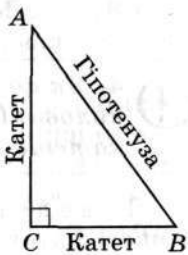
407④. Відрізок AB, довжина якого 22,8 см, поділено на три частини. Дві з них відносяться, як 1:2, а третя — на 1,8 см більша за більшу з двох перших частин. Знайдіть довжини частин відрізка.

Урок 32

§ 19. ПРЯМОКУТНІ ТРИКУТНИКИ. ВЛАСТИВОСТІ ТА ОЗНАКИ РІВНОСТІ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ

Нагадаємо, що *трикутник* називають *прямокутним*, якщо один з його кутів прямий. На малюнку 283 прямокутний трикутник ABC, у нього $\angle C = 90^\circ$. Сторону прямокутного трикутника, яка лежить проти прямого кута, називають ***гіпотенузою***, а дві інші сторони — ***катетами***.



Мал. 283

Розглянемо властивості прямокутних трикутників.

1. *Сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°.*

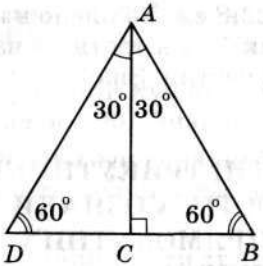
Справді, сума кутів трикутника дорівнює 180°, прямий кут становить 90°. Тому сума двох гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює: $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

2. *Гіпотенуза прямокутного трикутника більша за будь-який його катет.*

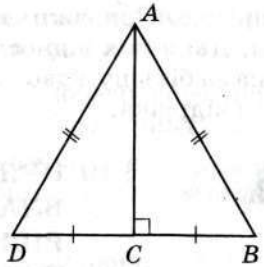
Ця властивість є наслідком теореми про співвідношення між сторонами і кутами трикутника, оскільки прямий кут більший за гострий.

3. *Катет прямокутного трикутника, що лежить проти кута 30°, дорівнює половині гіпотенузи.*

Доведення. Розглянемо прямокутний трикутник ABC з прямим кутом C і кутом A, що дорівнює 30° (мал. 284). Прикладемо до трикутника ABC трикутник ACD, що йому дорівнює. Тоді $\angle B = \angle D = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ і $\angle DAB = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$. Отже, $\triangle ABD$ — рівносторонній. Тому $DB = AB$. Оскільки $BC = \frac{1}{2} BD$, то $BC = \frac{1}{2} AB$, що і треба було довести.



Мал. 284



Мал. 285

4. *Якщо катет прямокутного трикутника дорівнює половині гіпотенузи, то кут, що лежить проти цього катета, дорівнює* 30°.

Доведення. Розглянемо прямокутний трикутник ABC, у якого катет BC дорівнює половині гіпотенузи AB (мал. 285). Прикладемо до трикутника ABC трикутник ACD, що йому дорівнює. Оскільки $BC = \frac{1}{2}AB$, то $BD = AB = AD$. Маємо рівносторонній трикутник ABD, тому $\angle B = 60^\circ$. У $\triangle ABC$ $\angle BAC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, що і треба було довести.

Розглянемо *ознаки рівності прямокутних трикутників*. З першої ознаки рівності трикутників випливає:

якщо катети одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катетам другого, то такі трикутники рівні.

З другої ознаки рівності трикутників випливає:

якщо катет і прилеглий до нього гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету і прилеглому до нього куту другого, то такі трикутники рівні.

Якщо у двох прямокутних трикутників є одна пара рівних гострих кутів, то інша пара гострих кутів — також рівні кути (це випливає з властивості 1 прямокутних трикутників). Тому маємо ще дві ознаки рівності прямокутних трикутників:

якщо гіпотенуза і гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі і гострому куту другого, то такі трикутники рівні;

якщо катет і протилежний кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету і протилежному куту другого, то такі трикутники рівні.

Т е о р е м а (ознака рівності прямокутних трикутників за катетом і гіпотенузою). ***Якщо катет і гіпотенуза одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно катету і гіпотенузі другого, то такі трикутники рівні.***

Д о в е д е н н я. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких кути C і C_1 — прямі і $AC = A_1C_1$, $AB = A_1B_1$ (мал. 286). Доведемо, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

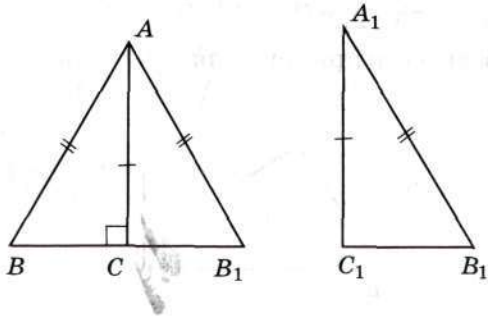
Прикладемо $\triangle ABC$ до $\triangle A_1B_1C_1$ так, щоб вершина A сумістилася з вершиною A_1, а вершина C — з вершиною C_1 (мал. 286, зліва). $\triangle ABB_1$ — рівнобедрений, оскільки $AB = AB_1$. AC — висота цього рівнобедреного трикутника, проведена до основи. Звідси AC є також медіаною, тому $BC = CB_1$. Отже, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ за третьою ознакою рівності трикутників.

Теорему доведено.

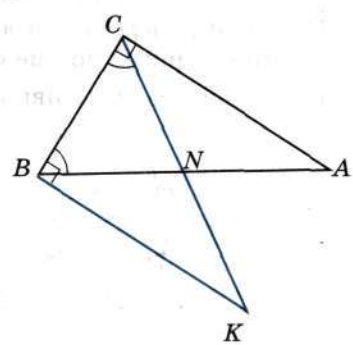
Розглянемо тепер ще одну властивість прямокутного трикутника.

5. У прямокутному трикутнику медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює її половині.

Д о в е д е н н я. З точки B проведемо перпендикуляр BK до сторони BC так, що $BK = CA$ (мал. 287). Тоді $\triangle ABC$ і $\triangle KCB$ — прямокутні, до того ж BC — спільний катет цих трикутників і $AC = BK$ (за побудовою). Тому $\triangle ABC = \triangle KCB$ (за двома катетами), тоді $\angle ABC = \angle KCB$. Отже, $\triangle NBC$ — рівнобедрений і $BN = CN$. Аналогічно можна довести, що $CN = AN$. Таким чином, $BN = CN = AN$. Тому CN — медіана і $CN = \frac{AB}{2}$, що і треба було довести.



Мал. 286



Мал. 287

Який трикутник називається прямокутним? • Що називають гіпотенузою і що катетом прямокутного трикутника? • Сформулюйте і доведіть властивості прямокутних трикутників. • Сформулюйте і доведіть ознаки рівності прямокутних трикутників.

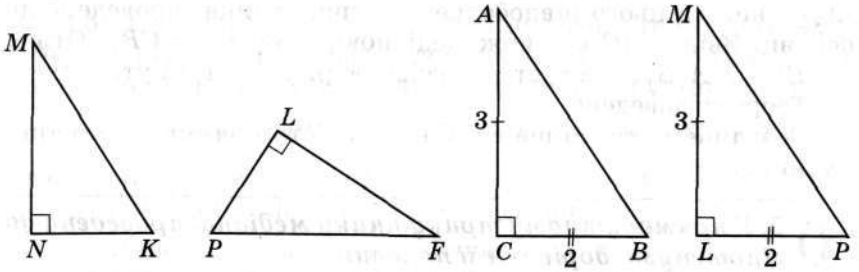
408①. (Усно.) 1) Як називається трикутник, зображений на малюнку 288?

2) Назвіть гіпотенузу та катети цього трикутника.

3) Яка сторона цього трикутника найдовша?

409①. 1) Назвіть гіпотенузу та катети прямокутного трикутника *PFL* (мал. 289).

2) Яка сторона довша: *PL* або *PF*; *LF* або *PF*?



Мал. 288 Мал. 289 Мал. 290

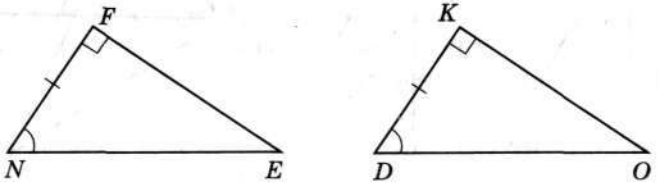
410①. За якими елементами рівні прямокутні трикутники на малюнках 290 і 291? Запишіть відповідні рівності.

411①. За якими елементами прямокутні трикутники на малюнках 292 і 293 рівні? Запишіть відповідні рівності.

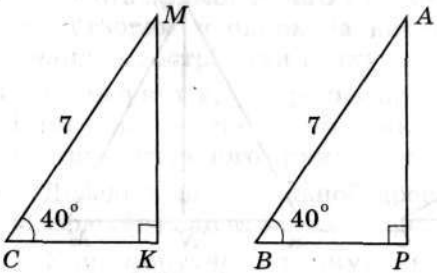
412①. Знайдіть другий гострий кут прямокутного трикутника, якщо перший дорівнює: 1) 17°; 2) 83°.

413①. Знайдіть другий гострий кут прямокутного трикутника, якщо перший дорівнює: 1) 79°; 2) 27°.

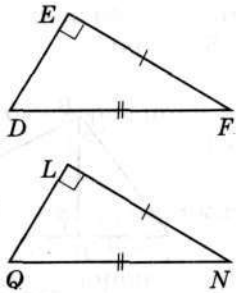
414②. Знайдіть кути рівнобедреного прямокутного трикутника.



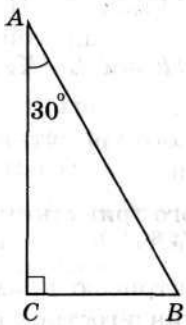
Мал. 291



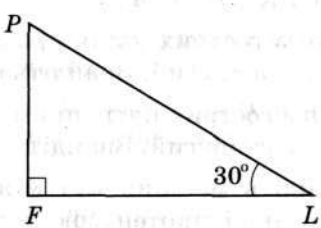
Мал. 292



Мал. 293



Мал. 294



Мал. 295

415②. У рівнобедреному трикутнику один з кутів при основі дорівнює 45°. Чи можна стверджувати, що цей трикутник прямокутний?

416②. Кут A прямокутного трикутника ABC дорівнює 30° (мал. 294). Знайдіть:

1) BC, якщо $AB = 12$ см;

2) AB, якщо $BC = 3$ дм.

417②. Кут L прямокутного трикутника PFL дорівнює 30° (мал. 295). Знайдіть:

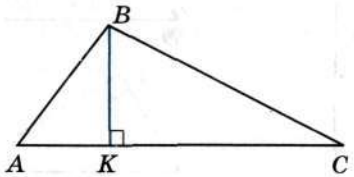
1) PF, якщо $PL = 16$ дм;

2) PL, якщо $PF = 5$ см.

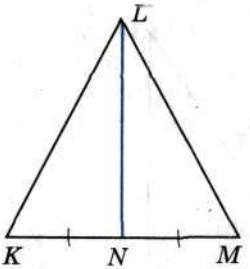
Урок 33

418②. На малюнку 296 BK — висота трикутника ABC. Знайдіть кути трикутника ABC, якщо $\angle ABK = 37°$, $\angle KBC = 62°$.

419②. На малюнку 297 LN — медіана рівнобедреного трикутника KLM з основою KM. Знайдіть кути трикутника KLM, якщо $\angle KLN = 28°$.



Мал. 296



Мал. 297

420②. На малюнку 298 $AB \perp AC$, $KL \perp CK$, $BC = CL$. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle KLC$.

421②. На малюнку 299 $MK \perp PL$, $\angle PMK = \angle LMK$. Доведіть, що $\triangle MPK = \triangle MLK$.

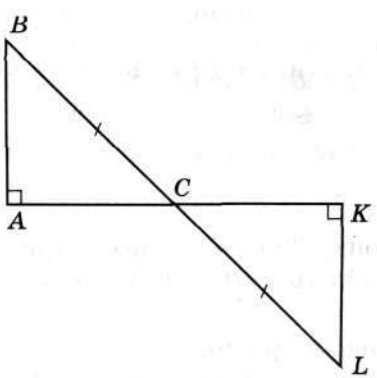
422③. Один з гострих кутів прямокутного трикутника на 28° більший за другий. Знайдіть ці кути.

423③. Один з гострих кутів прямокутного трикутника у 4 рази більший за другий. Знайдіть ці кути.

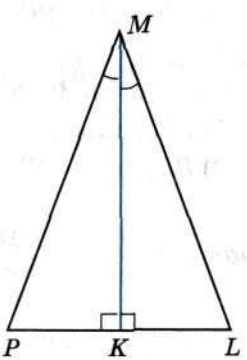
424③. Знайдіть менший кут між бісектрисою прямого кута трикутника і гіпотенузою, якщо один з гострих кутів трикутника дорівнює 26°.

425③. Знайдіть більший кут між бісектрисою прямого кута трикутника і гіпотенузою, якщо один з гострих кутів трикутника дорівнює 64°.

426③. Доведіть, що точка, розміщена всередині кута і рівновіддалена від його сторін, належить бісектрисі цього кута.



Мал. 298



Мал. 299

427③. Висота прямокутного трикутника, опущена на гіпотенузу, утворює з одним із катетів кут, що дорівнює 32°. Знайдіть гострі кути трикутника.

428③. Один з кутів, утворених при перетині бісектрис прямого і гострого кутів трикутника, дорівнює 115°. Знайдіть гострі кути даного трикутника.

429④. Доведіть, що два рівнобедрених трикутники рівні, якщо відповідно рівні їх бічні сторони і висоти, проведені до основ.

430④. У прямокутному трикутнику один з кутів дорівнює 60°, а сума гіпотенузи та меншого катета 30 см. Знайдіть довжину гіпотенузи та медіани, проведеної до неї.

431④. У прямокутному трикутнику гострий кут дорівнює 60°, а бісектриса цього кута — 4 см. Знайдіть довжину катета, який лежить проти цього кута.

432④. Різниця градусних мір двох зовнішніх кутів при вершинах гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 20°. Знайдіть гострі кути трикутника.

433④. Знайдіть градусні міри гострих кутів прямокутного трикутника, якщо градусні міри зовнішніх кутів при цих вершинах відносяться, як 2:3.

434③. Доведіть, що коли медіана трикутника ділить його *на два трикутники з рівними периметрами, то хоча б два* кути трикутника рівні.

435③. Один з кутів трикутника на 20° менший від другого і у 3 рази менший від третього. Знайдіть кути трикутника.

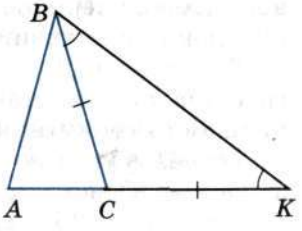
436④. У рівнобедреному трикутнику основа більша за бічну сторону на 3 см, але менша від суми бічних сторін на 4 см. Знайдіть периметр цього трикутника.

Урок 34 § 20. НЕРІВНІСТЬ ТРИКУТНИКА

Теорема (нерівність трикутника). ***Кожна сторона трикутника менша за суму двох інших сторін.***

Доведення. Розглянемо довільний трикутник ABC і доведемо, що сторона трикутника, наприклад AB, менша за суму двох інших сторін AC і CB.

1) Відкладемо на продовженні сторони AC відрізок CK, що дорівнює стороні BC (мал. 300). У рівнобедреному трикутнику BCK $\angle CBK = \angle CKB$.



Мал. 300