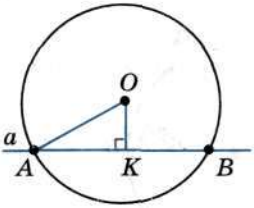
## § 22. ДОТИЧНА ДО КОЛА, ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

Пряма і коло можуть мати дві спільні точки (мал. 335), одну спільну точку (мал. 336), або не мати спільних точок (мал. 337).

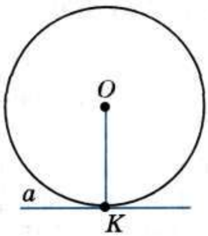
Пряму, яка має дві спільні точки з колом, називають ***січною***. На малюнку 335 $OK$ — відстань від центра кола — точки $O$ — до січної. У прямокутному трикутнику $OKA$ сторона $OK$ є катетом, а $AO$ — гіпотенузою. Тому $OK < OA$. Отже, *відстань від центра кола до січної менша за радіус.*

**! *Дотичною* до кола називають пряму, яка має одну спільну точку з колом. Цю точку називають *точкою дотику*.**

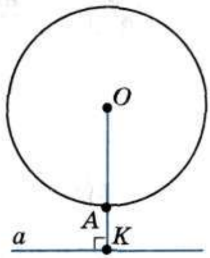
На малюнку 336 пряма $a$ — дотична до кола, точка $K$ — точка дотику.




Мал. 335




Мал. 336



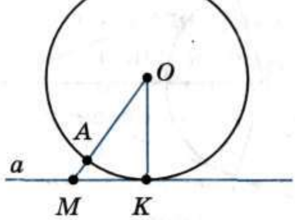

Мал. 337

Якщо пряма і коло не мають спільних точок, то відстань $OK$ більша за радіус кола $OA$ (мал. 337). *Відстань від центра кола до прямої, яка не перетинає це коло, більша за радіус.*

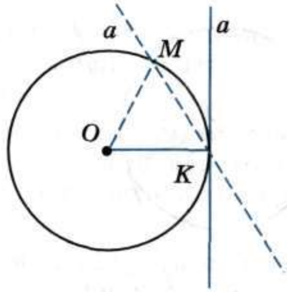
Т е о р е м а 1 (властивість дотичної). ***Дотична до кола перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.***

ють спільну сторону, а дві інші сторони
ярні. Знайдіть градусну міру тупого кута.
двох рівнобедрених трикутників за
роведеною до бічної сторони.

. Два тупих кути ма
взаємно перпендикул
544④. Доведіть рівніст
основою і висотою, п




Мал. 338




Мал. 339

Наше припущення неправильне. Отже, $a \perp OK$. Теорему доведено.

Н а с л і д о к. ***Відстань від центра кола до дотичної до цього кола дорівнює радіусу кола.***

Т е о р е м а 2 (обернена до теореми про властивість дотичної). ***Якщо пряма проходить через кінець радіуса, що лежить на колі, і перпендикулярна до цього радіуса, то вона є дотичною.***

Д о в е д е н н я. Нехай $OK$ — радіус кола із центром у точці $O$. Пряма $a$ проходить через точку $K$ так, що $a \perp OK$ (мал. 339). Доведемо, що $OK$ — дотична до кола.

Припустимо, що пряма $a$ має з колом ще одну спільну точку — точку $M$. Тоді $OK = OM$ (як радіуси) і трикутник $OMK$ — рівнобедрений. $\angle OMK = \angle OKM = 90^\circ$. Тому $\angle OMK + \angle OKM = 180^\circ$, що суперечить теоремі про суму кутів трикутника.

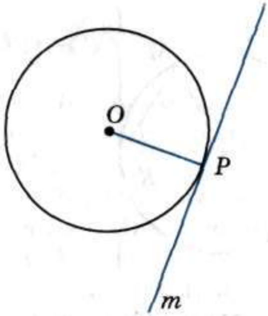
Наше припущення неправильне. Пряма $a$ не має інших спільних точок з колом окрім точки $K$. Тому пряма $a$ — дотична до кола. Теорему доведено.

**Задача.** Через дану точку $P$ кола з центром $O$ провести дотичну до цього кола (мал. 340).

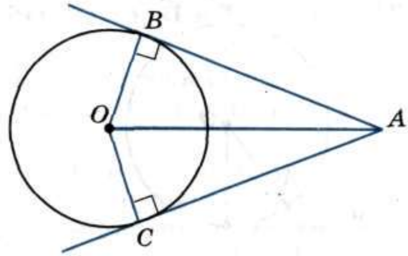
Р о з в' я з а н н я. Проведемо радіус $OP$, а потім побудуємо пряму $m$, перпендикулярну до радіуса (наприклад, за допомогою косинця). За теоремою 2 пряма $m$ є дотичною до кола.

Розглянемо дві дотичні до кола з центром у точці $O$, які проходять через точку $A$ і дотикаються до кола в точках $B$ і $C$ (мал. 341). Відрізки $AB$ і $AC$ називають *відрізками дотичних, проведеними з точки A*.

Т е о р е м а 3 (властивість відрізків дотичних, проведених з однієї точки). ***Відрізки дотичних, проведених з однієї точки до кола, рівні між собою.***




Мал. 340




Мал. 341

Д о в е д е н н я. На малюнку 341 трикутники $OBA$ і $OCA$ — прямокутні, $OB = OC$ (як радіуси), $OA$ — спільна сторона цих трикутників. $\triangle OBA = \triangle OCA$ (за катетом і гіпотенузою). Тому $AB = AC$. Теорему доведено.

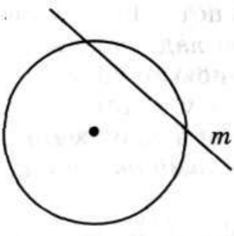
**?** Яким може бути взаємне розміщення кола і прямої? • Яку пряму називають січною по відношенню до кола? • Що більше: відстань від центра кола до січної чи радіус кола? • Що більше: відстань від центра кола до прямої, яка не перетинає коло, чи радіус? • Яку пряму називають дотичною до кола? • Сформулюйте і доведіть властивість дотичної. • Сформулюйте і доведіть властивість, обернену до теореми про властивість дотичної. • Сформулюйте і доведіть теорему про властивість відрізків дотичних, проведених з однієї точки.

---

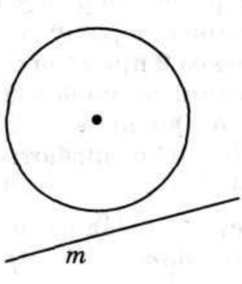
**545**[Ф]. (Усно.) На якому з малюнків 342—344 пряма $m$ є дотичною до кола, а на якому — січною?

**546**[Ф]. (Усно.) Скільки різних дотичних можна провести до кола через точку, що лежить:

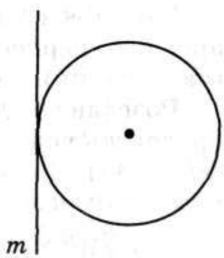
1) на колі; 2) поза колом; 3) всередині кола?




Мал. 342




Мал. 343




Мал. 344

**547②.** Накресліть коло, радіус якого дорівнює 3 см, позначте на ньому точку $P$. За допомогою косинця проведіть дотичну до кола, що проходить через точку $P$.

**548②.** Накресліть коло, радіус якого дорівнює 4,5 см, позначте на ньому точку $M$. За допомогою косинця або транспортира проведіть дотичну до кола, що проходить через точку $M$.

**549②.** Радіус кола дорівнює 8 см. Як розміщені пряма $a$ і коло, якщо відстань від центра кола до прямої дорівнює:

1) 5 см; 2) 8 см; 3) 9 см?

**550②.** Радіус кола дорівнює 2 дм. Як розміщені пряма $b$ і коло, якщо відстань від центра кола до прямої дорівнює:

1) 2,7 дм; 2) 2 дм; 3) 1,8 дм?

**551②.** На малюнку 345 $KP$ — дотична до кола. Знайдіть:

1) $\angle OMN$, якщо $\angle NMP = 35^\circ$;

2) $\angle KMN$, якщо $\angle OMN = 50^\circ$.

**552②.** На малюнку 345 $KP$ — дотична до кола. Знайдіть:

1) $\angle NMP$, якщо $\angle OMN = 52^\circ$;

2) $\angle OMN$, якщо $\angle KMN = 128^\circ$.

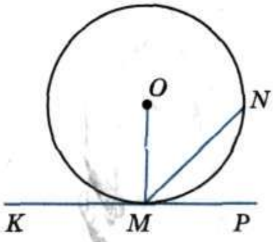
**553③.** З точки $A$ до кола з центром у точці $O$ проведено дві дотичні $AB$ і $AC$ ($B$ і $C$ — точки дотику). Доведіть, що промінь $OA$ — бісектриса кута $BOC$.

**554③.** З точки $P$ до кола з центром у точці $Q$ проведено дотичні $PM$ і $PN$. Доведіть, що промінь $PQ$ — бісектриса кута $MPN$.

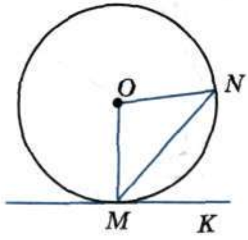
**555③.** Пряма $MK$ — дотична до кола з центром у точці $O$ (мал. 346). Знайдіть кут $NMK$, якщо $\angle MON = 82^\circ$.

**556③.** Пряма $MK$ — дотична до кола з центром у точці $O$ (мал. 346). Знайдіть кут $NOM$, якщо $\angle KMN = 53^\circ$.

**557④.** З точки $M$, що лежить поза колом, проведено дві дотичні. Відстань від точки $M$ до центра кола удвічі більша за радіус кола. Знайдіть кут між дотичними.

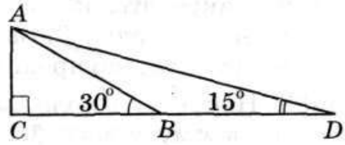


Мал. 345



Мал. 346

**558④.** Прямі $MN$ і $MK$ дотикаються до кола з центром $O$ в точках $N$ і $K$. Знайдіть $NK$, якщо $\angle OMN = 30^\circ$, $MN = 7$ см.




Мал. 347

**559③.** Один з кутів трикутника дорівнює половині зовнішнього кута, не суміжного з ним. Доведіть, що трикутник рівнобедрений.

**560④.** На малюнку 347 $\angle C = 90^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$, $\angle ADB = 15^\circ$, $AC = 6$ см. Знайдіть $BD$.

## *Урок 39* § 23. КОЛО, ВПИСАНЕ В ТРИКУТНИК

Розглянемо важливу властивість бісектриси кута.

**Теорема 1** (властивість бісектриси кута). ***Будь-яка точка бісектриси кута рівновіддалена від сторін цього кута.***

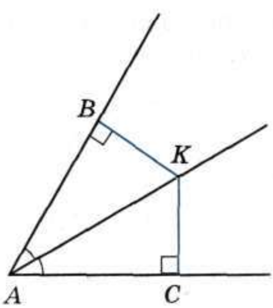
Доведення. Нехай $AK$ — бісектриса кута $A$, $KB$ і $KC$ — перпендикуляри, проведені з точки $K$ до сторін кута (мал. 348). Доведемо, що $KB = KC$.

Оскільки $\angle BAK = \angle KAC$ і $AK$ — спільна сторона прямокутних трикутників $ABK$ і $ACK$, то $\triangle ABK = \triangle ACK$ (за гіпотенузою і гострим кутом). Тому $KB = KC$. Теорему доведено.

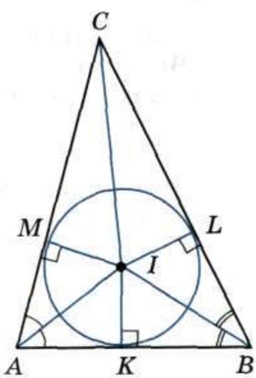
***Коло* називають *вписаним у трикутник*, якщо воно дотикається до всіх його сторін.**

При цьому трикутник називається *описаним навколо кола*.

**Теорема 2** (про коло, вписане у трикутник). ***У будь-який трикутник можна вписати коло.***




Мал. 348




Мал. 349