ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ

Термін «послідовність» використовують, коли кажуть про розташування учнів у шерензі, черговість днів тижня, розміщення команд у турнірній таблиці тощо.

У цьому параграфі ми з'ясуємо, що таке числова послідовність, зокрема, що таке арифметична та геометрична прогресії, які їхні властивості, навчимося використовувати властивості зазначених прогресій для розв'язування прикладних задач.

1; 1; 2; 3; 5; 8; ... — послідовність

2; 5; 8; 11; 14; ... — арифметична прогресія
(кожне число, починаючи з другого,
на 3 більше від попереднього)

2; 6; 18; 54; 162; ... — геометрична прогресія
(кожне число, починаючи з другого,
утричі більше від попереднього)

21. Числові послідовності. Способи задання послідовностей

1. Числові послідовності. Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 1. Один соняшник за літо «випиває» у середньому 250 л води. Скільки води «вип'ють» за літо 1, 2, 3, 4, 5 соняшників?

Одержимо:	Кількість соняшників	1	2	3	4	5
	Об'єм води у літрах	250	500	750	1000	1250

У другому рядку таблиці маємо кілька чисел, записаних у певному порядку, кажуть, маємо *послідовність чисел*: 250; 500; 750; 1000; 1250, у якій на першому місці стоїть число 250, на другому — 500, на п'ятому — 1250.

У цьому прикладі кожному натуральному числу від 1 до 5 включно відповідає єдине число з указаної послідовності. Отже, маємо функцію, областю визначення якої є множина чисел 1, 2, 3, 4, 5.

Приклад 2. Записати у порядку зростання натуральні числа, запис яких закінчуються цифрою 2.

Одержимо *послідовність* чисел 2; 12; 22; 32; 42; ..., у якій на першому місці стоїть число 2, на другому — 12, на третьому — 22 і т. д.

Місце	1	2	3	4	5	...
Число	2	12	22	32	42	...

У цьому прикладі кожному натуральному числу n відповідає єдине число з указаної послідовності. Так, натуральному числу 6 відповідає число 52 цієї послідовності, числу 7 — число 62 і т. д. Отже, маємо функцію, областю визначення якої є множина всіх натуральних чисел.

Означення **Послідовністю називають функцію, яка задана на множині всіх або перших n натуральних чисел.**

Числа, які утворюють послідовність, називають *членами послідовності*. Якщо послідовність має скінченне число членів, тоді її називають *скінченною послідовністю* (приклад 1). Якщо послідовність має нескінченне число членів, то її називають *нескінченною послідовністю* (приклад 2), а у записі це показують трьома крапками після останнього записаного члена послідовності.

Наведемо ще приклади послідовностей:

4; 8; 12; 16; ... — послідовність натуральних чисел, кратних 4;

$\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \ldots$ — послідовність правильних дробів із чисельником 1;

–1; –2; –3; –4; ... — послідовність від'ємних цілих чисел;

0,1; 1,1; 2,1; 3,1 — послідовність, яка має чотири члени;

7; 7; 7; 7; ... — послідовність, усі члени якої однакові.

Четверта послідовність скінченна, решту — нескінченні.

У загальному випадку члени послідовності, як правило, позначають малими буквами з індексами внизу. Кожний індекс вказує порядковий номер члена послідовності. Наприклад, перший член послідовності позначають a_1, читають «a перше», другий — a_2, читають «a друге», член послідовності з номером n позначають a_n і читають «a енне». Саму послідовність позначають (a_n) і записують: a_1; a_2; a_3; a_4; … . Член a_4 називають наступним за a_3, а член a_3 — попереднім до члена a_4.

Наприклад, розглянемо послідовність (a_n): 1; 3; 5; ... — послідовність непарних натуральних чисел. У ній $a_1 = 1$; $a_2 = 3$; $a_3 = 5$; … . Член послідовності $a_2 = 3$ є попереднім до члена $a_3 = 5$ і наступним за членом $a_1 = 1$.

2. Способи задання послідовностей. Щоб задати послідовність, потрібно вказати спосіб, за допомогою якого можна знайти будь-який її член. Існують різні способи задання послідовностей.

1. Послідовність можна задати *описом* знаходження її членів. Наприклад, нехай задано послідовність, членами якої є дільники числа 15, записані у порядку зростання. Цю послідовність, яка описана словами, можна записати: 1; 3; 5; 15.

2. Скінченну послідовність можна задати *переліком її членів*. Наприклад, (b_n): 54; 1; 33; 27.

3. Послідовність можна задати *таблицею*, у якій навпроти кожного члена послідовності вказують його порядковий номер. Наприклад,

n	1	2	3	4	5
a_n	–2	1	–4	1	–6

4. Послідовність можна задати *формулою*, за якою можна знайти будь-який член послідовності, знаючи його номер. Наприклад, послідовність натуральних чисел, кратних 3, можна задати формулою $a_n = 3n$; послідовність чисел, обернених до натуральних, — формулою $b_n = \frac{1}{n}$. Такі формули називають ще формулами n-го члена послідовності.

Нехай послідовність (c_n) задана формулою $c_n = 3n - n^2$. Підставляючи замість n натуральні числа 1, 2, 3, ... , одержимо:

$$c_1 = 3 \cdot 1 - 1^2 = 2; \quad c_2 = 3 \cdot 2 - 2^2 = 2; \quad c_3 = 3 \cdot 3 - 3^2 = 0; \ldots .$$

Отже, (c_n): 2; 2; 0; ... .

5. Послідовність можна задати так: спочатку вказати перший або кілька перших членів послідовності, а потім — умову, за якою можна визначити будь-який член послідовності за попередніми. Такий спосіб задання послідовності називають *рекурентним*.

Наприклад, знайдемо кілька членів послідовності (a_n), у якій перший член дорівнює –1, другий — –3, а кожний наступний, починаючи із третього, дорівнює добутку двох попередніх. Одержимо: $a_1 = -1$; $a_2 = -3$;

$a_3 = a_1 \cdot a_2 = (-1) \cdot (-3) = 3$;

$a_4 = a_2 \cdot a_3 = (-3) \cdot 3 = -9$;

$a_5 = a_3 \cdot a_4 = 3 \cdot (-9) = -27$; і т. д.

Умови, що задають цю послідовність, можна записати так: $a_1 = -1$; $a_2 = -3$; $a_{n+2} = a_n \cdot a_{n+1}$. Формулу, за допомогою якої будь-який член послідовності можна знайти через попередні, називають *рекурентною формулою*.

Розглянуті вище послідовності є *числовими послідовностями*, оскільки їхніми елементами є числа. Існують й інші послідовності. Наприклад, послідовність передач на каналі телебачення, послідовність футбольних команд у турнірній таблиці тощо. Надалі розглядатимемо лише числові послідовності.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Записати шість перших членів послідовності натуральних чисел, які при діленні на 3 дають в остачі 2.

• Першим натуральним числом, яке при діленні на 3 дає в остачі 2, є саме число 2. Наступним є число 5 — воно на 3 більше від 2, далі 8 — на 3 більше від 5 і т. д. Тому одержимо: 2; 5; 8; 11; 14; 17.

Відповідь. 2; 5; 8; 11; 14; 17. •

Вправа 2. Записати формулу n-го члена послідовності (x_n) натуральних чисел, більших від 8, які при діленні на 9 дають в остачі 7.

• Першим натуральним числом, яке є більшим від 8 і при діленні на 9 дає в остачі 7, є число 16. Його можна записати так: $16 = 9 \cdot 1 + 7$. Другим є число 25, яке можна записати так: $25 = 9 \cdot 2 + 7$, третім — $34 = 9 \cdot 3 + 7$ і т. д. Тоді формула n-го члена шуканої послідовності (x_n) матиме вигляд: $x_n = 9n + 7$.

Відповідь. $x_n = 9n + 7$. •

Вправа 3. Послідовність задана формулою $x_n = 3n^2 - 7n$. Чи є членом цієї послідовності число 6?

• Число 6 буде членом цієї послідовності, якщо знайдеться такий номер n, що $x_n = 6$, тобто $3n^2 - 7n = 6$. Маємо рівняння: $3n^2 - 7n - 6 = 0$, звідки $n_1 = 3$; $n_2 = -\frac{2}{3}$. Число $-\frac{2}{3}$ не є натуральним, а тому не може бути номером члена послідовності. Отже, число 6 є третім членом заданої послідовності.

Відповідь. Так. •

Вправа 4. Записати три перших члени послідовності (a_n), якщо $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 3a_n - 2$.

• Узявши $n = 1$ у формулі $a_{n+1} = 3a_n - 2$, одержимо: $a_2 = 3a_1 - 2 = 3 \cdot 2 - 2 = 4$. Узявши $n = 2$, матимемо: $a_3 = 3a_2 - 2 = 3 \cdot 4 - 2 = 10$.

Відповідь. 2; 4; 10. •

Усно

648. Дано послідовність: 0,1; 7; 0,2; 8; 0,3; 9.

а) Скільки членів має ця послідовність?

б) Назвіть третій член послідовності.

в) Який номер має член послідовності, що дорівнює 0,3?

г) Який член послідовності є наступним за числом 8; попереднім до числа 7?

649. Дано послідовність натуральних чисел, кратних 10:

10; 20; 30; 40; 50; ... .

а) Назвіть перший, четвертий та восьмий члени цієї послідовності.

б) Який номер має член послідовності, що дорівнює 70?

в) Які члени послідовності розміщені між числами 30 і 90?

г) Якою формулою можна задати цю послідовність?

650. Послідовність задана формулою $x_n = n + 5$. Вкажіть три перших члени послідовності.

651. Назвіть кілька перших членів послідовності квадратів натуральних чисел.

Рівень А

652. Дано послідовність (c_n). Запишіть:

а) член послідовності, наступний за c_{15}; c_k;

б) член послідовності, попередній до c_8; c_k;

в) члени послідовності, які розміщені між c_3 і c_7; c_k і c_{k+3}.

653. Запишіть перші шість членів послідовності натуральних чисел, кратних 4. Який номер має член послідовності, що дорівнює 16?

654. Запишіть перші п'ять членів послідовності кубів натуральних чисел. Який номер має член послідовності, що дорівнює 27?

655. Запишіть перші п'ять членів послідовності натуральних чисел, які:

а) діляться на 5;

б) при діленні на 5 дають в остачі 1;

в) при діленні на 5 дають в остачі 2.

656. Запишіть перші чотири члени послідовності натуральних чисел, які:

а) діляться на 7;

б) при діленні на 4 дають в остачі 3.

657. Послідовність задана формулою $a_n = 5n^2 - 1$. Знайдіть: a_4; a_{10}.

658. Послідовність задана формулою $b_n = 3n + 5$.

а) Знайдіть перші чотири члени цієї послідовності; дванадцятий член.

б) Вкажіть номер члена послідовності, який дорівнює 20.

659. Послідовність задана формулою $c_n = 2n - 7$.

а) Знайдіть перші три члени цієї послідовності; п'ятнадцятий член.

б) Який номер має член послідовності, що дорівнює 193?

Рівень Б

660. Запишіть усі члени послідовності, заданої формулою:

а) $a_n = (-1)^n$, $1 \le n \le 7$;

б) $b_n = n^2 - 5n$, $1 \le n \le 3$;

в) $c_n = 3^{2n-3}$, $1 \le n \le 4$.

661. Послідовність задана формулою $x_n = 5 + 3n^2$. Знайдіть номер члена послідовності, який дорівнює: 305; 680.

662. Послідовність задана формулою $y_n = 2n^2 - 5n - 1$. Чи є членом цієї послідовності число 1; число 11?

663. Послідовність задана формулою $x_n = n^2 - 7n + 1$. Чи є членом цієї послідовності число –11; число 3?

664. Запишіть формулу n-го члена послідовності натуральних чисел, більших від 3, які при діленні на 7 дають в остачі 1; в остачі 2.

665. Запишіть формулу n-го члена послідовності натуральних чисел, більших від 6, які при діленні на 11 дають в остачі 5; в остачі 3.

Запишіть перші п'ять членів послідовності, якщо:

666. **а)** $a_1 = -3$; $a_{n+1} = 2a_n + 1$; **б)** $c_1 = 2$; $c_2 = -\frac{1}{2}$; $c_{n+2} = c_n \cdot c_{n+1} - 5$;

667. **а)** $b_1 = 5$; $b_{n+1} = -2b_n$; **б)** $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_{n+2} = x_n + x_{n+1} + 1$.

668. Запишіть рекурентну формулу і знайдіть перші чотири члени послідовності, перший член якої дорівнює –2, другий — 3, а кожний наступний, починаючи із третього, дорівнює квадрату суми двох попередніх.

669. Запишіть рекурентну формулу і знайдіть перші чотири члени послідовності, перший член якої дорівнює 3, а кожний наступний член, починаючи із другого, дорівнює квадрату попереднього члена, зменшеному на одиницю.

Рівень В

670. Знайдіть перші шість членів послідовності, заданої формулою

$$a_n = \begin{cases} 1 + \frac{5}{n}, \text{ якщо } n \text{ — парне;} \\ 2 - n, \text{ якщо } n \text{ — непарне.} \end{cases}$$

671. Послідовність задана формулою $b_n = 2n^2 - 13n + 1$. Знайдіть номери тих членів послідовності, які не перевищують 8.

672. Загальний член послідовності визначається за формулою $x_n = \frac{2n}{n+1}$. Для яких значень n модуль різниці $x_n - 2$ менший від 10^{-1}?

Вправи для повторення

673. Розкладіть на множники тричлен:

а) $9x^2 - 10x + 1$; **б)** $x^4 - 5x^2 - 36$.

674. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = \sqrt{\frac{1}{18 - 6x}}$; **б)** $y = \sqrt{x^2 + x - 2}$.

675. Перший бульдозер почав копати траншею. Через 2 год до нього приєднався другий, і через 8 год спільної роботи вони викопали 80% траншеї. За скільки годин міг би викопати траншею кожний бульдозер, якщо відомо, що першому на це потрібно на 5 год більше, ніж другому?

676. Розв'яжіть рівняння $x^2 + 3x + a = 0$, якщо a — абсциса вершини параболи $y = (x + 10)^2 - 1$.

22. Арифметична прогресія та її властивості

Серед числових послідовностей важливу роль відіграють послідовності, які називають арифметичною і геометричною прогресіями.

Приклад 1. Група туристів піднімалася вгору протягом 4 год. За першу годину туристи пройшли 2,5 км, а за кожну наступну — на 0,5 км менше, ніж за попередню. Який шлях проходили туристи за кожну годину руху?

За першу годину туристи пройшли 2,5 км, за другу — 2,5 – 0,5 = 2 (км), за третю — 2 – 0,5 = 1,5 (км), за четверту — 1 км.

Одержали скінченну послідовність чисел: 2,5; 2; 1,5; 1, у якій кожний наступний член, починаючи із другого, дорівнює попередньому, до якого додається одне і те ж число –0,5.

Приклад 2. Записати послідовність натуральних чисел, які при діленні на 3 дають в остачі 1.

Одержимо:

1; 4; 7; 10; 13; 16; 19; 22; ... .

У цій послідовності будь-який член, починаючи із другого, дорівнює попередньому, до якого додається одне і те ж число 3.

Кожна з розглянутих послідовностей є прикладом арифметичної прогресії.

Означення **Арифметичною прогресією називають послідовність, кожний член якої, починаючи із другого, дорівнює попередньому члену, до якого додається одне й те ж число.**

Це число називають *різницею арифметичної прогресії* та позначають буквою d (d — початкова буква латинського слова *differentia* — різниця).

Отже, якщо маємо арифметичну прогресію a_1; a_2; a_3; …, то $a_2 = a_1 + d$; $a_3 = a_2 + d$; …, тобто для будь-якого натурального n виконується рівність

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

З *означення арифметичної прогресії* випливає, що різниця між будь-яким її членом, починаючи з другого, і попереднім членом дорівнює одному й тому ж числу — різниці d, тобто $a_2 - a_1 = d$, $a_3 - a_2 = d$, ... Отже,

$$a_{n+1} - a_n = d.$$

Правильно і навпаки: якщо у деякій числовій послідовності різниця між будь-яким її членом, починаючи із другого, і попереднім членом дорівнює одному й тому ж числу, то така послідовність є арифметичною прогресією.

Арифметичні прогресії можуть бути скінченними (приклад 1) і нескінченними (приклад 2).

Щоб задати арифметичну прогресію, досить вказати її перший член і різницю. Тоді кожний наступний член можна обчислити через попередній за *рекурентною формулою* $a_{n+1} = a_n + d$.

У таблиці наведено приклади арифметичних прогресій для деяких значень a_1 і d.

a_1	d	Арифметична прогресія
1	2	1; 3; 5; 7; 9; ...
0	–2	0; –2; –4; –6; –8; ...
5	0	5; 5; 5; 5; 5; ...
1,1	–0,5	1,1; 0,6; 0,1; –0,4; –0,9; ...

Розглянемо *властивості арифметичної прогресії.*

1. В арифметичній прогресії 1; 3; 5; 7; 9; ... кожний член, починаючи з другого, є середнім арифметичним двох сусідніх з ним членів:

$$3 = \frac{1+5}{2}; \quad 5 = \frac{3+7}{2}; \quad 7 = \frac{5+9}{2}; \ldots .$$

Покажемо, що таку властивість має будь-яка арифметична прогресія.

Нехай маємо арифметичну прогресію (a_n) з різницею d. Тоді для натуральних значень $n > 1$ виконуються рівності: $a_n - a_{n-1} = d$, $a_{n+1} - a_n = d$. Звідси: $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$; $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$;

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Властивість 1. **Будь-який член арифметичної прогресії, починаючи з другого, є середнім арифметичним двох сусідніх з ним членів.**

З цією властивістю арифметичної прогресії і пов'язана її назва.

2. Розглянемо скінченну арифметичну прогресію (x_n), яка має 7 членів: 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15. Знайдемо суму крайніх членів прогресії і суми членів, рівновіддалених від крайніх:

$$x_1 + x_7 = 3 + 15 = 18;$$
$$x_2 + x_6 = 5 + 13 = 18;$$
$$x_3 + x_5 = 7 + 11 = 18;$$
$$x_4 + x_4 = 9 + 9 = 18.$$

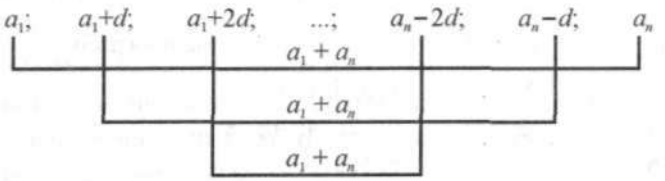
Сума будь-яких двох членів арифметичної прогресії, які рівновіддалені від її крайніх членів, дорівнює сумі крайніх членів.

Використаємо ці міркування для довільної скінченної арифметичної прогресії a_1; a_2; …; a_n з різницею d.

Нехай $a_1 + a_n = m$. Тоді:

$$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n = m;$$

$$a_3 + a_{n-2} = (a_2 + d) + (a_{n-1} - d) = a_2 + a_{n-1} = m \text{ і т. д.}$$



Властивість 2. **Сума будь-яких двох членів скінченної арифметичної прогресії, які рівновіддалені від її крайніх членів, дорівнює сумі крайніх членів цієї прогресії.**

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Знайти різницю і третій член арифметичної прогресії (a_n): 1; 1,2; … .

•У цій прогресії $a_1 = 1$, $a_2 = 1{,}2$. Тому:

$$d = a_2 - a_1 = 1{,}2 - 1 = 0{,}2; \quad a_3 = a_2 + d = 1{,}2 + 0{,}2 = 1{,}4.$$

Відповідь. 0,2; 1,4. •

Вправа 2. Чи є послідовність чисел 3; 0; –3; –6; –9 арифметичною прогресією?

•Позначимо члени заданої послідовності:

$$a_1 = 3;\ a_2 = 0;\ a_3 = -3;\ a_4 = -6;\ a_5 = -9.$$

Знайдемо різниці наступного та попереднього членів послідовності:

$a_2 - a_1 = 0 - 3 = -3$;

$a_3 - a_2 = -3 - 0 = -3$;

$a_4 - a_3 = -6 - (-3) = -3$;

$a_5 - a_4 = -9 - (-6) = -3$.

Оскільки одержані різниці дорівнюють одному й тому ж числу –3, то ця послідовність є арифметичною прогресією. •

Вправа 3. Між числами 7 і 15 вставити таке число, щоб усі три числа утворили арифметичну прогресію.

•Нехай x — шукане число, тоді послідовність 7; x; 15 — арифметична прогресія. Другий член арифметичної прогресії є середнім арифметичним першого й третього членів: $x = \frac{7+15}{2} = 11$.

Відповідь. 11. •

Усно

677. Чи є арифметичною прогресією послідовність:

а) 1; 2; 3; 4; 5; … — послідовність натуральних чисел;

б) 2; 4; 6; 8; 10; … — послідовність парних натуральних чисел;

в) 1; 4; 9; 16; 25; … — послідовність квадратів натуральних чисел;

г) –1; –2; –3; –4; –5; … — послідовність від'ємних цілих чисел?

678. Вкажіть перший член і різницю арифметичної прогресії:

а) 2; 7; 12; …; **б)** 0,7; 1; 1,3; …;

в) 6; 5,5; 5; …; **г)** –9; –7; –5; … .

679. Знайдіть перші чотири члени арифметичної прогресії (a_n), у якій:

а) $a_1 = 5$; $d = 2$; **б)** $a_1 = 7$; $d = -2$.

680. Знайдіть четвертий член арифметичної прогресії:

а) 7; 11; 15; ...; **б)** 13; 10; 7; ... .

681. Знайдіть різницю і перший член арифметичної прогресії:

а) a_1; 4; 7; …; **б)** a_1; 5; 3; … .

Рівень А

682. Запишіть послідовність натуральних чисел, кратних 6. Чи є ця послідовність арифметичною прогресією?

683. Знайдіть різницю і третій та четвертий члени арифметичної прогресії (a_n), у якій:

а) $a_1 = 5$; $a_2 = 8$; **б)** $a_1 = -2$; $a_2 = -5$;

в) $a_1 = 0{,}78$; $a_2 = 0{,}78$; **г)** $a_1 = -9{,}1$; $a_2 = -8{,}1$.

684. Знайдіть перші чотири члени арифметичної прогресії (a_n), у якій:

а) $a_1 = 10$; $d = 5$; **б)** $a_1 = 4{,}5$; $d = -0{,}5$.

685. Знайдіть різницю та п'ятий член арифметичної прогресії:

а) 1,4; 1,7; 2; ...; **б)** –3; –2,8; –2,6; … .

686. Знайдіть різницю та четвертий член арифметичної прогресії:

а) 10,5; 13; 15,5; ...; б) $\sqrt{2}+5$; $\sqrt{2}+3$; $\sqrt{2}+1$; ... .

687. Знайдіть другий член арифметичної прогресії:

а) –5; a_2; –13; ...; б) $\sqrt{5}$; a_2; $4-\sqrt{5}$; ... .

688. Знайдіть шостий член арифметичної прогресії, якщо п'ятий і сьомий її члени відповідно дорівнюють:

а) 4,8 і 7,8; б) –16,8 і 22.

689. Четвертий член арифметичної прогресії дорівнює –15. Чому дорівнює сума третього і п'ятого членів цієї прогресії?

690. Дев'ятий член арифметичної прогресії дорівнює 23. Чому дорівнює сума восьмого і десятого членів цієї прогресії?

Рівень Б

691. Чи є послідовними членами арифметичної прогресії числа:

а) $7+\sqrt{5}$; $9+2\sqrt{5}$; $10+3\sqrt{5}$; б) 4; $\left(\sqrt{3}-1\right)^2$; $4-4\sqrt{3}$?

692. Між числами –5 і –11 вставте таке число, щоб усі три числа утворили арифметичну прогресію.

693. Знайдіть другий і четвертий члени арифметичної прогресії:

а) 1; c_2; 0,9; c_4;...; б) $-\sqrt{2}$; a_2; $3\sqrt{2}$; a_4; ... .

694. Перший і четвертий члени арифметичної прогресії відповідно дорівнюють 3,8 і 7,5. Знайдіть суму перших чотирьох членів цієї прогресії.

695. Олег, Петро, Сергій та Андрій ловили рибу. Кількості рибин, які вони зловили, утворюють арифметичну прогресію. Найменше рибин — 9 — зловив Петро, а найбільше — 18 — Олег. Скільки рибин зловили Сергій та Андрій разом? Скільки всього рибин зловили хлопці?

696. Для яких значень m числа 2, $2m-30$ і $m-8$ є трьома послідовними членами арифметичної прогресії?

697. Знайдіть третій член арифметичної прогресії (x_n), якщо $x_1=7\sqrt{3}$ і $x_5=5\sqrt{3}$.

Рівень В

698. П'ятий член арифметичної прогресії дорівнює 2,5. Знайдіть суму перших дев'яти членів цієї прогресії.

699. Числа, якими визначаються градусні міри кутів трикутника, утворюють арифметичну прогресію. Знайдіть середній за величиною кут трикутника.

700. На вал насаджено п'ять шківів, числові значення діаметрів яких утворюють арифметичну прогресію. Діаметр найменшого шківа дорівнює 34 см, а найбільшого — 46 см. Знайдіть діаметри решти трьох шківів.

Вправи для повторення

701. Що більше: $2\sqrt{3}$ чи $\sqrt{10}$?

702. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} a+4d-(a+2d)=-4; \\ (a+d)(a+3d)=-3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x+2y=-3; \\ x^2-y^2=-8. \end{cases}$

703. Розв'яжіть рівняння:

а) $x^2+6x-7=0$; б) $x+6\sqrt{x}-7=0$.

704. У момент відходу човна від пристані в одного з пасажирів упав у воду капелюх. Човен, пройшовши 4 км за течією, повернув назад і на відстані 2 км від пристані порівнявся з капелюхом. Яка швидкість капелюха відносно берега, якщо швидкість човна у стоячій воді дорівнює 6 км/год?

23. Формула *n*-го члена арифметичної прогресії

Щоб задати арифметичну прогресію, досить вказати її перший член і різницю, а наступні члени можна знайти за формулою $a_{n+1}=a_n+d$.

Наприклад, знайдемо кілька перших членів арифметичної прогресії, у якій $a_1=4$, $d=3$.

Одержимо:

$$a_2=a_1+d=4+3=7;$$
$$a_3=a_2+d=7+3=10.$$

Далі можна знайти a_4, a_5 і т. д.

Щоб знайти член цієї прогресії з великим порядковим номером, наприклад, a_{50}, потрібно виконати багато обчислень. Тому відшукання членів арифметичної прогресії за формулою $a_{n+1}=a_n+d$ часто буває незручним.

Знайдемо інший шлях знаходження n-го члена арифметичної прогресії (a_n).

За означенням арифметичної прогресії маємо:

$$a_2=a_1+d;$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d;$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d.$$

Зауважуємо, що в цих формулах коефіцієнт біля d на 1 менший від порядкового номера члена прогресії, який шукаємо. Так, $a_5 = a_1 + 4d$, $a_{20} = a_1 + 19d$. Отже, можемо записати:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)d.}$$

Одержану формулу називають *формулою n-го члена арифметичної прогресії.*

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Знайти дев'ятий член арифметичної прогресії (a_n): 5; 4,2; 3,4; ... .

● Маємо: $a_1 = 5$. Знайдемо різницю прогресії: $d = 4{,}2 - 5 = -0{,}8$. Тоді $a_9 = a_1 + 8d = 5 + 8 \cdot (-0{,}8) = -1{,}4$.

Відповідь. –1,4. ●

Вправа 2. Знайти перший член арифметичної прогресії (a_n), у якій $d = -2$, $a_8 = 93$.

● Використавши формулу n-го члена арифметичної прогресії для $n = 8$, одержимо: $93 = a_1 + 7 \cdot (-2)$. Звідси $a_1 = 93 + 14 = 107$.

Відповідь. 107. ●

Вправа 3. Чи є число 181 членом арифметичної прогресії, у якій $a_1 = 3$, $d = 5$?

● Число 181 буде членом прогресії, якщо існує таке натуральне число n — порядковий номер члена прогресії, що $a_n = 181$. Оскільки $a_n = a_1 + (n-1)d$, то $181 = 3 + (n-1) \cdot 5$. Розв'яжемо одержане рівняння: $181 = 3 + 5n - 5$; $183 = 5n$; $n = 36{,}6$. Число 36,6 не є натуральним, тому число 181 не є членом даної арифметичної прогресії.

Відповідь. Ні. ●

Вправа 4. Знайти перший член і різницю арифметичної прогресії (a_n), якщо сума другого і п'ятого її членів дорівнює 20, а різниця дев'ятого і третього членів дорівнює 18.

● За умовою маємо: $a_2 + a_5 = 20$, $a_9 - a_3 = 18$. Записавши члени a_2, a_5, a_9 і a_3 за формулою n-го члена арифметичної прогресії, одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_1 + d + a_1 + 4d = 20; \\ a_1 + 8d - a_1 - 2d = 18. \end{cases} \text{ Звідки: } \begin{cases} 2a_1 + 5d = 20; \\ 6d = 18; \end{cases} \begin{cases} 2a_1 + 15 = 20; \\ d = 3; \end{cases} \quad a_1 = 2{,}5;\ d = 3.$$

Відповідь. 2,5; 3. ●

Рівень А

705. Запишіть формулу n-го члена арифметичної прогресії (a_n) та знайдіть a_{11}, якщо:

а) $a_1 = 11,\ d = \frac{1}{2}$; **б)** $a_1 = -3,\ d = -4$.

706. Знайдіть вісімнадцятий член арифметичної прогресії:

а) 1; 1,3; 1,6; ...; **б)** 3; 1; –1; ... .

707. В арифметичній прогресії (a_n): $a_1 = 0{,}5$; $d = 2$. Знайдіть a_7, a_{15}.

708. Запишіть формулу n-го члена арифметичної прогресії (a_n) та знайдіть a_9:

а) 7,8; 8,9; 10; ...; **б)** –6; –13; –20; ... .

709. Знайдіть перший член арифметичної прогресії, якщо її різниця і дев'ятий член відповідно дорівнюють:

а) 0,5; 3; **б)** 0,2; –2.

710. Знайдіть перший член арифметичної прогресії (a_n), якщо:

а) $d = 2{,}5;\ a_{11} = 11$; **б)** $d = -\frac{1}{9};\ a_{100} = 0$.

Знайдіть порядковий номер члена a_n арифметичної прогресії, якщо:

711. **а)** $a_1 = 3;\ d = -5;\ a_n = -37$; **б)** $a_1 = -7;\ d = 2;\ a_n = 81$.

712. **а)** $a_1 = 1;\ d = 7;\ a_n = 71$; **б)** $a_1 = -20;\ d = 3;\ a_n = -2$.

Рівень Б

713. Чи є членом арифметичної прогресії –2; –5; –8; ... число –84; число –152?

714. Чи є число 130 членом арифметичної прогресії:

а) 4; 7; 10; ...; **б)** 23; 34; 45; ...?

715. Ламана складається із дванадцяти відрізків. Довжина першого відрізка дорівнює 25 см, а кожного наступного — на 2 см менша, ніж попереднього. Яка довжина найкоротшого відрізка?

716. Знайдіть перший член і різницю арифметичної прогресії, якщо її четвертий і дев'ятий члени відповідно дорівнюють 16 і 41.

717. Знайдіть різницю і п'ятнадцятий член арифметичної прогресії, якщо її третій член дорівнює 9, а сума п'ятого і дев'ятого членів дорівнює 2.

718. Знайдіть дев'ятий член арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_4 = 9$, $a_{17} = -17$.

719. Знайдіть перший член і різницю арифметичної прогресії (c_n), для якої $c_2 + c_8 = 10$, $c_3 + c_{14} = 31$.

720. Між числами 8 і 63 вставте чотири числа так, щоб вони разом з даними числами утворювали арифметичну прогресію.

721. Між числами 2 і –6 вставте три числа так, щоб вони разом з даними числами утворювали арифметичну прогресію.

Рівень В

722. Знайдіть перший від'ємний член арифметичної прогресії 72; 70,5; ... .

723. Знайдіть перший додатний член арифметичної прогресії –90; –85,6; ... .

724. Скільки додатних членів має арифметична прогресія 28; 27,7; ...?

725. Дано дві арифметичні прогресії (x_n): 7; 26; ... і (y_n): 3; 8; ... . Знайдіть найменший спільний член цих прогресій.

Вправи для повторення

726. Чи належить число –2 області значень функції $y = x^2 + 5x + 4$?

727. Розв'яжіть нерівність:

а) $3n^2 - 10n + 7 > 0$; **б)** $(21 - x)(2x + 3) \geq 0$.

728. З урни, у якій є 15 куль, пронумерованих числами від 1 до 15, навмання виймають одну кулю. Знайдіть імовірність того, що номер вийнятої кулі виявиться дільником числа 15.

729. Доведіть, що значення виразу $\sqrt{x^2 + 5xy + y^2}$ є цілим числом, якщо $(x; y)$ — розв'язок системи рівнянь $\begin{cases} x - 2y = -5; \\ 3x + y = 6. \end{cases}$

24. Формула суми перших *n* членів арифметичної прогресії

Приклад. Знайти суму натуральних чисел від 1 до 100 включно.

Запишемо суму S даних чисел двома способами: у порядку зростання доданків та у порядку спадання і почленно додамо одержані рівності:

$$\begin{array}{rl} & S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 100 \\ + & S = 100 + 99 + 98 + \ldots + 1 \\ \hline & 2S = 101 + 101 + 101 + \ldots + 101 \end{array}$$

Суми пар чисел, розміщених одне під одним у правих частинах цих рівностей, дорівнюють одному й тому ж числу 101; таких пар є 100. Тому

$$2S = 101 \cdot 100.$$

Звідси $S = \frac{101 \cdot 100}{2} = 5050.$

Отже, сума всіх натуральних чисел від 1 до 100 включно дорівнює 5050.

Зазначимо, що послідовність натуральних чисел 1; 2; ...; 99; 100 є арифметичною прогресією (a_n), у якій $a_1 = 1$; $d = 1$; $n = 100$.

Використаємо проведені міркування для виведення формули суми S_n перших n членів довільної арифметичної прогресії a_1; a_2; …; a_n; … .

Запишемо:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n;$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_1.$$

Додамо почленно ці рівності, одержимо:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_n + a_1).$$

За властивістю 2 арифметичної прогресії сума кожних двох членів, узятих у дужки, дорівнює $a_1 + a_n$. Таких сум є n, тому:

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n.$$

Звідси

$$\boldsymbol{S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.} \qquad (1)$$

Якщо в цій формулі замість a_n підставити вираз $a_1 + (n-1)d$, то одержимо:

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Отже,

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n. \qquad (2)$$

Формули (1) і (2) називають *формулами суми перших n членів арифметичної прогресії.*

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Знайти суму перших дев'яти членів арифметичної прогресії (a_n): 3; 7; 11; ... .

• *1-й спосіб.* Маємо: $a_1 = 3$, $d = a_2 - a_1 = 7 - 3 = 4$. Знайдемо a_9: $a_9 = 3 + 8 \cdot 4 = 35$. За формулою (1) знаходимо:

$$S_9 = \frac{3+35}{2} \cdot 9 = 171.$$

2-й спосіб. Знаючи, що $a_1 = 3$, $d = 4$, за формулою (2) знаходимо:

$$S_9 = \frac{2 \cdot 3 + 8 \cdot 4}{2} \cdot 9 = 171.$$

Відповідь. 171. •

Вправа 2. Знайти суму непарних натуральних чисел, які не перевищують 71.

• Непарні натуральні числа утворюють арифметичну прогресію 1; 3; 5; ..., у якій $a_1 = 1$, $d = 2$, $a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 1$. Знайдемо, який порядковий номер має член 71 цієї прогресії: $71 = 2n - 1$; $n = 36$. Отже, потрібно шукати суму перших тридцяти шести членів прогресії. Знаходимо:

$$S_{36} = \frac{1+71}{2} \cdot 36 = 1296.$$

Відповідь. 1296. •

Вправа 3. Знайти суму натуральних чисел, не більших від 105, які при діленні на 9 дають в остачі 1.

• Натуральні числа, які при діленні на 9 дають в остачі 1, утворюють арифметичну прогресію (a_n): 1; 10; 19; ..., у якій $a_1 = 1$, $d = 9$, $a_n = 1 + 9(n-1) = 9n - 8$. Знайдемо, скільки членів цієї прогресії не перевищують 105. Для цього розв'яжемо нерівність $a_n \le 105$:

$$9n - 8 \le 105;\ 9n \le 113;\ n \le 12\frac{5}{9}.$$

Отже, потрібно шукати суму перших дванадцяти членів прогресії. Знаходимо: $a_{12} = 1 + 9 \cdot 11 = 100$; $S_{12} = \frac{1+100}{2} \cdot 12 = 606$.

Відповідь. 606. •

Вправа 4. Знайти перший член арифметичної прогресії (a_n), якщо сума другого і дванадцятого її членів дорівнює 20,4, а сума перших одинадцяти — 121.

• За умовою маємо: $a_2 + a_{12} = 20{,}4$; $S_{11} = 121$. Використавши формули n-го члена та суми перших n членів арифметичної прогресії, одержимо систему рівнянь $\begin{cases} a_1 + d + a_1 + 11d = 20{,}4; \\ \frac{2a_1 + 10d}{2} \cdot 11 = 121. \end{cases}$ Звідси:

$$\begin{cases} 2a_1 + 12d = 20{,}4; \\ (a_1 + 5d) \cdot 11 = 121; \end{cases} \begin{cases} a_1 + 6d = 10{,}2; \\ a_1 + 5d = 11; \end{cases} \begin{cases} d = -0{,}8; \\ a_1 + 5d = 11; \end{cases} a_1 = 15.$$

Відповідь. 15. •

Вправа 5. Скільки потрібно взяти перших членів арифметичної прогресії (a_n), у якій $a_1 = 2$; $d = 1$, щоб їх сума дорівнювала 90?

• Використавши формулу суми перших n членів арифметичної прогресії $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$, матимемо: $90 = \frac{2 \cdot 2 + 1 \cdot (n-1)}{2} \cdot n$; $180 = (n+3) \cdot n$; $n^2 + 3n - 180 = 0$; $n_1 = -15$, $n_2 = 12$. Корінь $n_1 = -15$ не задовольняє умову задачі. Отже, $n = 12$.

Відповідь. 12. •

Рівень А

730. Знайдіть суму перших одинадцяти членів арифметичної прогресії, якщо:

а) $a_1 = 22$; $a_{11} = -1$; **б)** $a_1 = 5$; $a_{11} = 15$.

Знайдіть суму перших n членів арифметичної прогресії (a_n), якщо:

731. **а)** $a_1 = 8$; $d = 4$; $n = 5$; **б)** $a_1 = -0{,}1$; $d = -0{,}1$; $n = 9$.

732. **а)** $a_1 = 1{,}5$; $d = 2$; $n = 8$; **б)** $a_1 = 5$; $d = -3$; $n = 7$.

733. Знайдіть суму перших десяти членів арифметичної прогресії:

а) 3; 9; 15; ...; **б)** –2,3; –2,5; –2,7; ... .

734. Знайдіть суму перших дев'яти членів арифметичної прогресії:

а) 1; 5; 9; ...; **б)** –1; –2; –3; ... .

735. Знайдіть суму перших п'ятдесяти натуральних чисел.

736. Знайдіть суму перших сорока натуральних чисел.

737. Довжини сторін п'ятикутника утворюють арифметичну прогресію. Знайдіть периметр п'ятикутника, якщо довжина його найкоротшої сторони дорівнює 4 см, а найдовшої — 12 см.

738. Сума перших п'яти членів арифметичної прогресії (a_n) дорівнює 25. Знайдіть п'ятий член прогресії, якщо $a_1 = -5$.

739. Сума перших дев'яти членів арифметичної прогресії дорівнює 126, дев'ятий член дорівнює 54. Знайдіть перший член цієї прогресії.

Рівень Б

740. Знайдіть суму непарних натуральних чисел, не більших від 81.

741. Знайдіть суму парних натуральних чисел, не більших від 100.

742. Знайдіть суму натуральних чисел, кратних 7 і не більших від 145.

743. Знайдіть суму парних натуральних чисел від 24 до 120 включно.

744. Знайдіть суму непарних натуральних чисел від 17 до 117 включно.

745. Скільки потрібно взяти перших членів арифметичної прогресії 16; 14; ..., щоб їх сума дорівнювала –434?

746. Знайдіть перший член і різницю арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_{10} = 33$; $S_8 = 88$.

747. Знайдіть різницю арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_6 = 0$; $S_{12} = -18$.

748. Знайдіть суму перших десяти членів арифметичної прогресії, п'ятий і восьмий члени якої відповідно дорівнюють 12 і 27.

749. Дев'ятий член арифметичної прогресії більший від четвертого утричі, а їх сума дорівнює 20. Знайдіть суму перших восьми членів прогресії.

750. Екскаватор вирив траншею завдовжки 375 м, до того ж за перший день він вирив 50 м, а за кожний наступний — на 5 м більше, ніж за попередній. За скільки днів екскаватор вирив траншею?

Рівень В

751. Знайдіть суму перших двадцяти натуральних двоцифрових чисел, які при діленні на 3 дають в остачі 1.

752. Знайдіть суму натуральних трицифрових чисел, кратних 4.

753. Знайдіть суму членів арифметичної прогресії з дев'ятого до двадцятого включно, якщо перший член прогресії дорівнює 5, а різниця — –2.

754. Знайдіть суму перших n:

а) парних натуральних чисел; **б)** непарних натуральних чисел.

755. Знайдіть натуральне число, яке у 5 разів менше від суми усіх натуральних чисел, які йому передують.

756. Розв'яжіть рівняння:

а) $6 + 11 + ... + (1 + 5n) = 111$ (n — натуральне число);

б) $(x - 1) + (x - 3) + ... + (x - 27) = 350$.

757. Для поливання 10 дерев, розміщених у ряд на відстані 3 м одне від одного, садівник приносить відро води для кожного дерева окремо із криниці, розміщеної у тому ж ряду за 10 м від першого дерева. Скільки всього метрів пройде садівник, щоб полити всі дерева і повернутися до криниці?

Вправи для повторення

758. Побудуйте графік функції $y = -2x^2 + 8x$. Користуючись графіком, знайдіть:

а) область значень функції;

б) усі значення x, для яких функція набуває від'ємних значень;

в) проміжок, на якому функція зростає; спадає.

759. Скільки кілограмів 9%-го і 12%-го сплавів срібла потрібно взяти, щоб одержати 50 кг сплаву, що містить 10,8% срібла?

760. Доведіть нерівність:

а) $(2a - 1)^2 > a^2 - 1$; **б)** $a^4 + 16b \geq 8a^2\sqrt{b}$.

761. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 7; \\ x + y = 2; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x - 2y = 1; \\ x^2 + 2 = y^2 + 2xy. \end{cases}$

25. Геометрична прогресія та її властивості

За сприятливих умов деякі бактерії розмножуються так, що їх кількість подвоюється кожні 30 хвилин. Тому, якщо на початку була одна така бактерія, то їх буде:

через 0,5 год	2
через 1 год	4
через 1,5 год	8
через 2 год	16
.....	...

У другому стовпчику одержали послідовність чисел: 2; 4; 8; 16; ..., кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, помноженому на число 2. Така послідовність є прикладом *геометричної прогресії*.

Означення **Геометричною прогресією називають послідовність відмінних від нуля чисел, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, помноженому на одне й те ж число.**

Це число називають *знаменником геометричної прогресії* та позначають буквою q (початкова буква французького слова «*qwoti*» — частка).

Отже, якщо маємо геометричну прогресію b_1; b_2; b_3; ..., то $b_2 = b_1 \cdot q$; $b_3 = b_2 \cdot q$; ..., тобто для будь-якого натурального n виконується рівність

$$b_{n+1} = b_n \cdot q.$$

З означення геометричної прогресії випливає, що частка від ділення будь-якого її члена, починаючи із другого, на попередній член дорівнює одному й тому ж числу — знаменнику q, тобто: $\frac{b_2}{b_1} = q$; $\frac{b_3}{b_2} = q$; … . Отже, $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$.

Правильно і навпаки: якщо у деякій послідовності частка від ділення будь-якого її члена, починаючи із другого, на попередній член дорівнює одному й тому ж числу, то така послідовність є геометричною прогресією.

Геометричні прогресії, як і арифметичні, можуть бути скінченними і нескінченними.

Щоб задати геометричну прогресію, досить вказати її перший член і знаменник. Тоді кожний наступний член через попередній можна обчислити за *рекурентною формулою* $b_{n+1} = b_n \cdot q$.

У таблиці наведені приклади геометричних прогресій для деяких значень b_1 і q.

b_1	q	Геометрична прогресія
1	3	1; 3; 9; 27; 81; ...
1	–2	1; –2; 4; –8; 16; ...
2	$\frac{1}{2}$	2; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; ...
–7	1	–7; –7; –7; –7; –7; ...

Розглянемо *властивості геометричної прогресії*.

1. У геометричній прогресії 1; 3; 9; 27; 81; ... квадрат кожного члена, починаючи із другого, дорівнює добутку двох сусідніх з ним членів:

$$3^2 = 1 \cdot 9;\quad 9^2 = 3 \cdot 27;\quad 27^2 = 9 \cdot 81;\ \ldots .$$

Покажемо, що таку властивість має будь-яка геометрична прогресія.

Нехай маємо геометричну прогресію (b_n) зі знаменником q. Тоді для $n > 1$ виконуються рівності: $\frac{b_n}{b_{n-1}} = q$, $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$. Звідси: $\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$;

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}.$$

Властивість 1 **Квадрат будь-якого члена геометричної прогресії, починаючи із другого, дорівнює добутку двох сусідніх з ним членів.**

Якщо всі члени геометричної прогресії є додатними числами, то з рівності $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ випливає, що $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$. Отже, кожний член такої прогресії, починаючи із другого, є середнім геометричним двох сусідніх з ним членів. З цією властивістю геометричної прогресії і пов'язана її назва.

2. Розглянемо скінченну геометричну прогресію (x_n), яка містить шість членів: –1; 2; –4; 8; –16; 32. Знайдемо добуток крайніх членів цієї прогресії та добутки членів, рівновіддалених від крайніх:

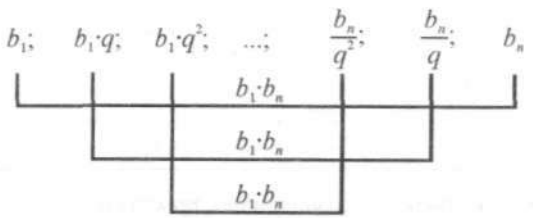
$$x_1 \cdot x_6 = (-1) \cdot 32 = -32;$$
$$x_2 \cdot x_5 = 2 \cdot (-16) = -32;$$
$$x_3 \cdot x_4 = (-4) \cdot 8 = -32.$$

Бачимо, що добутки членів прогресії, рівновіддалених від її крайніх членів, однакові й дорівнюють добутку крайніх членів.

Використаємо ці міркування для довільної скінченної геометричної прогресії $b_1; b_2; \ldots; b_n$.

Нехай $b_1 \cdot b_n = m$. Тоді:

$$b_2 \cdot b_{n-1} = b_1 q \cdot \frac{b_n}{q} = b_1 \cdot b_n = m, \quad b_3 \cdot b_{n-2} = b_2 q \cdot \frac{b_{n-1}}{q} = b_2 \cdot b_{n-1} = m, \ldots .$$



Властивість 2 **Добуток будь-яких двох членів скінченної геометричної прогресії, рівновіддалених від її крайніх членів, дорівнює добутку крайніх членів.**

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Знайти знаменник і третій член геометричної прогресії (b_n): 1; 1,5; … .

• У цій прогресії $b_1 = 1$, $b_2 = 1{,}5$. Тому:

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{1{,}5}{1} = 1{,}5; \quad b_3 = b_2 q = 1{,}5 \cdot 1{,}5 = 2{,}25.$$

Відповідь. 1,5; 2,25. •

Вправа 2. Довести, що послідовність 8; –4; 2; –1; $\frac{1}{2}$ є геометричною прогресією.

• Позначимо члени послідовності: $b_1 = 8$; $b_2 = -4$; $b_3 = 2$; $b_4 = -1$; $b_5 = \frac{1}{2}$.

Знайдемо частки від ділення наступного члена послідовності на попередній:

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2};$$

$$\frac{b_3}{b_2} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2};$$

$$\frac{b_4}{b_3} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2};$$

$$\frac{b_5}{b_4} = \frac{1}{2} : (-1) = -\frac{1}{2}.$$

Оскільки одержані частки дорівнюють одному й тому ж числу $-\frac{1}{2}$, то задана послідовність є геометричною прогресією зі знаменником $-\frac{1}{2}$. •

Вправа 3. Знайти другий член геометричної прогресії: –4; b_2; –25; … .

• За властивістю 1 геометричної прогресії $b_2^2 = b_1 b_3 = (-4) \cdot (-25) = 100$. Звідси $b_2 = 10$ або $b_2 = -10$.

Відповідь. 10 або –10. •

Усно

762. Чи є геометричною прогресією послідовність:

а) 5; 25; 125; 625; … — послідовність натуральних степенів числа 5;

б) –3; 9; –27; 81; … — послідовність натуральних степенів числа –3;

в) 1; 8; 27; 64; … — послідовність кубів натуральних чисел?

763. Вкажіть перший член і знаменник геометричної прогресії:

а) 1; –5; 25; …; **б)** 9; 3; 1; …;

в) –6; –6; –6; …; **г)** 7; $\frac{7}{2}$; $\frac{7}{4}$; … .

764. Знайдіть перші три члени геометричної прогресії (b_n), у якій:

а) $b_1 = 3$; $q = 2$; **б)** $b_1 = 5$; $q = -2$.

765. Знайдіть четвертий член геометричної прогресії:

а) 2; 6; 18; …; **б)** –9; –3; –1; … .

766. Знайдіть знаменник і перший член геометричної прогресії:

а) b_1; 4; 16; …; **б)** b_1; 6; 3; … .

Рівень А

Запишіть перші чотири члени геометричної прогресії (b_n), у якій:

767. **а)** $b_1 = \frac{1}{2}$; $q = 2$; **б)** $b_1 = \frac{81}{25}$; $q = -\frac{1}{3}$.

768. **а)** $b_1 = 4$; $q = -2$; **б)** $b_1 = -3$; $q = 0{,}2$.

769. Знайдіть знаменник і третій та четвертий члени геометричної прогресії (b_n), у якій:

а) $b_1 = 5$; $b_2 = 10$; **б)** $b_1 = 3$; $b_2 = -0{,}3$.

770. Знайдіть знаменник та п'ятий член геометричної прогресії:

а) 3; 9; 27; ...; **б)** –64; 16; –4; … .

771. Знайдіть знаменник та четвертий член геометричної прогресії:

а) 2; –6; 18; …; **б)** 4; 2; 1; … .

772. Знайдіть другий член геометричної прогресії:

а) –36; b_2; –9; …; **б)** 0,7; b_2; 0,063; … .

773. Знайдіть п'ятий член геометричної прогресії (b_n), якщо:

а) $b_4 = 3$; $b_6 = 75$; **б)** $b_4 = -8$; $b_6 = -18$.

774. Чому дорівнює добуток шостого і восьмого членів геометричної прогресії, якщо її сьомий член дорівнює: –8; 1,8?

Рівень Б

775. Чи є послідовними членами геометричної прогресії значення: **а)** $\operatorname{tg}\alpha$; **б)** $\sin\alpha$, де $\alpha = \frac{\pi}{6}$; $\alpha = \frac{\pi}{4}$; $\alpha = \frac{\pi}{3}$?

776. Чи є послідовними членами геометричної прогресії числа:

а) 3^{12}; 3^{14}; 3^{16}; **б)** $\frac{\sqrt{5}}{2}$; 1; $\frac{2\sqrt{5}}{5}$?

777. Виміри прямокутного паралелепіпеда утворюють геометричну прогресію. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо його найменше ребро дорівнює 2,5 см, а найбільше — 10 см.

778. Вік батька, старшого та молодшого синів утворюють геометричну прогресію. Скільки років старшому синові, якщо батькові 32 роки, а молодшому синові — 2 роки?

779. Знайдіть невідомі члени скінченної геометричної прогресії:

а) 1; b_2; 49; b_4; **б)** 8; x; 2; y; $\frac{1}{2}$; **в)** b_1; $\frac{3}{2}$; b_3; $\frac{3}{8}$; b_5.

780. Між числами 1 і 3 вставте таке число, щоб усі три числа утворили геометричну прогресію.

Рівень В

781. Числа 1, x, y є одночасно послідовними членами арифметичної та геометричної прогресій. Знайдіть x та y.

782. Третій член геометричної прогресії дорівнює 2. Знайдіть добуток перших п'яти членів цієї прогресії.

Вправи для повторення

783. Обчисліть:

а) $\frac{2^{-7}\cdot 2^5}{2^{-3}}$; **б)** $\frac{3^{20}-5\cdot 3^{19}}{9^9}$.

784. Розв'яжіть нерівність:

а) $1-2(x-1)<6-5x$; **б)** $\frac{x-1}{3}>1-\frac{x+2}{6}$.

785. Одна сторона прямокутника утричі більша, а друга на 4 см менша від сторони квадрата. Знайдіть площу квадрата, якщо вона на 10 см^2 більша від площі прямокутника.

786. Знайдіть усі значення a, для кожного з яких нерівність $x^2-2ax+4a>0$ виконується для усіх значень x.

26. Формула *n*-го члена геометричної прогресії

Щоб задати геометричну прогресію (b_n), досить вказати її перший член і знаменник, а наступні члени можна знайти за формулою $b_{n+1} = b_n \cdot q$.

Наприклад, запишемо кілька перших членів геометричної прогресії, у якій $b_1 = 5$, $q = 2$:

$$b_2 = 5\cdot 2 = 10;$$

$$b_3 = 10\cdot 2 = 20;$$

.....

Далі можна знайти b_4, b_5 і т. д.

Щоб знайти член цієї прогресії з великим порядковим номером, наприклад, b_{50}, потрібно виконати багато обчислень. Тому відшукання членів геометричної прогресії за формулою $b_{n+1} = b_n \cdot q$ часто є незручним.

Знайдемо коротший шлях відшукання n-го члена геометричної прогресії (b_n) зі знаменником q.

За означенням геометричної прогресії маємо:

$$b_2 = b_1 q;$$

$$b_3 = b_2 q = b_1 q\cdot q = b_1 q^2;$$

$$b_4 = b_3 q = b_1 q^2\cdot q = b_1 q^3.$$

Зауважуємо, що в цих формулах показник степеня числа q на одиницю менший від порядкового номера члена прогресії, який шукаємо. Так, $b_5 = b_1q^4$; $b_{20} = b_1q^{19}$. Отже, можемо записати:

$$b_n = b_1q^{n-1}.$$

Одержану формулу називають *формулою n-го члена геометричної прогресії.*

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Знайти шостий член геометричної прогресії (b_n): 2; 10; 50; ... .

• Маємо: $b_1 = 2$; $q = 10 : 2 = 5$. Тоді $b_6 = b_1 \cdot q^5 = 2 \cdot 5^5 = 6250$.

Відповідь. 6250. •

Вправа 2. Знайти перший член геометричної прогресії (b_n), якщо $b_7 = 32$, $q = -2$.

• Використавши формулу $b_n = b_1q^{n-1}$ для $n = 7$, одержимо:

$$32 = b_1(-2)^6; \quad 32 = b_1 \cdot 64; \quad b_1 = 0{,}5.$$

Відповідь. 0,5. •

Вправа 3. Знайти знаменник геометричної прогресії (b_n), у якій $b_7 = -12$, $b_9 = -108$.

• Використавши формулу n-го члена геометричної прогресії, одержимо: $b_9 = b_1q^8 = -108$, $b_7 = b_1q^6 = -12$. Звідси:

$$\frac{b_1q^8}{b_1q^6} = \frac{-108}{-12}; \quad q^2 = 9; \quad q = -3 \text{ або } q = 3.$$

Відповідь. –3 або 3. •

Рівень А

787. Знайдіть четвертий член геометричної прогресії (b_n), у якій:

а) $b_1 = 6$; $q = 2$; **б)** $b_1 = -2$; $q = 0{,}1$;

в) $b_1 = \frac{1}{3}$; $q = -3$; **г)** $b_1 = -64$; $q = \frac{1}{2}$.

788. Послідовність (b_n) — геометрична прогресія. Знайдіть:

а) b_5, якщо $b_1 = 2$; $q = \frac{1}{2}$; **б)** b_3, якщо $b_1 = 36$; $q = \frac{1}{3}$;

в) b_4, якщо $b_1 = 1$; $q = -2$; **г)** b_3, якщо $b_1 = 100$; $q = 3$.

789. Знайдіть шостий член геометричної прогресії:

а) –32; 16; –8; ...; **б)** $\frac{1}{2}$; 1; 2; ... .

790. Знайдіть п'ятий член геометричної прогресії:

а) 1; 3; 9; ...; **б)** 2; –4; 8; ... .

Знайдіть перший член геометричної прогресії (b_n), у якій:

791. **а)** $b_6 = 243$; $q = 3$; **б)** $b_5 = -\frac{5}{32}$; $q = \frac{1}{2}$.

792. **а)** $b_7 = 128$; $q = 2$; **б)** $b_5 = \frac{3}{625}$; $q = -\frac{1}{5}$.

793. Заповніть таблицю, якщо (b_n) — геометрична прогресія.

b_1	q	n	b_n
3	3	3	
0,6		3	5,4
	–2	9	256

794. Знайдіть знаменник геометричної прогресії (b_n), у якій:

а) $b_5 = 32$, $b_3 = 8$; **б)** $b_6 = -27$; $b_8 = -243$.

795. Знайдіть знаменник геометричної прогресії (b_n), у якій $b_4 = 10$, $b_2 = 0{,}1$.

Рівень Б

796. Знайдіть перший член геометричної прогресії, якщо її четвертий і шостий члени відповідно дорівнюють 9 і 81.

797. Третій член геометричної прогресії з додатним знаменником дорівнює 16, а сума перших двох членів дорівнює 12. Знайдіть п'ятий член прогресії.

798. *Знайдіть шостий член геометричної прогресії (x_n), якщо $x_1 + x_3 = 10$, $x_2 = -4$.*

799. У квадрат зі стороною 8 см вписано квадрат, вершинами якого є середини сторін заданого квадрата. У другий квадрат у такий же спосіб вписано третій квадрат і т. д. Доведіть, що числові значення площ цих квадратів утворюють геометричну прогресію і знайдіть площу п'ятого квадрата.

800. У рівносторонній трикутник, сторона якого дорівнює 24 см, вписано інший трикутник, вершинами якого є середини сторін даного трикутника. У другий трикутник у такий же спосіб вписано третій трикутник і т. д. Доведіть, що числові значення периметрів цих трикутників утворюють геометричну прогресію і знайдіть периметр п'ятого трикутника.

Рівень В

801. Знайдіть чотири числа, що утворюють геометричну прогресію, у якій різниця першого і другого членів дорівнює 28, а різниця четвертого і третього членів дорівнює –252.

802. Три числа утворюють скінченну геометричну прогресію. Сума другого і третього чисел дорівнює 4. Якщо перше число помножити на $\frac{5}{9}$, а два інших залишити без зміни, то нова трійка чисел утворюватиме скінченну арифметичну прогресію. Знайдіть члени геометричної прогресії.

803. Чотири числа утворюють геометричну прогресію. Якщо до перших двох чисел додати по 1, а до третього і четвертого — відповідно 4 і 13, то нова четвірка чисел утворюватиме арифметичну прогресію. Знайдіть числа, які утворюють геометричну прогресію.

Вправи для повторення

804. Спростіть вираз:

а) $\frac{x^3y^2c}{2y}\cdot\frac{4c^3}{yx^7}$; б) $\frac{a^3+b^3}{m^2-n^2}:\frac{a^2-ab+b^2}{(m+n)^2}$.

805. Розв'яжіть нерівність:

а) $\frac{16x+5}{x}\geq 0$; б) $(x+3)^2-64<0$.

806. Для яких значень m один з коренів рівняння $8x^2-6x+m=0$ удвічі більший від іншого?

807. *Із «Бахшалійського рукопису».* Знайдіть натуральне число, яке збільшене на 5 і зменшене на 11 дає повні квадрати.

27. Формула суми перших *n* членів геометричної прогресії

Нехай b_1; b_2; b_3; ... — геометрична прогресія, знаменник якої дорівнює q. Позначимо через S_n суму перших n членів цієї прогресії, тобто

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_{n-1} + b_n. \quad (1)$$

Помноживши обидві частини цієї рівності на q, одержимо:

$$S_nq = b_1q + b_2q + ... + b_{n-1}q + b_nq.$$

За означенням геометричної прогресії: $b_1q = b_2$; $b_2q = b_3$; ...; $b_{n-1}q = b_n$. Тоді:

$$S_nq = b_2 + b_3 + ... + b_n + b_nq. \quad (2)$$

Віднімемо почленно від рівності (1) рівність (2), одержимо:

$$S_n - S_nq = b_1 + \underline{b_2 + b_3 + ... + b_n} - \left(\underline{b_2 + b_3 + ... + b_n} + b_nq\right) = b_1 - b_nq;$$

$$S_n(1-q) = b_1 - b_nq.$$

Якщо $q \neq 1$, то

$$S_n = \frac{b_1 - b_nq}{1-q}. \quad (3)$$

Урахувавши, що $b_n = b_1q^{n-1}$, одержимо $S_n = \frac{b_1 - b_1q^n}{1-q}$. Отже,

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} \text{ або } S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}. \quad (4)$$

Формули (3) і (4) називають *формулами суми перших n членів геометричної прогресії.*

Якщо $q = 1$, то кожний член геометричної прогресії дорівнює b_1, тому $S_n = n \cdot b_1$.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Знайти суму восьми перших членів геометричної прогресії (b_n): 3; –6; 12; ... .

• Маємо: $b_1 = 3$; $q = \frac{-6}{3} = -2$. Тоді за формулою $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ знаходимо: $S_8 = \frac{3\cdot(1-(-2)^8)}{1+2} = \frac{3\cdot(1-256)}{3} = -255$.

Відповідь. –255. •

Вправа 2. Знайти перший член геометричної прогресії (b_n), якщо четвертий її член утричі більший від третього, а сума перших п'яти членів дорівнює $-12{,}1$.

• Оскільки $b_4 = 3b_3$, то $q = 3$. За умовою $S_5 = -12{,}1$, тому:

$$-12{,}1 = \frac{b_1(1-3^5)}{1-3}; \quad -12{,}1 = 121b_1; \quad b_1 = -0{,}1.$$

Відповідь. $-0{,}1$. •

Рівень А

808. Знайдіть суму перших шести членів геометричної прогресії (b_n), у якій:

а) $b_1 = -3$; $q = 2$; **б)** $b_1 = 0{,}5$; $q = -2$.

Знайдіть суму перших n членів геометричної прогресії (b_n), у якій:

809. **а)** $b_1 = -1$; $q = -5$; $n = 5$; **б)** $b_1 = -64$; $q = -\frac{1}{2}$; $n = 8$.

810. **а)** $b_1 = -4$; $q = 3$; $n = 4$; **б)** $b_1 = 1$; $q = -2$; $n = 6$.

811. Знайдіть суму перших шести членів геометричної прогресії:

а) $2; -1; \frac{1}{2}; \ldots$; **б)** $-5; 10; -20; \ldots$.

812. Знайдіть суму перших п'яти членів геометричної прогресії:

а) $3; -6; 12; \ldots$; **б)** $0{,}2; 0{,}6; 1{,}8; \ldots$.

Рівень Б

813. Знайдіть перший член геометричної прогресії зі знаменником $-\frac{1}{2}$, якщо сума перших восьми її членів дорівнює $1\frac{21}{64}$.

814. Знайдіть перший член геометричної прогресії, у якій $q = \frac{1}{2}$, $S_7 = 254$.

815. Знайдіть суму членів геометричної прогресії (b_n) від третього до восьмого включно, якщо:

а) $b_1 = 2$; $q = 3$; **б)** $b_1 = -16$; $q = 0{,}5$.

816. Знайдіть суму членів геометричної прогресії (b_n) від четвертого до восьмого включно, якщо $b_1 = 5$; $q = -2$.

817. Доведіть, що послідовність, яка задана формулою $x_n = 2 \cdot 3^n$, є геометричною прогресією і знайдіть суму перших шести її членів.

Рівень В

818. Різниця п'ятого і третього членів геометричної прогресії дорівнює 36, а різниця третього і першого — 9. Знайдіть суму перших восьми членів цієї прогресії.

819. Три числа, сума яких дорівнює 21, утворюють арифметичну прогресію. Якщо від другого числа відняти 1, до третього — додати 1, а перше число залишити без зміни, то нова трійка чисел утворить геометричну прогресію. Знайдіть числа, які утворюють геометричну прогресію.

820. Знайдіть восьмий член геометричної прогресії (b_n), якщо $b_1 = 3$ і для деякого натурального n виконуються рівності $b_n = 96$, $S_n = 189$.

821. Сума перших трьох членів геометричної прогресії з додатним знаменником дорівнює 14, а сума членів із третього до п'ятого включно — 3,5. Знайдіть суму перших п'яти членів прогресії.

Вправи для повторення

822. Спростіть вираз:

а) $\frac{1}{\sqrt{6}-2} - \frac{1}{\sqrt{6}+2}$; **б)** $\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}$.

823. Побудуйте графік функції:

а) $y = x^2 - 5$; **б)** $y = x^2 + 6x + 10$.

824. Розв'яжіть нерівність:

а) $5x + m \geq 0$; **б)** $\frac{2x-1}{x+m} \leq 0$,

де m — сума перших п'яти членів арифметичної прогресії: $1; -2; -5; \ldots$.

825. На заводі для виготовлення одного електродвигуна типу A використовують 2 кг міді й 1 кг свинцю, а на виготовлення одного електродвигуна типу B — 3 кг міді й 2 кг свинцю. Скільки електродвигунів кожного типу було виготовлено на заводі, якщо відомо, що всього використали 130 кг міді й 80 кг свинцю?

28. Сума нескінченної геометричної прогресії, у якій $|q| < 1$

Нехай маємо прямокутник $ABCD$ зі сторонами 1 см і 4 см (рис. 74). Його площа дорівнює $1 \cdot 4 = 4$ (см^2).

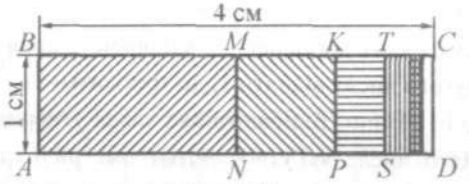


Рис. 74

Знайдемо площу цього прямокутника по-іншому.

Відрізком MN, що з'єднує середини протилежних сторін BC і AD прямокутника, поділимо його навпіл. Площі утворених прямокутників $ABMN$ і $NMCD$ дорівнюють по 2 см^2. Утворений праворуч прямокутник знову поділимо навпіл, з'єднавши середини K і P протилежних сторін. Площі утворених прямокутників $NMKP$ і $PKCD$ дорівнюють по 1 см^2. Аналогічно утворений прямокутник $PKCD$ знову поділимо навпіл відрізком TS на два прямокутники з площами по $\frac{1}{2}$ см^2 і т. д.

Знайдемо суму площ прямокутників $ABMN$, $NMKP$, $PKTS$ і т. д. Числове значення суми площ цих прямокутників дорівнюватиме сумі чисел $2; 1; \frac{1}{2}; \ldots$. Послідовність $2; 1; \frac{1}{2}; \ldots$ є нескінченною геометричною прогресією, перший член якої дорівнює 2, а знаменник — $\frac{1}{2}$.

Знайдемо суму перших n членів цієї прогресії:

$$S_n = \frac{2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{\frac{1}{2}} = 4\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = 4-\frac{1}{2^{n-2}}.$$

Якщо число n доданків суми S_n необмежено збільшується, то значення дробу $\frac{1}{2^{n-2}}$ наближається до нуля, а різниця $4-\frac{1}{2^{n-2}}$ наближається до числа 4, кажуть: *прямує до числа* 4. Число 4 називають *сумою нескінченної геометричної прогресії* $2; 1; \frac{1}{2}; \ldots$ і записують $2+1+\frac{1}{2}+\ldots = 4$.

Отже, сума площ прямокутників $ABMN$, $NMKP$, $PKTS$ і т. д. дорівнює 4 см^2, тобто дорівнює площі прямокутника $ABCD$.

Узагальнимо розглянутий приклад.

Нехай $b_1; b_2; b_3; \ldots$ — довільна нескінченна геометрична прогресія, у якій $|q| < 1$.

Сума перших n членів цієї прогресії обчислюється за формулою $S_n = \frac{b_1 - b_1 q^n}{1-q}$. Перетворимо вираз у правій частині останньої рівності: $S_n = \frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1}{1-q}\cdot q^n$. Оскільки $|q| < 1$, то при необмеженому збільшенні n множник q^n прямує до нуля, а, отже, до нуля прямує і добуток $\frac{b_1}{1-q}\cdot q^n$. Тоді сума S_n прямує до числа $\frac{b_1}{1-q}$.

Число $\frac{b_1}{1-q}$ називають *сумою нескінченної геометричної прогресії зі знаменником* $|q| < 1$ і записують: $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots = \frac{b_1}{1-q}$. Позначимо цю суму через S. Тоді

$$\boldsymbol{S = \frac{b_1}{1-q}}.$$

Одержану формулу називають *формулою суми нескінченної геометричної прогресії, у якій* $|q| < 1$.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Знайти суму нескінченної геометричної прогресії (b_n): $6; -2; \ldots$.

• За умовою маємо: $b_1 = 6$; $b_2 = -2$. Тоді $q = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$. Маємо геометричну прогресію, у якій $|q| < 1$. За формулою $S = \frac{b_1}{1-q}$ знаходимо:

$$S = \frac{6}{1+\frac{1}{3}} = 6 : \frac{4}{3} = 6\cdot\frac{3}{4} = \frac{9}{2} = 4{,}5.$$

Відповідь. 4,5. •

Рівень А

826. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії (b_n), у якій:

а) $b_1 = 7;\ q = -\frac{1}{2}$; **б)** $b_1 = -100;\ q = \frac{1}{50}$.

Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії:

827. **а)** $3;\ 1;\ \frac{1}{3};\ \ldots$; **б)** $-10;\ -4;\ -\frac{8}{5};\ \ldots$;

в) $32;\ -16;\ 8;\ \ldots$; **г)** $4{,}2;\ 0{,}84;\ 0{,}168;\ \ldots$.

828. **а)** $1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \ldots$; **б)** $9;\ -3;\ 1;\ \ldots$;

в) $-6;\ -4;\ -\frac{8}{3};\ \ldots$; **г)** $2;\ 1{,}5;\ 1{,}125;\ \ldots$.

829. *Задача Архімеда.* Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії $1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\ldots$.

Рівень Б

830. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії:

а) $3\sqrt{7};\ \sqrt{7};\ \ldots$; **б)** $2+\sqrt{3};\ -\frac{2+\sqrt{3}}{2};\ \ldots$.

Знайдіть перший член нескінченної геометричної прогресії, у якій:

831. **а)** $q = \frac{3}{5};\ S = 50$; **б)** $q = -\frac{1}{2};\ S = 28$.

832. **а)** $q = \frac{1}{7};\ S = -14$; **б)** $q = \frac{5}{6};\ S = 96$.

833. Знайдіть знаменник q ($|q| < 1$) геометричної прогресії (b_n), якщо $b_1 = 80$, $S = 100$.

Знайдіть суму, якщо доданки є членами нескінченної геометричної прогресії:

834. **а)** $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots$; **б)** $x^2 - x^4 + x^6 - x^8 + \ldots$ ($|x| < 1$).

835. **а)** $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \ldots$; **б)** $1 + a + a^2 + a^3 + \ldots$ ($|a| < 1$).

836. Знайдіть число членів арифметичної прогресії, перший член якої дорівнює 5, а різниця — 1, якщо сума всіх її членів дорівнює сумі нескінченної геометричної прогресії зі знаменником $|q| < 1$, другий і третій члени якої відповідно дорівнюють $15\frac{3}{7}$ і $13\frac{11}{49}$.

Рівень В

837. Сума нескінченної геометричної прогресії зі знаменником $|q| < 1$ дорівнює 3, а сума квадратів її членів дорівнює 4,5. Знайдіть перший член і знаменник прогресії.

838. *Задача Ферма.* Доведіть: якщо S — сума нескінченної геометричної прогресії зі знаменником $|q| < 1$, то $\frac{S}{S-b_1} = \frac{b_1}{b_2}$.

839. У квадрат зі стороною 4 см вписано коло, у коло вписано квадрат, а у квадрат знову вписано коло і т. д. Знайдіть:

а) суму площ усіх квадратів; **б)** суму довжин усіх кіл.

Вправи для повторення

840. Спростіть вираз $\frac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}-b^{-1}} \cdot \frac{a^3b^3}{a+b}$ і знайдіть його значення, якщо $a = 2^{-1}$, $b = 3^{-1}$.

841. З послідовності натуральних чисел, які кратні 3 і не перевищують 100, навмання вибирають одне число. Знайдіть імовірність того, що це число виявиться кратним 5.

842. Бригада робітників за кілька днів виготовила 400 деталей. Якби робітники виготовляли за день на 20 деталей більше, то закінчили б роботу на один день швидше. Скільки деталей виготовляли робітники за один день?

843*. Для яких значень a система рівнянь $\begin{cases} ax + 3y = 5; \\ 2x - y = 4 \end{cases}$ не має розв'язків?

29. Розв'язування задач, пов'язаних з арифметичною та геометричною прогресіями

1. Обчислення сум. Вивчаючи арифметичну і геометричну прогресії, ми знаходили суми перших n їхніх членів. Знаємо також, як знайти суму нескінченної геометричної прогресії зі знаменником $q| < 1$. Проте є задачі, розв'язуючи які, доводиться шукати суми чисел, що не утворюють ні арифметичної, ні геометричної прогресій. Такі суми деколи можна знайти, перетворивши певним чином їхні доданки.

Приклад 1. Знайти суму $1\frac{1}{2}+3\frac{1}{4}+5\frac{1}{8}+...+13\frac{1}{128}$.

• Позначимо цю суму через S і запишемо її так:

$$S=\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(3+\frac{1}{4}\right)+\left(5+\frac{1}{8}\right)+...+\left(13+\frac{1}{128}\right)=$$

$$=(1+3+5+...+13)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{128}\right).$$

У перших дужках записана сума членів арифметичної прогресії (a_n), у якої $a_1 = 1$, $d = 2$. Знайдемо, яким за номером членом цієї прогресії є число 13:

$$13 = a_1 + (n-1)\cdot d;\quad 13 = 1 + (n-1)\cdot 2;\quad n = 7.$$

Отже, в перших дужках записана сума перших семи членів арифметичної прогресії.

У других дужках записана сума перших семи членів геометричної прогресії (b_n), у якій $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$. Використавши формули суми перших n членів арифметичної та геометричної прогресій, знаходимо:

$$S=\frac{1+13}{2}\cdot 7+\frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^7\right)}{1-\frac{1}{2}}=49+\frac{127}{128}=49\frac{127}{128}.$$

Відповідь. $49\frac{127}{128}$. •

2. Запис нескінченних періодичних десяткових дробів у вигляді звичайних дробів. Розглянемо приклад.

Приклад 2. Записати число 0,(7) у вигляді звичайного дробу.

• Нескінченний десятковий дріб 0,(7) = 0,777... запишемо у вигляді такої суми: 0,(7) = 0,7 + 0,07 + 0,007 + ... Доданки 0,7; 0,07; 0,007; ... — члени нескінченної геометричної прогресії з першим членом 0,7 і знаменником $q = 0{,}1$ ($|q| < 1$). Сума цієї прогресії: $S=\frac{0{,}7}{1-0{,}1}=\frac{0{,}7}{0{,}9}=\frac{7}{9}$. Тому $0{,}(7)=\frac{7}{9}$.

Відповідь. $\frac{7}{9}$. •

3. Розв'язування рівнянь. Розглянемо приклад.

Приклад 3. Розв'язати рівняння

$$4x + 7x + ... + 25x = 290,$$

у якому коефіцієнти 4, 7, … , 25 утворюють арифметичну прогресію.

• Запишемо рівняння так:

$$(4 + 7 + ... + 25)\cdot x = 290.$$

У дужках записана сума перших членів арифметичної прогресії, у якій $a_1 = 4$, $d = 3$. Знайдемо кількість членів. Нехай число 25 є її n-м членом. За формулою n-го члена $25 = 4 + (n-1)\cdot 3$, звідки матимемо:

$$21 = (n-1)\cdot 3;\quad 7 = n-1;\quad n = 8.$$

Отже, у дужках записана сума перших 8 членів арифметичної прогресії. Тоді одержимо:

$$\frac{4+25}{2}\cdot 8\cdot x=290;\quad 29\cdot 4x=290;\quad x=2{,}5.$$

Відповідь. 2,5. •

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Записати число 3,1(23) у вигляді звичайного дробу.

• Число 3,1(23) = 3,12323... запишемо у вигляді такої суми:

$$3{,}1(23) = 3 + 0{,}1 + 0{,}023 + 0{,}00023 + \ldots .$$

Доданки 0,023; 0,00023; ... — члени нескінченної геометричної прогресії з першим членом 0,023 і знаменником $q = 0{,}01$ ($|q| < 1$). Сума цієї прогресії дорівнює: $S=\frac{0{,}023}{1-0{,}01}=\frac{0{,}023}{0{,}99}=\frac{23}{990}$. Тому

$$3{,}1(23)=3+\frac{1}{10}+\frac{23}{990}=3\frac{122}{990}=3\frac{61}{495}.$$

Відповідь. $3\frac{61}{495}$. •

Вправа 2. Розв'язати рівняння:

$$(x^2-x)+(x^2-3x)+(x^2-5x)+...+(x^2-71x)=-1260.$$

• Запишемо рівняння у вигляді:

$$(x^2+x^2+x^2+...+x^2)-(1+3+5+...+71)\cdot x=-1260.$$

У других дужках записана сума перших n членів арифметичної прогресії, у якій $a_1=1$, $d=2$. Знайдемо n. Нехай число 71 є її n-м членом. За формулою n-го члена $71=1+(n-1)\cdot 2$, звідки $n=36$. Урахувавши, що в перших дужках записана сума тридцяти шести доданків, кожний з яких дорівнює x^2, матимемо:

$$36x^2-\frac{1+71}{2}\cdot 36\cdot x=-1260;\quad 36x^2-36\cdot 36x+1260=0;$$

$$x^2-36x+35=0;\quad x_1=1;\ x_2=35.$$

Відповідь. 1; 35. •

Вправа 3. Знайти суму $9+99+999+...+\underbrace{99...9}_{n\ \text{разів}}$.

• Позначимо дану суму через S. Записавши доданки у вигляді $9=10-1$, $99=10^2-1$, $999=10^3-1$ і т. д., матимемо:

$$S=(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+...+(10^n-1)=$$

$$=(10+10^2+10^3+...+10^n)-n.$$

У дужках записано суму перших n членів геометричної прогресії (b_n), у якій $b_1=10$, $q=10$. Тому:

$$S=\frac{10(1-10^n)}{1-10}-n=\frac{10^{n+1}-10-9n}{9}.$$

Відповідь. $\frac{10^{n+1}-10-9n}{9}$. •

Рівень Б

Запишіть у вигляді звичайного дробу число:

844. **а)** 0,(6); **б)** 1,(3); **в)** 3,(12); **г)** 0,(25); **д)** 1,2(3); **е)** 0,1(13); **є)** 5,25(7); **ж)** 0,13(24).

845. **а)** 0,(15); **б)** 3,(7); **в)** 6,1(3); **г)** 2,24(1); **д)** 0,02(5); **е)** 1,1(20).

Знайдіть суму:

846. **а)** $1\frac{1}{2}+1\frac{1}{4}+1\frac{1}{8}+...+1\frac{1}{512}$;

б) $\left(2^2-1^2\right)+\left(4^2-3^2\right)+...+\left((2n)^2-(2n-1)^2\right)$.

847. $1\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}+4\frac{1}{2}+8\frac{1}{2}+...+128\frac{1}{2}$.

Розв'яжіть рівняння:

848. $(2x-100)+(4x-100)+...+(18x-100)=x^2-100$.

849. $x+3x+5x+...+21x=x^2+120$.

850. Куля котиться похилим жолобом. За першу секунду вона пройшла 0,2 м, а за кожну наступну — на 0,1 м більше, ніж за попередню. Який шлях пройшла куля за дев'яту секунду?

851. Тіло, яке вільно падає, за першу секунду проходить 4,9 м, а за кожну наступну — на 9,8 м більше, ніж за попередню. Який шлях пройде тіло, що вільно падає, за шосту секунду після початку падіння?

852. Після реконструкції станків у цеху за перший день виготовили 40 деталей, а далі протягом місяця почали виготовляти щодня на 3 деталі більше, ніж за попередній день. За який день роботи буде виготовлено 100 деталей? За скільки днів у цеху буде виготовлено 178 деталей?

853. Гальмуючи, автомобіль за першу секунду проїхав 15 м, а за кожну наступну — на 3 м менше, ніж за попередню. Знайдіть гальмівний шлях автомобіля.

854. У трикутнику ABC провели середню лінію A_1C_1 паралельно стороні AC. У трикутнику A_1BC_1 знову провели середню лінію A_2C_2 паралельно A_1C_1 і т. д. Знайдіть висоту шостого трикутника, проведену з вершини B, якщо висота BH трикутника ABC дорівнює 16 см.

Рівень В

855. Знайдіть суму, де n — натуральне число:

а) $\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+...+\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$; **б)** $1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+...+n\cdot 2^n$;

в) $1+11+111+...+\underbrace{11...1}_{n\ \text{разів}}$.

Вказівки. **а)** Запишіть доданки у вигляді різниці двох дробів. Наприклад, $\frac{2}{3\cdot 5}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$. **б)** Позначте суму через S. Знайдіть $2S$, а потім різницю $2S-S$.

856. Розв'яжіть рівняння:

а) $1 + x + x^2 + x^3 + ... = 3$ $(|x| < 1)$;

б) $(1+3+...+(2x-1)) + \left(3,5+5+...+\frac{3x+4}{2}\right) = 105$, x — натуральне.

857. Доведіть нерівність, де n — натуральне число:

а) $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} < 1$;

б) $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + ... + \frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}} < \frac{\sqrt{2n+1}}{2}$.

858. Два тіла рухаються назустріч одне одному із двох точок, відстань між якими дорівнює 127 м. Перше тіло рухається рівномірно зі швидкістю 5 м/с. Друге, яке почало рухатися на 3 с пізніше від першого, за першу секунду пройшло 5 м, а за кожну наступну — на 2 м більше, ніж за попередню. Скільки часу рухатиметься друге тіло до зустрічі?

859. Атмосферний тиск зменшується на 10% зі збільшенням висоти на 700 м. Який атмосферний тиск на висоті 2,8 км, якщо на вершині Ельбруса (висота над рівнем моря 5600 м) він дорівнює 50 кПа?

Вправи для повторення

860. Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt{x+m}$, де m — найбільший корінь рівняння $x^2 - 4x - 12 = 0$.

861. Знайдіть цілі розв'язки системи нерівностей $\begin{cases} 2n-3 < 3n+5; \\ 6-n > 4(n+3). \end{cases}$

862*. Для яких значень a рівняння $x - 6 = 3(x - a)$ має від'ємний корінь?

863. Вкладник вніс до банку певну суму під 15% річних і через 2 роки мав на рахунку 2645 грн. Яку суму вніс вкладник до банку?

Цікаво знати

Слово «*прогресія*» походить від латинського слова «*progressio*» й означає «*рух уперед*» (як і слово «прогрес»). Уперше цей термін як математичний вживається у працях римського вченого Боеція (V–VI ст.).

Прогресії як часткові види числових послідовностей, трапляються у папірусах II тисячоліття до н. е. Перші із задач на прогресії, що дійшли до нас, пов'язані з господарською діяльністю, а саме — з розподілом продуктів, поділом спадку тощо.

Найдавнішою задачею, пов'язаною з прогресіями, вважають задачу з єгипетського папірусу Ахмеса Райнда про поділ 100 мір хліба між п'ятьма людьми так, щоб другий одержав на стільки більше від першого, на скільки третій одержав більше від другого і т. д. У цій задачі йдеться про арифметичну прогресію, сума перших п'яти членів якої дорівнює 100.

В одній із задач цього папірусу подано формулу першого члена арифметичної прогресії, яку в сучасній символіці записують так:

$$a = \frac{S}{n} - (n-1)\frac{d}{2},$$

де a — перший член, n — число членів, S — сума перших n членів, d — різниця прогресії. Переконайтеся, що ця формула є правильною.

Зі знаходженням суми членів арифметичної прогресії пов'язана така цікава історія. Відомий німецький математик Карл Гаус (1777–1875) ще у школі виявив блискучі математичні здібності. Якось учитель запропонував учням знайти суму перших ста натуральних чисел. Ледь устиг учитель прочитати умову задачі, як малий Гаус підняв руку: «Уже». Увесь клас був захоплений швидкістю, з якою він провів підрахунок. Поміркуйте, як рахував Гаус.

Давно неабиякою популярністю користується задача-легенда, яка належить до початку нашої ери. Індійський цар Шерам покликав до себе винахідника гри у шахи, свого підданого Сету, щоб нагородити його за кмітливу вигадку. Коли винахідникові запропонували самому вибрати винагороду, він попросив за першу клітинку шахової дошки дати йому 1 зернину пшениці, за другу — 2 зернини, за третю — 4 і т. д. Виявилося, що цар не зміг виконати прохання Сети. За останню 64-ту клітинку шахової дошки довелося б віддати 2^{63} зернин пшениці, а за всі клітинки — таку кількість зернин, яка дорівнює сумі членів геометричної прогресії: 1; 2; 2^2; 2^3; ...; 2^{63}. Ця сума дорівнює $2^{64} - 1 = 18446744073709551615$. Таку кількість зернин пшениці можна зібрати із площі, яка приблизно у 2000 разів більша від площі усієї поверхні Землі.

Запитання і вправи для повторення § 4

1. Наведіть приклади послідовностей.
2. Що називають арифметичною прогресією? Наведіть приклади арифметичних прогресій.
3. Як знайти різницю арифметичної прогресії?
4. Сформулюйте властивості арифметичної прогресії.
5. Запишіть формулу n-го члена арифметичної прогресії.
6. За якими формулами шукають суму перших n членів арифметичної прогресії?
7. Що називають геометричною прогресією? Наведіть приклади геометричних прогресій.
8. Як знайти знаменник геометричної прогресії?
9. Сформулюйте властивості геометричної прогресії.
10. Запишіть формулу n-го члена геометричної прогресії.
11. За якими формулами шукають суму перших n членів геометричної прогресії?
12. За якою формулою шукають суму нескінченної геометричної прогресії зі знаменником $|q| < 1$?

864. Знайдіть члени послідовності (a_n) із третього до шостого включно, якщо:
а) $a_n = 4 - 3n^2$; **б)** $a_n = 3 \cdot (-2)^n$.

865. Послідовність задана формулою $x_n = n^2 - 6$. Чи є членом цієї послідовності число 138; число 150?

866. Запишіть перші чотири члени послідовності (a_n), якщо:
а) $a_1 = -5$; $a_{n+1} = 2a_n + 3$; **б)** $a_1 = 3$; $a_2 = 5$; $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 2a_n$.

867. Знайдіть порядкові номери членів послідовності $a_n = n^2 - 5n$, для яких виконується нерівність $a_n + 6 \le 0$.

868*. Знайдіть найменший член послідовності $x_n = 2n - 5$, для якого виконується нерівність $|x_n - 7| \le 3{,}2$.

869. Чи є числа –12, –11, –9 послідовними членами арифметичної прогресії?

870. Знайдіть різницю та четвертий член арифметичної прогресії:
а) 15; 19; 23; ...; **б)** 1,2; –1,3; –3,8... .

871. Запишіть формулу n-го члена арифметичної прогресії (a_n):
а) 13; 1; –11; ...; **б)** –4; –3,5; –3; ... .

872. Знайдіть різницю арифметичної прогресії (a_n), якщо:
а) $a_3 = 16$; $a_7 = 4$; **б)** $a_4 = 10$; $a_{21} = -24$.

873. В арифметичній прогресії (x_n): $x_2 = -8$; $x_9 = 27$. Знайдіть x_5.

874. Знайдіть периметр п'ятикутника, якщо відомо, що довжина однієї його сторони дорівнює 7 см, а кожної наступної — на 2 см більша від попередньої.

875. Автомобіль після старту за першу секунду пройшов 1,75 м, а далі збільшував свою швидкість, проходячи за кожну наступну секунду на 3,5 м більше, ніж за попередню. Який шлях пройшов автомобіль за 5 с?

876. Заповніть таблицю, якщо (a_n) — арифметична прогресія:

a_1	d	a_n	n	S_n
0,1	0,2			22,5
	–0,6	9,5	17	
		–2,5	11	0

877. Знайдіть суму перших десяти членів арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_3 = 6$; $a_8 = 26$.

878. Скільки потрібно взяти членів арифметичної прогресії –100; –80; ..., щоб їх сума дорівнювала 600?

879. Різниця арифметичної прогресії дорівнює 2,1, а сума перших п'яти її членів дорівнює 0,5. Знайдіть:
а) перший член прогресії; **б)** п'ятий член прогресії.

880. Знайдіть суму членів арифметичної прогресії 7; 21; 35; ... з дев'ятого до двадцять першого включно.

881. Знайдіть суму всіх:
а) натуральних чисел від 11 до 101 включно;
б) двоцифрових чисел, які не перевищують 75;
в) натуральних чисел, кратних 3, які не перевищують 121;
г) непарних натуральних чисел, які не перевищують 125;
д) парних натуральних чисел від 70 до 170 включно;
е) двоцифрових чисел, які при діленні на 7 дають в остачі 1.

882. Знайдіть суму перших шести членів арифметичної прогресії з першим членом x та різницею y, якщо $(x; y)$ — розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x + 5y = -6; \\ x + 3y = -4. \end{cases}$$

883. Чи є послідовними членами геометричної прогресії числа 2; 0,8; 0,32?

884. Знайдіть знаменник та четвертий член геометричної прогресії:
а) 5; 20; 80; ...; **б)** 1,6; 0,4; 0,1; ... .

885. Знайдіть п'ятий член геометричної прогресії:

а) 1; –3; ...; б) $\sqrt{\frac{2}{5}}$; $\frac{1}{\sqrt{5}}$; ... .

886. Знайдіть знаменник геометричної прогресії (b_n), якщо $b_3 = \frac{9}{25}$; $b_5 = \frac{81}{625}$.

887. Знайдіть суму перших восьми членів геометричної прогресії (b_n), якщо $b_8 = -\frac{1}{64}$; $q = -\frac{1}{2}$.

888*. Знайдіть чотири числа, які утворюють геометричну прогресію, якщо сума крайніх членів дорівнює –126, а сума середніх — –30.

889*. Дано рівнобедрений прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють по 1 см. Гіпотенуза цього трикутника є катетом іншого рівнобедреного прямокутного трикутника і т. д. Знайдіть довжину гіпотенузи десятого такого трикутника.

890*. Сума трьох чисел, які утворюють арифметичну прогресію з додатною різницею, дорівнює 51. Якщо від цих чисел відняти відповідно числа 1, 7 і 8, то отримаємо три числа, які утворюють геометричну прогресію. Знайдіть числа, які утворюють арифметичну прогресію.

891*. Три числа, з яких перше більше від третього на 9, є послідовними членами геометричної прогресії. Якщо від другого числа відняти 7, до третього додати 13, а перше залишити без змін, то нова трійка чисел утворить арифметичну прогресію. Знайдіть числа, які утворюють геометричну прогресію.

892. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії:

а) 1,5; 0,5; ...; б) $3-\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{2}-3}{2}$; ... .

893. Перший член і сума нескінченної геометричної прогресії зі знаменником $|q| < 1$ відповідно дорівнюють 16 і 9,6. Запишіть перші три члени цієї прогресії.

894. Запишіть у вигляді звичайного дробу число:

а) 0,(8); б) 0,(12); в) 51,(3); г) 14,(1);
д) 1,3(2); е) 0,4(3); є) 0,1(12); ж) 24,35(2).

895. Розгляньте рисунок 75. На бісектрисі OK кута xOy позначено точку $M(8; 8)$. З точки M на осі координат опущено перпендикуляри MA і MB, у результаті чого утворився квадрат $OBMA$. З точки M_1, яка є серединою діагоналі OM, знову опущено перпендикуляри на осі координат і знову утворився квадрат, і т. д. Знайдіть:

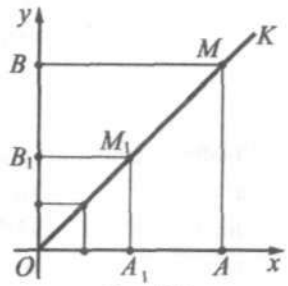


Рис. 75

а) площу шостого квадрата;
б) суму площ усіх таких квадратів;
в) суму периметрів усіх таких квадратів.

896. Дано трикутник ABC зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см. Трикутник $A_1B_1C_1$ подібний трикутнику ABC з коефіцієнтом подібності $\frac{1}{2}$. Трикутник $A_2B_2C_2$ подібний трикутнику $A_1B_1C_1$ із таким же коефіцієнтом подібності, і т. д. Знайдіть:

а) суму периметрів усіх таких трикутників;
б) суму площ усіх таких трикутників.

897*. Знайдіть суму, де n — натуральне число:

а) $\frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + ... + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$;

б) $\frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + ... + \frac{n}{2^n}$.

898*. Розв'яжіть рівняння:

а) $1 - x + x^2 - x^3 + ... = 5$ $(|x| < 1)$;

б) $1 + 4 + 7 + ... + (3x - 2) = 145$, x — натуральне число.

899. Побудуйте графік функції $y = (x - m)^2$, де m — перший додатний член арифметичної прогресії: –81; –77; ... .

900. Розв'яжіть нерівність $x^2 - 3x + m > 0$, де m — перший член геометричної прогресії (b_n), у якої $b_3 = 16$, $q = -2$.

Завдання для самоперевірки № 5

Рівень 1

1. Знайдіть різницю арифметичної прогресії 5; –2; –9; … .

а) –3; **б)** 3; **в)** –7; **г)** 7.

2. Знайдіть п'ятий член арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_1 = -5$; $d = 3$.

а) –7; **б)** 7; **в)** –17; **г)** 17.

3. Знайдіть суму перших дев'яти членів арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_1 = 2$; $a_9 = -6$.

а) 4; **б)** 18; **в)** –18; **г)** –4.

4. Знайдіть четвертий член геометричної прогресії (b_n), якщо $b_1 = -2$; $q = \frac{1}{2}$.

а) $\frac{1}{4}$; **б)** $-\frac{1}{4}$; **в)** 4; **г)** –4.

5. Знайдіть суму перших п'яти членів геометричної прогресії (b_n), у якій $b_1 = -5$; $q = 2$.

а) 160; **б)** 155; **в)** –160; **г)** –155.

6. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії (b_n), якщо $b_1 = 2$: $q = \frac{1}{3}$.

а) $\frac{1}{3}$; **б)** 3; **в)** 6; **г)** $\frac{4}{3}$.

Рівень 2

7. Знайдіть десятий член арифметичної прогресії:

а) 10,2; 8,2; …; **б)** –3,5; –5,5; … .

8. Знайдіть суму перших п'яти членів арифметичної прогресії (x_n), якщо $x_1 = 2$, $d = -3$.

9. Знайдіть четвертий член геометричної прогресії 3; $-\frac{3}{2}$; … .

10. Знайдіть суму перших п'яти членів геометричної прогресії –4; –8; … .

11. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії: 12; 4; $\frac{4}{3}$; … .

Рівень 3

12. Чи є число –32 членом арифметичної прогресії (a_n), у якій $a_1 = -8$; $d = -2{,}4$?

13. Знайдіть перший член і різницю арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_1 + a_6 = -12{,}6$; $a_5 - a_2 = -9$.

14. Знайдіть суму всіх двоцифрових чисел, які при діленні на 3 дають в остачі 2.

15. Знайдіть перший член і суму перших семи членів геометричної прогресії (b_n), якщо $b_7 = 192$; $q = 2$.

16. Запишіть у вигляді звичайних дробів числа: 0,(4); 5,(53).

Рівень 4

17. Знайдіть кількість додатних членів арифметичної прогресії 91; 89,5; … .

18. Знайдіть суму перших двадцяти членів арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_5 = 1$; $S_6 = -1{,}2$.

19. Розв'яжіть рівняння: $105 - (7 + 12 + ... + (2 + 5x)) = 20$, де x — натуральне число.

20. Сума трьох перших членів геометричної прогресії дорівнює 13, а третій її член більший від першого на 8. Знайдіть знаменник цієї прогресії.

21. Три числа, з яких третє дорівнює –8, утворюють геометричну прогресію. Якщо замість третього числа взяти –6, то нова трійка чисел утворить арифметичну прогресію. Знайдіть числа, які утворюють геометричну прогресію.