взяти гарбуза, щоб отримати 100 мг вітаміну С?
507. Із 10 кг насіння льону виходить 3,7 кг олії. Скільки олії вийде зі 150 кг такого насіння?
508. На пошиття костюма витратили 3,2 м тканини. Яку найбільшу кількість таких костюмів можна пошити, маючи 60 м цієї ж тканини?

509. Маса 100 зернин не перевищує 80 г, а маса 50 таких же зернин не менша ніж 35 г. Якою може бути маса однієї зернини?

510. Від квадратного листа жерсті відрізали смугу завширшки 25 см. Знайдіть початкові розміри листа, якщо площа його частини, утвореної після відрізання смуги, дорівнює 4400 см^2 .

511. Автомобіль долає шлях між двома містами за 2,2 год, рухаючись зі швидкістю 60 км/год. На скільки потрібно збільшити швидкість автомобіля, щоб він подолав цей шлях за 2 год?

512. З пункту А виїхав мотоцикліст, а через 1,5 год услід за ним — автомобіль. Швидкість автомобіля дорівнює 80 км/год, а швидкість мотоцикліста — 40 км/год. Через який час після свого виїзду автомобіль наїздожне мотоцикліста?

Рівень Б



513. Шайби виготовляють із квадратних заготовок зі стороною 60 мм. Який завдовжки повинен бути лист сталі, щоб з нього можна було виготовити 52 заготовки, якщо ширина листа дорівнює 300 мм?

514. Із прямокутного листа жерсті, розміри якого $30 \text{ см} \times 48 \text{ см}$, потрібно виготовити відкриту коробку. Для цього по кутах прямокутника вирізують квадрати, а потім загинають краї листа (рис. 67). Знайдіть, якою завдовжки має бути сторона вирізаного квадрата, щоб площа дна коробки дорівнювала 1008 см^2 ?

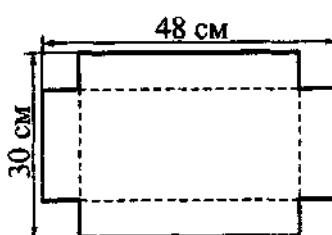


Рис. 67

515. Ширина кімнати менша від довжини на 1 м і від діагоналі — на 2 м. Знайдіть площину кімнати.

516. Комп'ютерний клуб планує працювати 9 год на день та обслуговувати 38 членів клубу. Обслуговування кожного відвідувача клубу має відбуватися щоденно за окремим комп'ютером протягом 1,5 год. Яку найменшу кількість комп'ютерів потрібно клубові, щоб обслуговувати своїх відвідувачів?

517. Вал з меншим діаметром робить за хвилину на 400 обертів більше і здійснює один оберт на 0,2 с швидше, ніж вал з більшим діаметром. Скільки обертів робить кожний вал за хвилину?

518. З першої ділянки зібрали 2880 ц пшениці, а з другої, площа якої на 12 га менша, — 2160 ц. Знайдіть площину кожної ділянки, коли відомо, що з кожного гектара першої ділянки зібрали пшениці на 4 ц більше, ніж з кожного гектара другої.

519. Катер пройшов річкою шлях від пристані A до пристані B і повернувся назад. Його швидкість у стоячій воді дорівнює 18 км/год, а швидкість течії річки — 3 км/год. Відомо, що час руху катера менший, ніж 2 год, але більший, ніж 1,5 год. Якою може бути відстань між пристанями?

Рівень В



520. Для визначення глибини підземної порожнини спелеолог кинув на дно порожнини камінь і через 4 с почув звук від його падіння. Знайдіть глибину порожнини, вважаючи, що швидкість звуку дорівнює 340 м/с, а камінь при падінні за перші t с пролітає $5t^2$ м.

521. Теплохід від Києва до Херсона йде 5 діб, а від Херсона до Києва — 7 діб. Скільки діб плистимє пліт від Києва до Херсона?

522. Під стоянку автомобілів потрібно відгородити прямокутну ділянку. Є матеріал для огорожі завдовжки 300 м. З однієї сторони ділянку має обмежувати заводська стіна. Якими мають бути сторони ділянки, щоб її площа була найбільшою?

523. Потрібно виготовити вікно у формі прямокутника, доповненого півкругом (див. рис. 68). Периметр вікна має дорівнювати $(4 + \pi)$ м. Якими мають бути сторони прямокутника, щоб вікно пропускало як-найбільше світла?

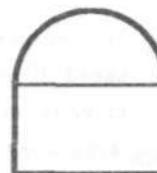


Рис. 68

524. Вантаж, загальна маса якого більша від 40 т, але менша від 60 т, мали перевезти на автомобілях, завантажуючи їх порівну. В останній момент для перевезення вантажу виділили на 2 автомобілі менше, а тому навантажили на кожний автомобіль на 1 т вантажу більше, ніж планували раніше. Знайдіть масу вантажу.

525. Сівалка обладнана ящиком, що вміщує 250 кг зерна. Якою повинна бути ширина захвату сівалки, щоб за швидкості 3,2 км/год і норми висіву 125 кг зерна на 1 га зерна у ящику вистачило б не більше ніж на 2 год роботи сівалки, а за швидкості 4 км/год і тієї ж норми висіву — не менше ніж на 1,25 год роботи?

Вправи для повторення

526. Розв'яжіть нерівність:

- a) $(2,5x + 1)(4x - 3) - 5x(2x + 7) < 4$;
б) $(3 - 4x)^2 - (8x - 1)(2x + 9) - 11 > 0$.

527. Відомо, що $5 < x < 6$ і $9 < y < 10$. Оцініть значення виразу:

- а) $2x$; б) $x - y$; в) $x + 2y$.

528. Для яких значень k графік функції $y = x^2 - 8x + 5 + k$ має з віссю x єдину спільну точку?

529. Скільки мілілітрів 50%-го розчину сульфатної кислоти потрібно змішати з 10%-м розчином цієї ж кислоти, щоб одержати 200 мілілітрів 25%-го розчину?

18. Відсоткові розрахунки. Формула складних відсотків

1. Задачі на відсотки. Ви знаєте, що відсоток — це одна сота, тобто

$$1\% = \frac{1}{100} = 0,01. \text{ Тоді:}$$

$$15\% = \frac{15}{100} = 0,15; \quad p\% = \frac{p}{100}; \quad 100\% = \frac{100}{100} = 1.$$

Ви навчилися також розв'язувати основні типи задач на відсотки, а саме — знаходити відсотки від числа, число за його відсотками, відсоткове відношення двох чисел.

Нагадаємо:

1) щоб знайти $p\%$ від числа a , потрібно число a помножити на дріб $\frac{p}{100}$;

2) щоб знайти число, $p\%$ якого дорівнюють b , потрібно число b поділити на дріб $\frac{p}{100}$;

3) щоб знайти, скільки відсотків становить число a від числа b , потрібно поділити a на b і записати результат у відсотках.

Наприклад:

1) 15% від числа 75 дорівнюють $75 \cdot \frac{15}{100} = 11,25$;

2) число, 15% якого дорівнюють 75, становить $75 : \frac{15}{100} = \frac{75 \cdot 100}{15} = 500$;

3) відсоткове відношення чисел 32 і 160 дорівнює $\frac{32}{160} = 0,2 = 20\%$.

Розглянемо складніші задачі на відсотки.

Задача 1. Зимова куртка коштувала 200 грн. З настанням весни на куртку знизили ціну на 10%, але продали лише тоді, коли нову ціну зменшили ще на 10%. На скільки відсотків ціна, за якою продали куртку, менша від початкової?

Розв'язання. Після першого зниження ціну зменшили на $200 \cdot 0,1 = 20$ (грн.), і куртка стала коштувати $200 - 20 = 180$ (грн.).

Після другого зниження ціну зменшили на $180 \cdot 0,1 = 18$ (грн.). У результаті двох знижень ціна куртки зменшилася на $20 + 18 = 38$ (грн.).

$$38 \text{ грн. від } 200 \text{ грн. становить: } \frac{38}{200} \cdot 100\% = 19\%.$$

Отже, початкову ціну зменшили на 19%.

Відповідь. 19%.

Для розв'язання цієї задачі потрібно було знаходити відсотки від числа та відсоткове відношення двох чисел. Ціну куртки після зниження на 10% можна було знайти так:

$$200 - 200 \cdot \frac{10}{100} = 200 \cdot \left(1 - \frac{10}{100}\right) = 200 \cdot 0,9 = 180 \text{ (грн.)}.$$

Якщо число a зменшили на $p\%$; то одержимо число $a \left(1 - \frac{p}{100}\right)$.

Якщо число a збільшили на $p\%$, то одержимо число $a \left(1 + \frac{p}{100}\right)$.

Задача 2. Вкладник зняв зі свого рахунку в банку 20% усіх грошей, а наступного дня він зняв 10% решти. Після цього на його рахунку залишилося 360 грн. Скільки грошей було на рахунку спочатку?

Розв'язання. Нехай на рахунку вкладника спочатку було x грн. Після першого зняття грошей на рахунку залишилося $100\% - 20\% = 80\%$ грошей початкового внеску. З нової суми було знято $80\% \cdot 0,1 = 8\%$ початкового внеску.

Вкладник зняв за два рази $20\% + 8\% = 28\%$ початкового внеску, а залишилося $100\% - 28\% = 72\%$.

$$\begin{aligned} 360 \text{ грн.} & - 72\% \\ x \text{ грн.} & - 100\% \\ x = \frac{360 \cdot 100}{72} & = 500 \text{ (грн.)} \end{aligned}$$

Відповідь. 500 грн.

Задача 3. Є два сплави із 30 і 10-відсотковим умістом міді. Скільки кілограмів кожного сплаву потрібно взяти, щоб одержати 6 кг нового сплаву із 15-відсотковим умістом міді?

Розв'язання. Нехай потрібно взяти x кг першого сплаву (із 30-відсотковим умістом міді). Тоді другого сплаву потрібно взяти $(6 - x)$ кг.

Перший сплав містить 30% міді, а другий — 10%. Тому x кг першого сплаву містять $0,3x$ кг міді, а $(6 - x)$ кг другого сплаву — $0,1(6 - x)$ кг міді. Новий сплав має містити $0,3x + 0,1(6 - x)$ кілограмів міді.

З іншого боку, 6 кг нового сплаву мають містити 15%, або $6 \cdot 0,15 = 0,9$ (кг) міді. Маємо рівняння:

$$0,3x + 0,1(6 - x) = 0,9.$$

Розв'язавши рівняння, знайдемо: $x = 1,5$.

Отже, потрібно взяти 1,5 кг першого сплаву і $6 - 1,5 = 4,5$ (кг) другого сплаву.

Відповідь. 1,5 кг; 4,5 кг.

2. Формула простих відсотків. Працівникам фінансових установ доводиться проводити розрахунки, пов'язані з нарахуванням відсоткових грошей. Розглянемо такі задачі в загальному випадку.

Нехай банк нараховує вкладникам щомісяця $p\%$ від внесеної суми. Клієнт зробив внесок у розмірі A_0 грн. Потрібно знайти, яка сума буде на його рахунку через n місяців.

Нараховуючи щомісяця по $p\%$ від A_0 грн., за n місяців банк нарахує $pn\%$

від A_0 грн. або $A_0 \cdot \frac{pn}{100}$ грн. Через n місяців клієнт матиме на рахунку

$$A_0 + A_0 \cdot \frac{pn}{100} = A_0 \left(1 + \frac{pn}{100}\right) \text{ (грн.)}.$$

Позначимо цю суму через A_n , тоді матимемо формулу

$$A_n = A_0 \left(1 + \frac{pn}{100}\right).$$

яку називають *формулою простих відсотків*. За цією формуллю проводять обчислення, пов'язані з нарахуванням пені, амортизацією (зношуваністю) механізмів, зміною ціни тощо.

3. Формула складних відсотків. Нехай вкладник вніс до банку A_0 грн. під $p\%$ річних. Суму A_0 грн. називають *початковим капіталом*.

Через рік банк нарахує йому $p\%$, або $A_0 \cdot \frac{p}{100}$ грн. відсоткових грошей.

Отже, на рахунку вкладника стане на $p\%$ грошей більше, а саме:

$$A_0 + A_0 \cdot \frac{p}{100} = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right) \text{ (грн.) — нарощений капітал.}$$

За другий рік йому будуть нараховані $p\%$ від нової суми. Ця сума зросте на $p\%$ і становитиме

$$A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right) \left(1 + \frac{p}{100}\right) = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 \text{ (грн.).}$$

Через n років нарощений капітал становитиме $A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ грн.

Отже, початковий капітал A_0 , покладений у банк під $p\%$ річних, через n років стане нарощеним капіталом A_n , що обчислюють за формулою:

$$A_n = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n,$$

яку називають *формулою складних відсотків*.

Приклади розв'язання вправ



Вправа 1. Вартість нереалізованого товару через кожні 5 днів зменшують на 2% від початкової вартості. Вважаючи, що початкова вартість становила 400 грн., обчисліть вартість цього товару: а) на 6-й день; б) на 16-й день; в) на 26-й день.

• На 6-й день вартість товару зменшують на 2%; на 16-й день — зменшують 3-разово на 2%; на 26-й день — зменшують 5-разово на 2%. Тому за формулою простих відсотків знаходимо:

$$\text{а)} A_1 = 400 \left(1 - \frac{2}{100}\right) = 392 \text{ (грн.);}$$

$$\text{б)} A_3 = 400 \left(1 - \frac{2 \cdot 3}{100}\right) = 376 \text{ (грн.);}$$

$$\text{в)} A_5 = 400 \left(1 - \frac{2 \cdot 5}{100}\right) = 360 \text{ (грн.).}$$

Вправа 2. Вкладник вніс до банку 20000 грн. під 14% річних (накопичувальний вклад). Скільки грошей буде на рахунку вкладника через 3 роки?

• За формулою складних відсотків знаходимо:

$$A_3 = 20000(1 + 0,14)^3 = 29630,88 \text{ (грн.).}$$

Усно

530. Знайдіть:

а) 20% від 10;

б) 150% від 20.

531. Знайдіть число:

а) 10% якого дорівнюють 7;

б) 50% якого дорівнюють 15.

532. Знайдіть відсоткове відношення чисел:

а) 5 і 25;

б) 60 і 30.

Рівень А



533. З молока одержують 23% вершків за масою. Скільки кілограмів вершків можна отримати із 250 кг молока?

534. Магнітний залізняк містить 70% заліза за масою. Скільки тонн заліза містять 11,7 т магнітного залізняка?

535. Бронза — сплав, який містить 85% міді й 15% олова. Скільки міді й олова потрібно взяти, щоб одержати 240 кг бронзи?

536. Із 800 г сирого м'яса одержали 520 г вареного. Скільки відсотків маси втратило сире м'ясо під час варіння?

537. У виборах взяли участь 588 із 640 виборців села. Скільки відсотків виборців взяли участь у виборах?

538. Скільки грамів солі потрібно взяти, щоб приготувати 15%-й її розчин, маючи 340 г води?

539. Скільки грамів води потрібно взяти, щоб приготувати 30%-й розчин солі, маючи 360 г солі?

540. За несвоєчасну сплату боргу нараховують 3% пені за кожний день неоплати. Яку суму доведеться заплатити через 10 днів після строку сплати 500 грн. боргу?

541. Новий комп’ютер купили за 3200 грн. Щороку на його амортизацію припадає 10% від початкової ціни. Скільки коштуватиме комп’ютер через 4 роки?

542. Вкладник вніс до банку 2000 грн. під 11% річних. На скільки більше від внесеної суми він зможе одержати грошей через 3 роки?

543. Вкладник вніс до банку 1000 грн. під 10% річних. Яку суму він матиме на рахунку через 3 роки?

Рівень Б



544. У січні підприємство виготовило 750 одиниць продукції, у лютому — 800 одиниць, у березні — 780 одиниць.
- На скільки відсотків збільшилось виробництво продукції в лютому порівняно із січнем?
 - На скільки відсотків зменшилось виробництво продукції в березні порівняно з лютим?
545. Заробітна плата робітника двічі підвищувалася на одне й те ж число відсотків та із суми 800 грн. зросла до 1058 грн. На скільки відсотків підвищувалася заробітна плата щоразу?
546. За якої відсоткової ставки на місяць від початкової суми вклад на суму 2000 грн. збільшиться за рік до 2240 грн.?
547. На вступному іспиті з математики 15% абітурієнтів не розв'язали правильно жодної задачі, 144 абітурієнти розв'язали деякі задачі з помилками, а відношення тих, хто розв'язав усі задачі, до тих, хто не розв'язав правильно жодної задачі, складає 5 : 3. Скільки абітурієнтів складали іспит з математики?
548. Рис містить 81% білків, жирів та вуглеводів. Білків містить на 5% більше, а вуглеводів — на 74% більше, ніж жирів. Скільки грамів білків, жирів і вуглеводів окремо містить 400 г рису?
549. Вкладник вніс до банку 11500 грн. Частину грошей він поклав під 16% річних, а решту — під 14% річних. Через рік сума грошей, покладених під 16% річних, дорівнювала сумі грошей, покладених під 14% річних. Яку суму вніс вкладник під 16% річних?
550. Вкладник вніс до банку 3000 грн. Частину грошей він поклав під 16% річних, а решту — під 15% річних. Через рік прибуток від суми грошей, покладених під 16% річних, виявився на 170 грн. більшим за прибуток від суми, покладеної під 15% річних. Скільки грошей вніс вкладник під 16% річних?
551. Щоб одержати 100 л 48%-го розчину азотної кислоти, змішали 40%-й розчин цієї кислоти із 60%-м розчином. Скільки літрів кожного з розчинів використали?
552. Яку мінімальну суму грошей потрібно покласти до банку під 10% річних, щоб через 3 роки одержати більше, ніж 50000 грн.?
553. Вкладник вніс до банку 40000 грн. під 10% річних. Який прибуток він матиме через 4 роки?

Рівень В



554. Пекарні потрібно закупити олію. Одна фірма пропонує олію по 5 грн. за літр і 8% від вартості усієї купленої олії за транспортування, а друга — по 4.5 грн. за літр і 10% за транспортування. У якій фірмі вигідніше купувати олію?
555. Відповідно до вимог агротехніки зерно потрібно засипати на тривале зберігання за вологості 14% (кондиційний стан). На скільки відсотків зменшиться маса зібраного зерна, що має вологість 24%, при доведенні його до кондиційного стану?
556. С 500 кг залізної руди. Після видалення з руди 200 кг домішок, що містять 12,5% заліза, відсоткові вмісті заліза у початковій та одержаній рудах відрізняються на 20%. Яка маса заліза була в руді спочатку?
557. Сплав золота зі сріблом, що містить 5 кг срібла, сплавили із 15 кг срібла. Відсоткові вмісті золота у початковому й одержаному сплавах відрізняються на 30%. Знайдіть масу початкового сплаву.
558. З уdosконаленням технології продуктивність праці на підприємстві збільшилася на 20%. Скільки відсотків становить попередня продуктивність від нової?
559. Тривалість робочого дня зменшилася з 8 год до 7 год. На скільки відсотків потрібно підвищити продуктивність праці, щоб збільшити денний випуск продукції на 5%?
560. Ціну товару знизили на 10%, а потім нову ціну підвищили на 5%. На скільки відсотків змінилася початкова ціна після двох переоцінень?
561. Вкладник вніс до банку певну суму грошей. Через рік йому нарахували відсотки, що становило 420 грн. Додавши 580 грн., вкладник залишив гроші ще на рік. Наприкінці наступного року знову були нараховані відсотки, й на рахунку вкладника стало 4560 грн. Яка сума була спочатку внесена на рахунок, якщо вона більша, ніж 1000 грн.?

Вправи для повторення

562. Розв'яжіть систему рівнянь:

a)
$$\begin{cases} x - y = 2; \\ y^2 - 3 = 2xy; \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3xy + x = -2; \\ 6xy + y = -2. \end{cases}$$

563. Спростіть вираз:

a) $\frac{a^{-2} - b^{-2}}{(a^{-1} + b^{-1})^2};$

b) $\frac{x+y}{x^2+xy+y^2} \cdot \frac{x^3-y^3}{y^2-x^2} : \left(1 - \frac{1+y}{y}\right).$

564. Скільки трицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 0, 2, 5, 9, якщо:

- a) кожну цифру можна використовувати лише один раз;
b) цифри можуть повторюватися?

565*. З пункту A в пункт B вийшов турист і рухався зі швидкістю 4 км/год. Через годину услід за ним вийшов другий турист і рухався зі швидкістю 5 км/год, а ще через годину з пункту A виїхав велосипедист, який, обігнавши другого туриста, через 10 хв після цього обігнав і першого. Знайдіть швидкість велосипедиста.

566*. Розв'яжіть нерівність $|x - 3| < a$.

19. Випадкові події. Імовірність випадкової події

1. Випадкові події. У житті доволі часто доводиться мати справу з подіями, перебіг яких передбачити неможливо. Наприклад, підкинувши монету, завчасно не можна сказати, як вона впаде: догори гербом чи цифрою. Вимайми навмання кульку з лототрону, завчасно не можна сказати, яке число буде на ній написане. Підійшовши до зупинки, наперед не можна сказати, скільки хвилин доведеться чекати потрібний транспорт.

Є події, усі можливі результати яких можна передбачити. Так, після підкидання монети обов'язково відбудеться одна із двох можливих подій: «випаде герб», «випаде число». Наперед невідомо, яка з цих подій відбудеться, тому їх називають *випадковими подіями*.

Будь-яка подія відбувається внаслідок випробування (або спостереження). Якщо з партії деталей вибирають навмання 5 деталей для контролю якості, то вибір деталей — випробування, наявність серед вибраних деталей однієї бракованої — подія.

Події позначатимемо величими літерами латинського алфавіту A, B, C і т. д. Розрізнятимемо елементарні та складні події. Розглянемо приклад.

Підкидають гральний кубик. На його верхній грані може випасти число 1, 2, 3, 4, 5 або 6. Отже, може відбутися одна із шести подій:

- A_1 : випаде число 1;
 A_2 : випаде число 2;

A_3 : випаде число 3;

A_4 : випаде число 4;

A_5 : випаде число 5;

A_6 : випаде число 6.

Ці події мають такі властивості:

1) унаслідок кожного випробування одна з цих подій обов'язково відбудеться;

2) жодні дві з них не можуть відбутися разом;

3) події є рівноможливими (серед них жодна не має переваг у появі перед іншими).

Події, які мають такі три властивості, називають *елементарними подіями*, або *випадками*.

Можна говорити про наслідки підкидання грального кубика, які не є елементарними подіями. Наприклад, поява парного числа, поява числа, меншого від 4, поява одного із чисел 1, 2 або 3 тощо. Такі події називають *складними*. Кожну складну подію можна розкласти на елементарні. Нехай A — згадана вище складна подія «випаде парне число». Подія A можна розкласти на елементарні події A_2, A_4, A_6 («випаде число 2», «випаде число 4», «випаде число 6»). Кажуть, що події A *сприяють* 3 елементарні події A_2, A_4, A_6 , або 3 випадки A_2, A_4, A_6 .

Вірогідною називають подію, яка внаслідок даного випробування обов'язково має відбутися, а *неможливою* — подію, яка не може відбутися.

Наприклад, після підкидання грального кубика хоча б одне із чисел 1, 2, 3, 4, 5 або 6 обов'язково випаде, а число 7 випасти не може. Тому подія «випаде одне із чисел 1, 2, 3, 4, 5 або 6» є вірогідною, а подія «випаде число 7» — неможливою.

2. Імовірність випадкової події. Нехай у кошику є 40 яблук, з них 25 червоних і 15 зелених. Навмання беруть з кошика одне яблуко. Позначимо буквою A подію «вийняте яблуко — червоне», а буквою B — подію «вийняте яблуко — зелене». Червоних яблук більше, ніж зелених. Тому більше можливостей («шансів») відбудиться має подія A . Можливості здійснення подій A і B характеризують певними числами, які визначають так.

У кошику є 40 яблук, тому всіх випадків узяти одне яблуко є 40. Події A сприяють 25 випадків — якщо вийняли одне із 25 червоних яблук, а події B — 15 випадків. Можливість настання події A характеризують числом $\frac{25}{40} = \frac{5}{8}$, а події B — числом $\frac{15}{40} = \frac{3}{8}$. Ці числа називають *імовірностями* по-

дій A і B . Пишуть: $P(A) = \frac{5}{8}$, $P(B) = \frac{3}{8}$ (P — перша літера латинського слова *probabilities*, що означає ймовірність).

Означення

Імовірністю випадкової події A називають відношення числа рівноможливих випадків, які сприяють події A , до числа всіх можливих випадків.

Отже,

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

де n — загальна кількість рівноможливих випадків, m — число випадків, які сприяють події A .

Якщо подія A є вірогідною, то її сприяють усі n можливих випадків.

Для такої події $m = n$ і $P(A) = \frac{n}{n} = 1$.

Якщо подія A є неможливою, то $m = 0$ і $P(A) = \frac{0}{n} = 0$.

Якщо подія A випадкова, тобто така, яка може відбутися або не відбутися, то її ймовірність задовільняє нерівність: $0 < P(A) < 1$.

Приклади розв'язання вправ



Вправа 1. Яка ймовірність того, що після підкидання грального кубика випаде число, кратне 2?

• Нехай подія A — випаде число, кратне 2. Після підкидання грального кубика може випасти будь-яке із шести чисел 1, 2, 3, 4, 5 або 6, тому $n = 6$. Події A сприяють 3 випадки — якщо випаде число 2, 4 або 6, тому $m = 3$. Отже, $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Вправа 2. У партії з 1000 деталей є 600 деталей першого сорту, 370 — другого і 30 бракованих деталей. Яка ймовірність того, що навмання вибрана деталь буде не бракованою?

• Нехай подія A — вибрана деталь не бракована. У партії є 1000 деталей, тому $n = 1000$. Не бракованих деталей є $600 + 370 = 970$, тому $m = 970$.

Отже, $P(A) = \frac{970}{1000} = 0,97$.

Вправа 3. У шухляді лежать 5 зошитів, з них 3 у клітинку і 2 у лінійку. Учень бере навмання два зошити. Яка ймовірність того, що серед них буде хоча б один зошит у лінійку?

• Нехай подія A — серед вибраних зошитів буде хоча б один зошит у лінійку. Позначимо зошити у клітинку: k_1, k_2, k_3 ; зошити у лінійку: l_1, l_2 . Після вивмання двох зошитів можливі такі випадки:

$$\begin{array}{ll} k_1, k_2; & k_1, k_3; \\ k_2, k_3; & k_2, l_1; \\ k_3, l_1; & k_3, l_2; \\ l_1, l_2. \end{array}$$

Усіх пар зошитів, а, значить, усіх можливих випадків, є 10, тому $n = 10$. Події A сприяють 7 випадків (k_1, l_1 ; k_1, l_2 ; k_2, l_1 ; k_2, l_2 ; k_3, l_1 ; k_3, l_2 ; l_1, l_2), тому $m = 7$. Отже, $P(A) = \frac{7}{10} = 0,7$.

Усно

567. Біатлоніст робить 5 пострілів по 5 мішенях. За кожного пострілу він може влучити у мішень, а може й не влучити. Яка з указаних подій є випадковою; неможливою; вірогідною:

- а) буде влучено у 4 мішенні;
- б) не буде влучено в жодну мішень;
- в) буде влучено в 6 мішней?

568. В урні є 5 білих і 5 чорних куль. Білі кулі мають номери від 1 до 5, а чорні — від 6 до 10. З урні навмання виймають одну кулю. Розглянемо події:

- а) вийнята куля матиме номер 3;
- б) вийнята куля матиме номер 7;
- в) вийнята куля буде білою;
- г) номер вийнятої кулі буде кратний 4.

Які з даних подій є елементарними; складними? Назвіть усі елементарні події цього випробування. Які елементарні події (випадки) сприяють кожній з даних складних подій?

569. Из п'яти чисел 2, 3, 5, 10, 15 навмання вибирають одне число. Яка ймовірність того, що вибране число виявиться:

- | | |
|------------------|-----------------|
| а) числом 3; | б) числом 15; |
| в) парним; | г) непарним; |
| д) одноцифровим; | е) двоцифровим? |

Рівень А



570. Для лотереї випущено 1000 білетів, з яких 400 виграшних. Яка ймовірність того, що приданий один білет виявиться виграшним?
571. З урни, в якій є 5 білих і 10 червоних куль, навмання виймають одну кулю. Знайдіть імовірність того, що вийнята куля виявиться білою.
572. У кошику лежать 3 білі гриби, 7 сироїжок і 8 маслюків. Яка ймовірність того, що навмання вийнятий з кошика гриб буде сироїжкою?
573. Яка ймовірність того, що після підкидання грального кубика випаде:
- а) число 4; б) число 8; в) число, відмінне від 4.
574. У гаманці є 6 монет по 5 к. і 2 монети по 50 к. Знайдіть імовірність того, що навмання вийнята монета матиме вартість:
- а) 50 к.; б) 5 к.; в) 10 к.
575. У ящику лежать 50 лампочок, з них 2 браковані. Забрали 20 не бракованих лампочок. Яка ймовірність того, що після цього навмання взята лампочка буде бракованою?
576. У вазі лежать 12 шоколадних цукерок і 15 льодянників. З неї навмання взяли 2 цукерки, які виявилися шоколадними. Після цього з вази беруть навмання ще одну цукерку. Яка ймовірність того, що ця цукерка буде шоколадною?
577. Партія із 60 виробів має 5% браку. Знайдіть імовірність того, що навмання взятий виріб виявиться бракованим. Якою буде відповідь, якщо кількість усіх деталей дорівнюватиме 80? Зробіть висновок.
578. У парку росте 360 дерев, з них $\frac{2}{9}$ — хвойні. Знайдіть імовірність того, що навмання вказане дерево буде хвойним. Якою буде відповідь, якщо кількість усіх дерев дорівнюватиме 450? Зробіть висновок.

Рівень Б



579. В урні є 25 однакових кульок, пронумерованих числами від 1 до 25. З урни навмання беруть одну кульку. Яка ймовірність того, що номер кульки виявиться:
- а) меншим від 10; б) кратним 3;
- в) кратним 2 і 3; г) кратним 2 або 3?
580. Знайдіть імовірність того, що навмання взяте двоцифрове число виявиться:
- а) більшим від 90; б) кратним 10;
- в) кратним 25; г) меншим від 10.

581. На складі є вироби першого та другого сортів, до того ж виробів другого сорту в 1,5 разу більше, ніж першого. Знайдіть імовірність того, що навмання взятий виріб виявиться виробом першого сорту.
582. Якість деталей перевіряють два контролери. Перший контролер перевірив 55% усіх деталей, а другий — 45%. Навмання беруть одну деталь. Яка ймовірність того, що її перевіряв другий контролер?
583. У першій коробці лежать картки з номерами від 1 до 3, а в другій — від 4 до 6. Зожної коробки беруть навмання по одній картці. Знайдіть імовірність того, що сума номерів вибраних карток дорівнюватиме 7.
584. Із чотирьох чисел 2, 3, 5, 6 навмання вибирають два числа, використовуючи які записують правильний дріб. Яка ймовірність того, що цей дріб виявиться скротним?
585. На трьох картках написано по одній букві: *M, O, C*. Картки перемішують і розкладають у ряд. Яка ймовірність того, що утвориться слово *COM*?
586. Троє друзів придбали квитки на літак в одному ряді крісл із трьох місць і випадково зайняли ці місця. Знайдіть імовірність того, що кожний із друзів зайняв своє місце.
587. Для збирання телевізорів надійшло 900 мікросхем від двох постачальників. Імовірність того, що навмання взята мікросхема надійшла від первого постачальника, дорівнює 0,6. Скільки мікросхем надійшло від кожного постачальника?
588. У класі навчається 28 учнів. Імовірність того, що навмання вказаний учень виявиться дівчиною, дорівнює $\frac{3}{7}$. Скільки у класі дівчат і скільки хлопчиків?

Рівень В



589. Учень забув останні три цифри номера потрібного телефону. Пам'ятаючи, що ці цифри різні, він набирає їх навмання. Знайдіть імовірність того, що набрані цифри є правильними.
590. Про деякий трицифровий код відомо, що: він не містить цифри 0, 1, 2, 3 і 4; цифри коду можуть повторюватися. Яка ймовірність того, що навмання названий код із такими властивостями збіжиться з даним?
591. На п'яти картках написано по одній букві: *D, E, C, H, A*. Навмання одна за одною вибирають три картки і розташовують в ряд у порядку появи. Яка ймовірність того, що утвориться слово *CAD*?
592. Використовуючи цифри 1, 2, 3, 4, 5 не більше одного разу, навмання пишуть деяке трицифрове число. Знайдіть імовірність того, що це число виявиться парним.

593. Знайдіть імовірність того, що навмання взяте трицифрове число буде кратне 2 або 5.
594. Партию деталей виготовляють на двох станках. Імовірність виготовлення бракованої деталі на першому станку дорівнює 0,02, а на другому — 0,025. Серед 500 деталей, з яких 300 виготовлено на першому станку і 200 на другому, навмання вибирають одну деталь. Яка ймовірність того, що вибрана деталь виявиться бракованою?
595. У класі навчається 29 учнів. На екскурсію в музей ходили 24 учні, у музей і зоопарк — 16 учнів, а 2 учні не ходили ні в музей, ні в зоопарк. Яка ймовірність того, що навмання вказаний учень класу ходив на екскурсію в зоопарк?
596. Одночасно підкидають два гральні кубики. Яка ймовірність того, що випадуть числа, сума яких не менша від 7?
597. Монету підкидають чотири рази. Яка ймовірність того, що «герб» випаде: а) двічі; б) хоча б двічі?

Вправи для повторення

598. Побудуйте графік функції $y = 2x^2 - 3x$.

599. Розв'яжіть нерівність:

а) $x^2 - 4x - 5 \leq 0$;

б) $-4x^2 - 4x + 3 < 0$.

600. Скоротіть дріб:

а) $\frac{a-49}{\sqrt{a}+7}$;

б) $\frac{x-3}{x^2-x-6}$.

601. Доведіть, що значення виразу $\left(\frac{b+3}{b-3} + \frac{b-3}{b+3}\right) : \frac{2b^2+18}{9-b^2}$ не залежать від значень b .

602*. Математик ішов додому берегом річки проти течії зі швидкістю у півтора разу більшою, ніж швидкість течії річки, тримаючи в руках капелюх і палку. У деякий момент часу він кинув у річку капелюх, переплутавши його з палкою, і продовжував рухатися з тією ж швидкістю. Через деякий час він помітив помилку, кинув у річку палку та побіг назад зі швидкістю, удвічі більшою, ніж ішов раніше. Він наздогнав капелюх, виловив його з води та пішов проти течії річки з попередньою швидкістю. Пройшовши 10 хв, він побачив палку, що пливла річкою. На скільки раніше він прийшов би додому, якби не переплутав палку з капелюхом?

20. Статистичні дані

1. Статистичні спостереження. Ви, очевидно, не раз слухали дані статистичні спостереження про погоду в різних куточках планети, результатів виборів, соціальних опитувань тощо. Це **статистичні дані**. Статистичні дані дозволяють не тільки охопити картину певного питання на даний час, а й планувати необхідні дії на майбутнє. Так, статистичні дані про зайнятість населення дозволяють визначити, яку кількість спеціалістів і якої кваліфікації слід готувати, у якому регіоні варто споруджувати те чи інше підприємство тощо.

Методи збирання, обробки, інтерпретації різноманітних даних вивчає окремий розділ прикладної математики — **математична статистика**.

Нехай потрібно дослідити сім'ї міста за деякою ознакою (наприклад, розподілити сім'ї за кількістю дітей, за величиною місячного матеріального доходу на одного члена сім'ї тощо). Для цього можна провести **суцільне спостереження** — відвідати кожну сім'ю і з'ясувати питання, які нас цікавлять. Можна провести **вибіркове спостереження** — дослідити лише частину сімей і за результатами дослідження зробити висновок про всі сім'ї міста. При цьому сукупність сімей, відібраних для спостереження, називають **вибірковою сукупністю**, або просто **вибіркою**.

У загальному випадку **вибірка** — це сукупність об'єктів, відібраних для спостереження. Для того щоб за даними вибірки можна було судити про властивості всіх об'єктів, необхідно, щоб вибірка правильно відображала ці властивості. Це забезпечується перш за все випадковістю відбору, коли всі об'єкти мають однакову ймовірність потрапити до вибірки.

2. Обробка статистичних даних та способи їх подання. Розглянемо приклади:

Приклад 1. У відділі жіночого взуття протягом трьох днів було проведено обстеження для вивчення попиту на певні розміри взуття. За ці дні було продано 22 пари взуття таких розмірів:

38; 36; 38; 37; 40; 38; 36; 35; 35; 39; 37; 40; 41; 37; 39; 36; 38; 37; 37; 38; 39; 37.

Розташуємо ці дані в порядку не спадання розмірів:

35; 35; 36; 36; 36; 37; 37; 37; 37; 37; 37; 37; 38; 38; 38; 38; 39; 39; 39; 40; 40; 41.

Одержані так званий **ранжований ряд** даних спостереження. Він містить 7 груп розмірів взуття. Значеннякої групи називають **варіантою**, а число, яке показує, скільки разів трапляється варіанта, — **частотою** відповідної варіанти. У прикладі маємо такі 7 варіанти:

35; 36; 37; 38; 39; 40; 41.

Варіанта 35 має частоту 2 (35-й розмір трапляється двічі); варіанта 38 — частоту 5; варіанта 41 — частоту 1.

Результати спостереження зручно подавати у вигляді такої таблиці:

Розмір	35	36	37	38	39	40	41
Частота	2	3	6	5	3	2	1

Щоб візуально охопити дані спостереження, побудуємо на координатній площині точки, абсесиси яких дорівнюють розмірам взуття (варіантам), а ординати — відповідній частоті розміру, та сполучимо сусідні точки відрізками (рис. 69). Одержану ламану називають *полігоном частот*.

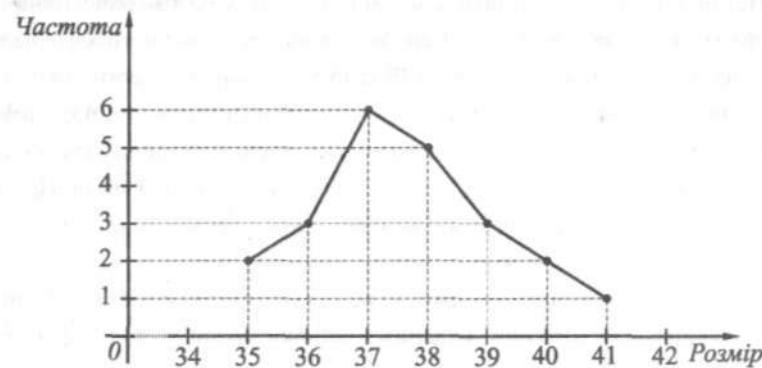


Рис. 69

Для наочного зображення даних спостереження можна використати й діаграму (рис. 70).

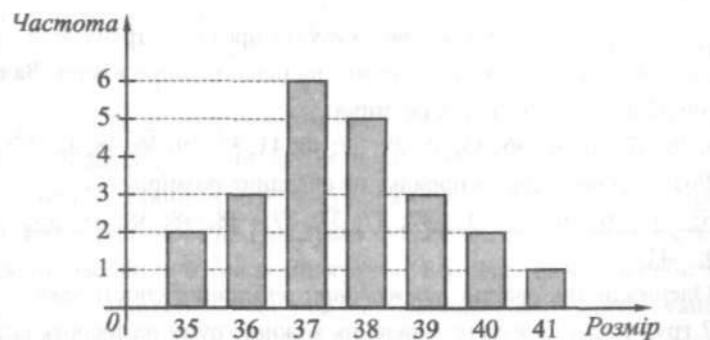


Рис. 70

Графічні зображення дозволяють візуально охопити всю сукупність даних і скласти картину дослідження в цілому. Так, з рисунків 69 і 70 видно, що більшим попитом користується жіноче взуття 37 і 38 розмірів.

Приклад 2. Розглянемо таблицю, в якій вказано, за якою ціною та скільки було продано кавунів на ринку за один день.

Ціна за 1 кг, грн.	1–1,2	1,2–1,4	1,4–1,6	1,6–1,8	1,8–2
Маса проданих кавунів, кг	80	100	75	55	30

З таблиці видно, що кавунів, ціна яких лежить в інтервалі від 1 грн. до 1,2 грн., було продано 80 кг. Кажуть, що першим рядком таблиці задані *інтервали ціни*¹, а другим — *частоти* цих інтервалів (маси кавунів, проданих за ціною відповідних інтервалів).

Для графічного зображення даних такого спостереження використовують *гістограму*, яку будують так: на осі абсесис відмічають задані інтервали й на кожному з них, як на основі, будують прямокутник, висота якого дорівнює частоті відповідного інтервалу (рис. 71).

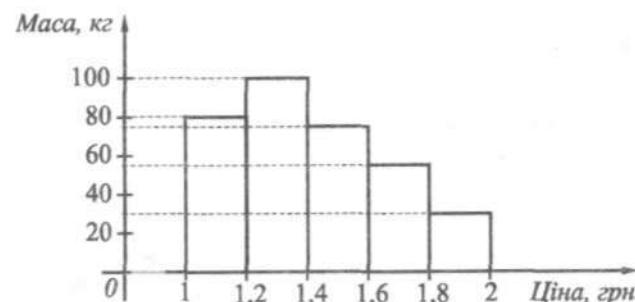


Рис. 71

Розглянемо інший графічний спосіб зображення даних цього спостереження. На осі абсесис знову відмітимо задані інтервали. До середин цих інтервалів проведемо перпендикуляри, довжина кожного з яких дорівнює частоті відповідного інтервалу. З'єднавши кінці сусідніх перпендикулярів відрізками, одержимо ламану (рис. 72), яку називають *полігоном інтервалового розподілу даних*.

¹ Інтервали ціни можна задавати так: [1; 1,2); [1,2; 1,4); [1,4; 1,6); [1,6; 1,8); [1,8; 2]. За такого задання зрозуміло, куди слід відносити значення величини, яке відповідає одному з кінців інтерvals.

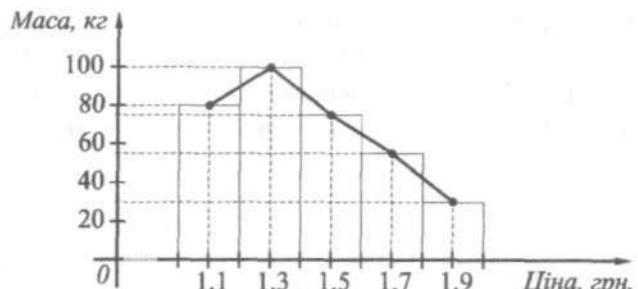


Рис. 72

Підсумок. Дані спостережень зручно подавати у вигляді таблиць та графічних зображень.

Для графічного зображення даних, крім уже розглянутих стовпчастих діаграм, гістограм, полігонів частот, можна використовувати інші види діаграм (кругові, лінійчаті), графіки.

3. Середні значення. Розглянемо приклад.

Приклад 3. Протягом травня через день, проводячи спостереження за температурою повітря опівночі, одержали такі дані:

3° С; 4° С; 4° С; 3° С; 3° С; 5° С; 8° С; 8° С; 6° С; 8° С; 10° С; 11° С; 12° С; 11° С; 12° С; 12° С.

Знайдемо середнє значення температури. Для цього суму 16 значень температури поділимо на 16:

$$t_c = \frac{3+4+4+3+3+5+8+8+6+8+10+11+12+11+12+12}{16} = \frac{120}{16} = 7,5 (\text{ }^{\circ}\text{C}).$$

Отже, можна сказати, що середня температура повітря опівночі у травні дорівнювала 7,5° С.

Середнім значенням n даних x_1, x_2, \dots, x_n вибірки (або середнім арифметичним даних вибірки) називають число

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Подамо результати спостереження температури повітря у вигляді таблиці:

$t^{\circ}\text{C}$	3	4	5	6	8	10	11	12
Частота	3	2	1	1	3	1	2	3

Враховуючи, що значення 3° С має частоту 3 (повторюється тричі), значення 4° С — частоту 2 і т. д., середню температуру можна було знайти й так:

$$t_c = \frac{3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 8 \cdot 3 + 10 \cdot 1 + 11 \cdot 2 + 12 \cdot 3}{16} = \frac{120}{16} = 7,5 (\text{ }^{\circ}\text{C}).$$

Якщо у вибірці з n об'єктів варіанта x_1 трапляється n_1 разів, варіанта x_2 — n_2 разів, ..., варіанта x_k — n_k разів, то середнє значення вибірки знаходять за формулою

$$\bar{x} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_k n_k}{n},$$

де $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

Усно

603. У таблиці подано результати опитування 258 сімей щодо розміру місячного матеріального доходу на одну особу:

Місячний доход сім'ї на одну особу, грн.	Число сімей	Відсоток сімей
До 200	34	13,2
200 – 400	52	20,2
400 – 600	72	27,9
600 – 1000	70	27,1
1000 і більше	30	11,6
Разом	258	100

- а) Скільки сімей мають дохід 200 – 400 гривень?
- б) Скільки відсотків сімей мають дохід 400 – 600 гривень?
- в) Який дохід мають найбільше сімей?

604. На діаграмі (рис. 73) показана врожайність зернових на дослідній станції протягом 10 років. На який рік припадає найбільша врожайність? найменша?

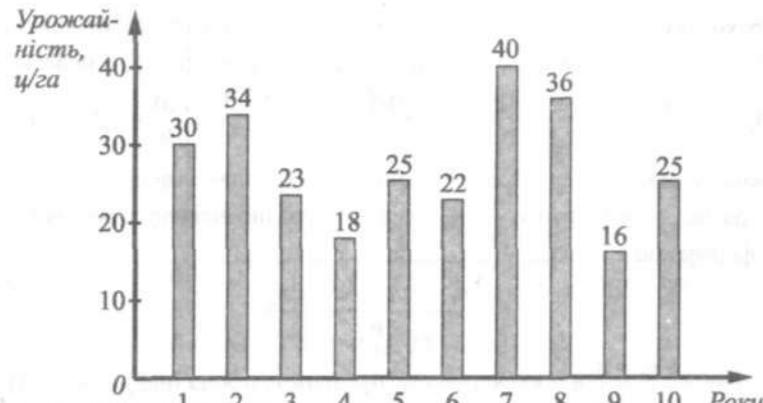
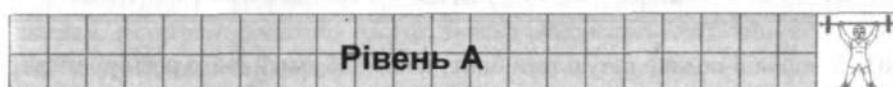


Рис. 73



605. У магазині за тиждень були продані костюми таких розмірів: 48, 46, 52, 44, 48, 50, 54, 46, 44, 48, 50, 52, 52, 50, 48, 50, 48, 46, 48, 54, 50, 48, 50, 48, 46, 48, 52. Запишіть ранжований ряд даних розмірів. Скільки утворилося варіант? Знайдіть частоту кожної варіанти. Складіть таблицю варіант і частот. Побудуйте полігон частот.

606. У 20 фермерських господарствах району врожайність пшениці (у ц з га) була такою: 35, 28, 30, 41, 30, 34, 36, 30, 38, 36, 28, 29, 32, 30, 38, 36, 41, 42, 38, 30. Запишіть ранжований ряд даних. Скільки утворилося варіант? Знайдіть частоту кожної варіанти. Складіть таблицю варіант і частот. Побудуйте полігон частот.

607. Для розв'язання задачі 6 учнів витратили часу: 12 хв; 7 хв; 9 хв; 8 хв; 10 хв; 11 хв. Скільки часу в середньому витрачав один учень для розв'язання задачі?

608. Одні й ті ж деталі виготовляють на двох станках, продуктивність яких однаакова. Кількість бракованих деталей, виготовлених на кожному станку за дні робочого тижня, подані в таблиці.

Дні тижня	1	2	3	4	5
1-й станок	5	8	7	4	8
2-й станок	6	6	5	7	9

Скільки бракованих деталей за день у середньому виготовляли на кожному станку? Який станок працює якісніше?

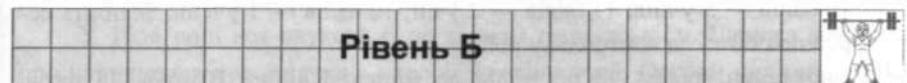
609. Щоб знайти середню масу головки капусти, навмання взяли 20 головок, маси яких виявилися:

2,8 кг; 2,8 кг; 2,9 кг; 3,1 кг; 3,2 кг; 3,1 кг; 3,3 кг; 3,2 кг; 3,2 кг; 2,8 кг;

3,5 кг; 3,4 кг; 3,4 кг; 3,2 кг; 2,8 кг; 3,3 кг; 3,6 кг; 3,7 кг; 3,1 кг; 3,6 кг,

Знайдіть середню масу головки капусти.

610. При відгодівлі 8 гусей було зафіксовано такі приrostи маси за сім днів: 410 г; 370 г; 420 г; 400 г; 380 г; 370 г; 390 г; 400 г. Знайдіть середній приріст маси однієї птиці за ці дні.



Рівень Б



611. Вибіркова перевірка малих підприємств міста щодо прибутків за рік дала такі результати:

Річний прибуток, тис. грн.	9	10	11	12	13	14	15
Кількість підприємств	3	6	2	5	6	2	1

Побудуйте полігон частот одержаних даних. Знайдіть середній річний прибуток одного підприємства.

612. Учитель фіксував кількість помилок, допущених учнями на контрольній роботі. Було одержано такі результати:

Кількість помилок	0	1	2	3	4	5
Кількість учнів	3	11	6	5	3	2

Побудуйте полігон частот одержаних даних. Скільки помилок у середньому припадає на одного учня?

613. Продавець на ринку, закупивши оптом лимони, продає їх поштучно за такою ціною:

50 г – 60 г — 70 к.;

60 г – 70 г — 90 к.;

70 г – 80 г — 1 грн. 10 к.;

80 г – 90 г — 1 грн. 30 к.;

90 г – 100 г — 1 грн. 40 к.;

100 г – 120 г — 1 грн. 50 к.;

Складіть таблицю даних задачі. Побудуйте гістограму та полігон частот.

614. Розподіл корів одного фермерського господарства за річним надоєм молока задано таблицею:

Річний надій, тис. кг	1–2	2–3	3–4	4–5
Кількість корів	20	8	8	4

Побудуйте гістограму та полігон частот даного розподілу.

- 615.** Віковий склад працівників підприємства задано таблицею:

Вік працівника	18–28	28–38	38–48	48–58
Кількість працівників	12	20	10	8

Побудуйте гістограму та полігон частот даного розподілу.

- 616.** За результатами контрольної роботи учні класу отримали такі оцінки: 2 бали — 1 учень; 3 бали — 1 учень; 4 бали — 2 учні; 5 балів — 3 учні; 6 балів — 2 учні; 7 балів — 4 учні; 8 балів — 5 учнів; 9 балів — 2 учні; 10 балів — 5 учнів; 11 балів — 2 учні; 12 балів — 1 учень. Знайдіть середню оцінку за контрольну роботу.
- 617.** Спортсмен зробив 40 пострілів по мішенні і вибив 10 очок 18 разів, 9 очок — 10 разів, 8 очок — 6 разів і 7 очок — 6 разів. Скільки очок у середньому вибивав спортсмен за один постріл?
- 618.** Знайдіть середній зріст учнів вашого класу, а також середній зріст учнів, які у списку класного журналу мають номери 1, 5, 9, ... (кожний наступний на 4 більший від попереднього). Порівняйте знайдені середні значення.
- 619.** За січень, лютий і березень підприємство виготовило відповідно 750, 810 і 891 одиниць продукції. Знайдіть середній місячний приріст виготовлення продукції у відсотках.

Вправи для повторення

- 620.** Спростіть вираз:

a) $\frac{a + \sqrt{ab}}{b + \sqrt{ab}}$, де $a > 0, b > 0$; б) $\frac{x - \sqrt{xy} + y}{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}$.

- 621.** Розв'яжіть систему рівнянь:

a) $\begin{cases} \frac{x+y}{y-x} = \frac{13}{6}; \\ x+y=5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x-y}{y-x} = \frac{5}{6}; \\ x^2 - y^2 = 5. \end{cases}$

- 622.** Знайдіть усі значення a , для яких рівняння $x^2 - 2ax + 3a - 2 = 0$ має корені. Знайдіть ці корені.

- 623*.** Ескалатор метро піднімає пасажира, який нерухомо стоїть на ньому, за 1 хв. Ідучи нерухомим ескалатором, пасажир піднімається за 3 хв. За який час пасажир підніметься, ідучи вгору рухомим ескалатором?

Цікаво знати



Теорія ймовірностей. Випадковий характер подій, процесів відзначали ще в давні часи. Давньогрецький філософ Епікур (341 – 270 рр. до н. е.) вважав, що випадок притаманний самій природі явищ, і, отже, випадковість об'єктивна. Були спроби виробити математичний підхід до вивчення випадкових подій, проте перші математичні розрахунки ймовірностей з'явилися в письмових документах лише в середині XVII ст.

У 1654 році вся наукова (і не тільки) громадськість Парижа говорила про виникнення нової науки — теорії ймовірностей. Основи цієї теорії були закладені не в науковій роботі, а в листуванні між двома відомими французькими математиками Б. Паскалем (1623 – 1662) і П. Ферма (1601 – 1665) з приходу задачі, яка стосувалася гри в кости. Взагалі, до перших задач теорії ймовірностей належать задачі, пов’язані з азартними іграми, дуже популярними в середньовічній Європі. З результатами Паскаля і Ферма ознайомився нідерландський фізик і математик Х. Гюйгенс (1629 – 1695), який написав твір «Про розрахунки в азартній грі». Цю роботу вважають першою книжкою з теорії ймовірностей.

Розв’язування задач, пов’язаних з популярними азартними іграми, лише спонукало виникнення теорії ймовірностей, як у свій час вимірювання площ під час земляних робіт спонукало до виникнення геометрії.

Сьогодні теорія ймовірностей розвинулася в універсальну теорію, яка знаходить застосування в багатьох сферах людської діяльності. Її широко використовують в економіці, транспорті, у виробництві, статистиці, військовій справі. Сучасне природознавство широко користується теорією ймовірностей як теоретичною основою в обробці результатів спостережень.

Математична статистика. «Статистика знає все» — такими словами починається друга частина роману І. Льфа й Є. Петрова «Дванадцять стільців». Щоб підкреслити значення статистики у повсякденному житті, наводять приклад прогнозування результатів президентських виборів у США 1936 року. Тоді кандидатами на виборах були Ф. Рузельт і А. Ландон. Редакція одного великої поважного журналу вирішила провести опитування виборців за телефонними довідниками. По всій країні були розіслані понад 10 мільйонів листівок із проханням назвати прізвище майбутнього президента. Згодом журнал поінформував, що на майбутніх виборах президентом США з великою перевагою буде обрано А. Ландона.

Паралельне опитування здійснили соціологи Дж. Геллап та Е. Роупер, опираючись на вибірку, яка нараховувала лише 4 тисячі респондентів. Незважаючи на те, що редакція журналу опитала 10 мільйонів виборців, витратила величезні кошти на розповсюдження листівок, збирання та обробку даних, їхній прогноз виявився хибним, бо опирався на думку лише тих виборців, які мали телефони. Прогноз же соціологів майже збігся з результатами виборів.

Перші статистичні дослідження були проведені в Англії та Німеччині. У середині XVII ст. в Англії виник науковий напрям, який отримав назву «політична арифметика». Його започаткували У. Петті (1623 – 1687) та Дж. Граунт (1620 – 1674), які на основі вивчення інформації про масові суспільні процеси намагалися відкрити закономірності суспільного життя. Поряд зі школою «політичної арифметики» в Англії розвивалась школа описової статистики, або «державознавства», в Німеччині. Розвиток «політичної арифметики» і «державознавства» сприяв появі науки статистики. Термін «статистика» походить від латинського слова *status*, яке в перекладі означає «стан» (речей, явищ).

Сучасну математичну статистику характеризують як *науку про прийняття рішень в умовах невизначеності*. Її завдання полягає у створенні методів збору й обробки статистичних даних для отримання наукових і практичних висновків.

Запитання і вправи для повторення § 3

1. Наведіть приклади математичних моделей.
2. Назвіть основні кроки розв'язування **прикладних задач**.
3. Запишіть формулу складних відсотків.
4. Наведіть приклади випадкових подій.
5. Яку подію називають вірогідною? неможливою?
6. Що називають імовірністю випадкової події?
7. Наведіть приклади статистичних спостережень.
8. Які є способи подання статистичних даних?
9. Як будують полігон частот? Наведіть приклад.
10. Як будують гістограму? Наведіть приклад.
11. Як знайти середнє значення вибірки?

Побудуйте математичну модель задачі та розв'яжіть задачу (624–629):

624. Площа кімнати дорівнює 14 м^2 , а її довжина на 0,5 м більша від ширини. Знайдіть розміри кімнати.
625. Катер проплив 30 км за течією річки за 1,5 год, а 32 км проти течії — за 2 год. Знайдіть швидкість катера у стоячій воді та швидкість течії річки.
626. Маса бетонного блоку дорівнює 350 кг. Скільки таких блоків може перевезти автомобіль, вантажність якого дорівнює 5 т?
627. На автоматичному станку виготовили партію деталей. Після удосконалення станка таку ж партію деталей він виготовив у 1,05 разу швидше, ніж за годину виготовляв на 5 деталей більше, ніж раніше. Скільки деталей за годину почав виготовляти станок?
628. Військова колона під час походу рухається зі швидкістю 5 км/год, розтягнувшисьздорогоюна400м. Командир, який перебуває у хвості колони, посилає мотоцикліста з пакетом у голову колони. Мотоциклист, виконавши доручення, відразу повертається. Знайдіть, через який проміжок часу після одержання пакета мотоциклист повернеться до командира, якщо його швидкість дорівнює 25 км/год.
629. Для кожної сільськогосподарської культури визначають оптимальну кількість рослин на 1 га. Тому перед посівом потрібно розрахувати норму висіву — масу насіння, яке потрібно висісти на 1 га поля, щоб забезпечити потрібну густоту рослин. Знайдіть норму висіву насіння пшениці, якщо відомо, що на 1 га має рости 6 млн рослин, маса 1000 зерен становить 40 г, чистота насіння — 97%, а схожість — 93%.

Розв'язкість задачі.

630. Вкладник внес до банку певну суму грошей і через рік після нарахування 15% річних мав на рахунку 2300 грн. Яку суму вкладник внес до банку?
631. Довжина першої сторони трикутника становить 75% довжини другої та на 20% більша від довжини третьої. Знайдіть довжини сторін трикутника, якщо його периметр дорівнює 38 см.
632. Змішили 30%-й розчин сірчаної кислоти з 10%-м розчином цієї ж кислоти й одержали 300 г 15%-го розчину. Скільки 10%-го розчину кислоти при цьому використали?
633. Яку суму необхідно внести до банку під 14% річних, щоб через 2 роки на рахунку було 6498 грн.?
634. Приріст випуску продукції на заводі порівняно з попереднім роком за перший рік становив 5%, за другий — 8%. Яким повинен бути відсоток приросту випуску продукції за третій рік, щоб середній річний приріст за три роки дорівнював 7%?
- 635*. Морська вода містить 5% солі. Скільки прісної води потрібно долити до 30 кг морської, щоб концентрація солі зменшилася на 70%?
636. З 10000 білетів лотереї 1250 білетів є виграшними. Яка ймовірність того, що придбаний один білєт виявиться виграшним?
637. Є 10 карток, пронумерованих числами від 1 до 10. Навмання беруть одну картку. Яка ймовірність того, що номер картки виявиться:
- а) більшим від 5; б) меншим від 15;
- в) кратним 3; г) кратним 2 і 3?
638. У ящику лежать лампочки, з них $\frac{2}{9}$ мають потужність 60 Вт, $\frac{4}{9}$ — потужність 100 Вт, решту — потужність 150 Вт. Яка ймовірність того, що навмання взята лампочка матиме потужність 150 Вт?
639. На полиці лежать зошити у клітинку і в лінійку, до того ж зошитів у клітинку в 1,2 разу більше, ніж зошитів у лінійку. Знайдіть імовірність того, що навмання взятий зошит виявиться зошитом у лінійку.
640. Тест містить 10 завдань. До кожного завдання подано чотири варіанти відповіді, один з яких є правильним. Учень знає правильні відповіді до 9 завдань і не знає — до одного завдання, тому навмання вибирає для цього варіант відповіді. Знайдіть імовірність того, що учень даст правильні відповіді на всі завдання тесту.

641. У першій урні містяться кулі з номерами від 1 до 4, а в другій — з номерами від 5 до 8. Зожної урні навмання виймають по одній кулі. Яка ймовірність того, що сума номерів вийнятих куль дорівнюватиме 9?

642. Олег написав на аркуші паперу деяке трицифрове число і повідомив, що сума цифр числа дорівнює 9, цифри є непарними і можуть повторюватися. Яка ймовірність того, що навмання назване число з такими властивостями збігатиметься з числом, записаним Олегом?

643. Одночасно підкидають три монети. Яка ймовірність того, що випаде:
а) три «герби»;
б) два «герби» та «число»?

644. На олімпіаді з математики правильне розв'язання кожної задачі оцінюють 7 балами. Кількості балів, одержаних учнями за розв'язання першої задачі, такі:

3, 0, 7, 2, 1, 0, 3, 7, 7, 5, 7, 2, 3, 4, 1, 2, 6, 7, 7, 0, 4, 5, 7, 7, 4, 2, 0, 0, 1, 3.

- а) Запишіть ранжований ряд даних. Скільки утворилося варіант? Знайдіть частоту кожної варіанти.
б) Складіть таблицю варіант і частот.
в) Побудуйте полігон частот.
г) Знайдіть середню кількість балів, яка припадає на одного учня.

645. Дані дослідження тривалості роботи електричних лампочок наведені в таблиці:

Тривалість роботи, тис. год.	2–2,1	2,1–2,2	2,2–2,3	2,3–2,4	2,4–2,5
Кількість лампочок	2	8	8	5	2

Побудуйте гістограму та полігон частот даного розподілу.

646. Протягом семи днів березня проводилися спостереження за температурою повітря опівдні. Були одержані такі дані: -4°C ; -4°C ; -2°C ; 0°C ; 0°C ; 1°C ; 2°C . Знайдіть середнє значення температури повітря опівдні за ці дні.

647. На уроці фізкультури вчитель фіксував кількість підтягувань учнів на перекладині. Були одержані такі результати:

Кількість підтягувань	4	6	7	8	9	12	14
Кількість учнів	1	2	4	4	2	1	1

Скільки підтягувань у середньому припадає на одного учня?

Завдання для самоперевірки № 4

Рівень 1

1. Батько старший від сина у 5 разів. Скільки років синові, якщо їм разом 36 років?

Нехай синові x років. Яке з рівнянь є математичною моделлю цієї задачі?

a) $\frac{x}{5} + x = 36$; b) $5x + x = 36$; v) $x + 5 + x = 36$; r) $x + x - 5 = 36$.

2. Яка швидкість катера у стоячій воді, якщо він пройшов шлях між пристанями за течією річки за 2 год, а проти течії — за 3 год? Швидкість течії річки дорівнює 2 км/год.

Нехай швидкість катера у стоячій воді дорівнює x км/год. Яке з рівнянь відповідає умові задачі?

a) $\frac{x+2}{2} = \frac{x-2}{3}$; b) $3(x+2) = 2(x-2)$;
v) $2(x+2) = 3(x-2)$; r) $3x = 2x + 2$.

3. Вкладник вніс до банку 900 грн. під 15% річних. Скільки гривень буде нараховано банком через рік?

a) 60 грн.; b) 1035 грн.; v) 135 грн.; r) 6000 грн.

4. Із цукрових буряків при переробці виходить за масою 16% цукру. Скільки потрібно центнерів буряків, щоб отримати 128 ц цукру?

a) 800 ц; b) 20,48 ц; v) 204,8 ц; r) 80 ц.

5. З коробки, у якій є 15 пачок чаю першого гатунку і 19 пачок чаю другого гатунку, навмання виймають одну пачку. Яка ймовірність того, що нею виявиться пачка чаю першого гатунку?

a) $\frac{15}{19}$; b) $\frac{15}{34}$; v) $\frac{19}{34}$; r) $\frac{34}{15}$.

6. Спортсмен пробіг доріжкою стадіону 4 кола по 400 м. На кожне коло він витратив відповідно 62 с, 64 с, 64 с, 58 с. Скільки часу в середньому витрачав спортсмен на подолання одного кола?

a) 64 с; b) 63 с; v) 62 с; r) 58 с.

Рівень 2

7. З пункту A в пункт B автомобіль їхав зі швидкістю 60 км/год, а повертається зі швидкістю 90 км/год. Усього в дорозі він був 5 год. Скільки часу їхав автомобіль з пункту A в пункт B ?

8. Периметр прямокутника дорівнює 96 см. Знайдіть довжини його сторін, якщо одна з них на 40% більша, ніж інша.
9. Заробітну плату робітника двічі підвищували на 10%. Якою є заробітна плата робітника після цих підвищень, якщо початкова заробітна плата дорівнювала 1000 грн.?
10. У контейнері лежать кавоварки, з яких 30 мають білий колір, 10 — голубий і 10 — червоний. Яка ймовірність того, що навмання вийнята з контейнера кавоварка матиме червоний колір?
11. Після зважування маса 10 овець виявилася такою: 35 кг, 37 кг, 34 кг, 35 кг, 40 кг, 38 кг, 37 кг, 35 кг, 36 кг, 36 кг. Запишіть ранжований ряд даних. Складіть таблицю варіант і частот.

Рівень 3

12. З пунктів A та B , відстань між якими дорівнює 240 км, вирушили одночасно два автомобілі. Якщо автомобілі рухатимуться назустріч один одному, то зустрінуться через 2 год. Якщо ж вони їхатимуть в одному напрямі, то автомобіль, який виїхав з пункту B , наздожне автомобіль, який виїхав із пункту A , через 12 год. Знайдіть швидкість кожного автомобіля.
13. Шматок сплаву міді та цинку, загальна маса якого дорівнює 72 кг, містить 45% міді. Скільки кілограмів міді потрібно додати до цього шматка, щоб одержати новий сплав, який містив би 60% міді?
14. Вкладник вніс до банку 5000 грн. під 11% річних. Який прибуток він матиме через 2 роки?
15. Партию деталей виготовили три робітники, до того ж перший робітник виготовив $\frac{2}{5}$ усіх деталей, другий — $\frac{3}{10}$, третій — решту. Яка ймовірність того, що навмання взяту деталь виготовив третій робітник?
16. Урожайність пшениці у господарствах району була такою:

Урожайність, ц/га	25–30	30–35	35–40	40–45
Кількість господарств	5	8	7	4

Побудуйте гістограму та полігон частот даного розподілу.

Рівень 4

17. Два трактори, працюючи разом, можуть зорати поле за 8 год. Якщо один трактор виоре спочатку $\frac{1}{4}$ поля, а далі інший — решту, то все поле буде зоране за 15 год. За скільки годин може зорати поле кожний трактор, працюючи окремо?
18. Ціну на товар підвищили на 10%. На скільки відсотків потрібно зменшити нову ціну, щоб одержати початкову?
19. Яку мінімальну суму грошей потрібно покласти до банку під 14% річних, щоб через 3 роки одержати більше, ніж 20000 грн.?
20. Одночасно підкидають два гральні кубики. Яка ймовірність того, що випадуть числа, добуток яких менший від 15?
21. На змаганні богатирів фіксували кількість піднімань штанги масою 150 кг. Були одержані такі результати:

<i>Кількість піднімань</i>	4	5	6	7	8
<i>Кількість богатирів</i>	3	2	4	4	2

Побудуйте полігон частот даного розподілу. Скільки піднімань у середньому припадає на одного богатиря?