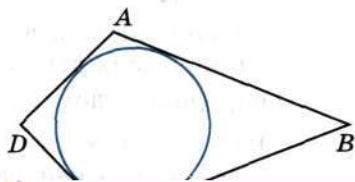


- 598<sup>3</sup>. Два кола мають внутрішній дотик. Відстань між їх центрами 12 дм. Знайдіть радіуси кіл, якщо вони відносяться, як 2:5.
- 599<sup>3</sup>. Відстань між центрами двох кіл дорівнює 12 см. Визначте взаємне розміщення цих кіл, якщо їх радіуси дорівнюють:
- 1) 9 см і 3 см;            2) 5 см і 2 см;  
3) 13 см і 1 см;        4) 9 см і 7 см.
- 600<sup>3</sup>. Відстань між центрами двох кіл дорівнює 14 см. Визначте взаємне розміщення цих кіл, якщо їх радіуси дорівнюють:
- 1) 7 см і 5 см;            2) 16 см і 2 см;  
3) 10 см і 5 см;        4) 7 см і 7 см.
- 601<sup>3</sup>. Два кола перетинаються в точках  $A$  і  $B$ . Точки  $O_1$  і  $O_2$  — центри цих кіл. Доведіть, що  $O_1O_2 \perp AB$ .
- 602<sup>3</sup>. Два кола перетинаються в точках  $C$  і  $D$ . Точки  $O_1$  і  $O_2$  — центри кіл. Доведіть, що промінь  $O_1O_2$  — бісектриса кута  $CO_1D$ .
- 603<sup>4</sup>. Три кола попарно дотикаються зовні. Відрізки, що сполучають їх центри, утворюють трикутник зі сторонами 5 см, 7 см і 8 см. Знайдіть радіуси цих кіл.
- 604<sup>4</sup>. Три кола з радіусами 5 см, 6 см і 9 см попарно дотикаються зовні. Знайдіть периметр трикутника, вершинами якого є центри цих кіл.



605<sup>3</sup>. У прямокутному трикутнику  $ABC$  гіпотенуза  $AB$  дорівнює 20 см,  $\angle B = 60^\circ$ . Який з катетів можна знайти? Чому він дорівнює?



606<sup>4</sup>. На малюнку 375 коло вписа-

час вивчення курсу геометрії ми неодноразово виконували геометричні побудови: проводили прямі, відкладали відрізки, що дорівнюють даним, будували кути тощо. При цьому використовували лінійку з поділками, транспорир, креслярський кутник, циркуль. Тепер розглянемо побудови фігур, на здійснити за допомогою «класичних» інструментів:

Підвали різні відрізки використувати як можна

лінійки без поділок і циркуля. Цими інструментами користувалися ще в Стародавній Греції.

Що можна робити за допомогою двох зазначених інструментів? Лінійка дає змогу провести довільну пряму, побудувати пряму, що проходить через задану точку, і пряму, що проходить через дві задані точки. За допомогою циркуля можна провести коло довільного радіуса, коло з центром у даній точці і радіусом, що дорівнює даному відрізку. В деяких випадках замість кола нам потрібна буде деяка його частина (дуга кола). Зауважимо, що ніяких інших побудов у задачах на побудову виконувати не дозволяється. Наприклад, за допомогою лінійки (навіть із поділками) не дозволяється відкласти відрізок заданої довжини, не можна використовувати коси-нець для побудови перпендикулярних прямих.

*Розв'язати задачу на побудову* означає вказати послідовність найпростіших побудов, після виконання яких отримаємо задану фігуру; далі — довести, що побудована фігура має властивості, передбачені умовою, тобто є шуканою фігурою.

Розглянемо найпростіші задачі на побудову.

### Побудова відрізка, що дорівнює даному

**Задача 1.** На даному промені від його початку відкласти відрізок, що дорівнює даному.

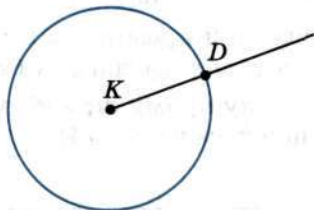
**Розв'язання.** Зобразимо фігури, задані умовою задачі: відрізок  $AB$  та промінь з початком у точці  $K$  (мал. 376). Побудуємо циркулем коло з центром у точці  $K$  та радіусом  $AB$  (мал. 377). Це коло перетне промінь у деякій точці  $D$ . Очевидно, що  $KD = AB$ . Тому  $KD$  — шуканий відрізок.

Зауважимо, що замість кола, можна було провести деяку його частину (дугу), яка б напевне перетинала промінь (мал. 378).

### Побудова трикутника за трьома сторонами

**Задача 2.** Побудувати трикутник із заданими сторонами  $a, b$  і  $c$ .

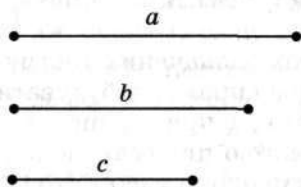
**Розв'язання.** Нехай задано три відрізки  $a, b$  і  $c$  (мал. 379).



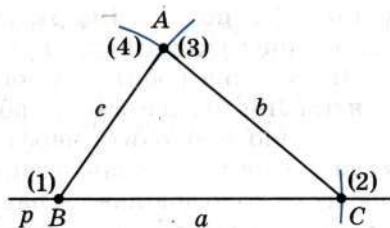
Мал. 376

Мал. 377

Мал. 378



Мал. 379



Мал. 380

1) За допомогою лінійки проведемо довільну пряму  $p$  і позначимо на ній довільну точку  $B$  ((1) на мал. 380).

2) За допомогою циркуля відкладемо на прямій  $p$  відрізок  $BC = a$  (дуга (2) на мал. 380).

3) Розхилом циркуля, що дорівнює  $b$ , опишемо дугу (3) кола з центром у точці  $C$  (мал. 380).

4) Розхилом циркуля, що дорівнює  $c$ , опишемо дугу (4) кола з центром у точці  $B$  (мал. 380).

5) Точка  $A$  — точка перетину дуг (3) і (4). Трикутник  $ABC$  — шуканий.

Доведення цього факту є очевидним, оскільки сторони трикутника  $ABC$  дорівнюють заданим відрізкам  $a$ ,  $b$  і  $c$ :  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$ .

**З а у в а ж е н н я.** Якби побудовані дуги (3) і (4) не перетнулися, то трикутник побудувати було б неможливо. За нерівністю трикутника: кожна із сторін повинна бути меншою за суму двох інших.

**?** Які інструменти використовують для розв'язування задач на побудову? • Які побудови можна виконати за допомогою лінійки без поділок? • Які побудови можна зробити за допомогою циркуля? • Що означає: розв'язати задачу на побудову? • Як побудувати відрізок, що дорівнює даному? • Як побудувати трикутник за трьома сторонами?

607<sup>0</sup>. Проведіть довільну пряму та відкладіть на ній відрізок, що дорівнює даному (мал. 381).

608<sup>0</sup>. Проведіть довільний промінь та відкладіть від його початку відрізок, що дорівнює даному (мал. 382).

609<sup>0</sup>. Проведіть довільну пряму  $m$ , виберіть на ній точку  $M$  і опишіть коло з центром у точці  $M$  і радіусом, що дорівнює



Мал. 381



Мал. 382



Мал. 383

відрізку, зображеному на малюнку 383. У скількох точках коло перетнуло пряму?

610<sup>①</sup>. Накресліть довільний відрізок  $MN$  та коло з центром у точці  $M$ , радіус якого дорівнює  $MN$ .

Надалі для задання умов задачі (наприклад, довжини відрізка чи градусної міри кута) використовуємо лінійку з поділками і транспортир, а для розв'язування задачі — лише лінійку без поділок і циркуль.

611<sup>②</sup>. Побудуйте трикутник зі сторонами  $a$ ,  $b$  і  $c$ , якщо  $a = 8$  см,  $b = 7$  см,  $c = 5$  см.

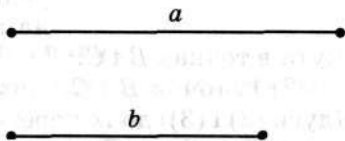
612<sup>②</sup>. Побудуйте трикутник  $ABC$ , якщо  $AB = 4$  см,  $BC = 6$  см,  $CA = 7$  см.

613<sup>②</sup>. Накресліть довільний трикутник  $ABC$  і побудуйте трикутник  $ABD$ , що дорівнює даному.

614<sup>②</sup>. Накресліть довільний трикутник і побудуйте трикутник, що дорівнює даному.

615<sup>②</sup>. Накресліть довільний відрізок  $AB$ . Побудуйте рівносторонній трикутник  $ABC$ .

616<sup>②</sup>. Побудуйте рівнобедрений трикутник, у якого основа дорівнює відрізку  $a$ , а бічна сторона — відрізку  $b$  (мал. 384).



Мал. 384

617<sup>③</sup>. На даній прямій  $a$  знайдіть точки, віддалені від даної точки  $A$ : 1) на 4 см; 2) на відстань більшу, ніж 4 см; 3) на відстань меншу, ніж 4 см.

618<sup>③</sup>. Побудуйте рівнобедрений трикутник за бічною стороною і радіусом описаного кола.

619<sup>④</sup>. Побудуйте трикутник за двома нерівними сторонами і радіусом описаного кола. Скільки розв'язків має задача?

## Урок 43

### Побудова кута, що дорівнює даному

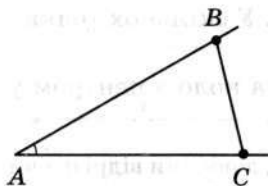
Задача 3. Відкласти від даного променя кут, що дорівнює даному.

Розв'язання. Нехай задано кут  $A$  і промінь з початком у точці  $O$  (мал. 385). Треба побудувати кут, що дорівнює куту  $A$ , так, щоб одна з його сторін збігалася з променем.

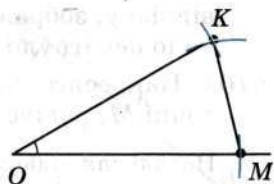
1) Візьмемо на сторонах кута  $A$  довільні точки  $B$  і  $C$  (мал. 385).

2) Побудуємо трикутник  $OKM$ , що дорівнює трикутнику  $ABC$ , так, щоб  $AB = OK$ ,  $AC = OM$ ,  $BC = KM$  (мал. 386).

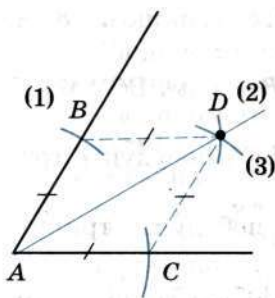
3) Тоді  $\angle KOM = \angle BAC$ .



Мал. 385



Мал. 386



Мал. 387

4) Отже,  $\angle KOM$  — шуканий.

Доведення цього випливає з побудови, бо  $\triangle OKM = \triangle ABC$ , а тому  $\angle KOM = \angle A$ .

#### Побудова бісектриси даного кута

**Задача 4.** Побудувати бісектрису даного кута.

**Розв'язання.** Нехай задано кут  $A$ , необхідно побудувати його бісектрису (мал. 387).

1) Проведемо дугу кола довільного радіуса з центром у точці  $A$  (дуга (1) на мал. 387), яка перетинає сторони

кута в точках  $B$  і  $C$ .

2) Із точок  $B$  і  $C$  опишемо дуги такими самими радіусами (дуги (2) і (3)) до їх перетину всередині кута (точка  $D$ ).

3) Промінь  $AD$  — шукана бісектриса кута  $A$ .

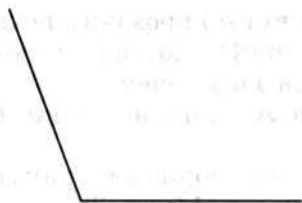
**Доведення.**  $\triangle ABD = \triangle ACD$  (за трьома сторонами), а тому  $\angle BAD = \angle CAD$ , отже  $AD$  — бісектриса  $A$ .

**?** Як побудувати кут, що дорівнює даному? • Як побудувати бісектрису даного кута?

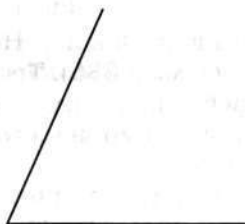
620<sup>?</sup> Побудуйте кут, що дорівнює даному (мал. 388).

621<sup>?</sup> Побудуйте кут, що дорівнює даному (мал. 389).

622<sup>?</sup> Побудуйте за допомогою транспортера кут, що дорівнює  $70^\circ$ , та без транспортера — його бісектрису.



Мал. 388



Мал. 389

- 623<sup>2</sup>. Побудуйте за допомогою транспортира кут, що дорівнює  $110^\circ$ , та без транспортира — його бісектрису.
- 624<sup>3</sup>. Побудуйте трикутник  $ABC$ , якщо  $AB = 3$  см,  $AC = 5$  см,  $\angle A = 105^\circ$ .
- 625<sup>3</sup>. Побудуйте трикутник  $KLM$ , якщо  $KL = 6$  см,  $KM = 4$  см,  $\angle K = 80^\circ$ .
- 626<sup>3</sup>. Побудуйте трикутник  $DEF$ , якщо  $DE = 6$  см,  $\angle D = 40^\circ$ ,  $\angle F = 80^\circ$ .
- 627<sup>3</sup>. Побудуйте трикутник  $NPT$ , якщо  $NP = 7$  см,  $\angle N = 50^\circ$ ,  $\angle T = 100^\circ$ .
- 628<sup>3</sup>. Побудуйте рівнобедрений трикутник, основа якого 6 см, а кут при основі  $70^\circ$ .
- 629<sup>3</sup>. Побудуйте рівносторонній трикутник зі стороною 4 см і впишіть у нього коло.
- 630<sup>4</sup>. Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї кутом і бісектрисою, проведеною з вершини цього кута.
- 631<sup>4</sup>. Побудуйте трикутник  $ABC$ , якщо  $AB = 4$  см,  $\angle A = 40^\circ$ ,  $\angle C = 105^\circ$ .

## Урок 44

### Поділ даного відрізка навпіл

**Задача 5.** Побудувати середину даного відрізка.

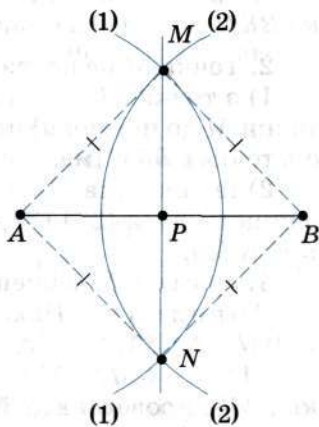
**Розв'язання.** Нехай  $AB$  — заданий відрізок, необхідно побудувати його середину (мал. 390).

1) Із точки  $A$  розхилом циркуля, більшим за половину відрізка  $AB$ , опишемо дугу (1) (мал. 390).

2) Із точки  $B$  таким самим розхилом циркуля опишемо дугу (2) до перетину з дугою (1) в точках  $M$  і  $N$ .

3)  $MN$  перетинає  $AB$  в точці  $P$ .  $P$  — шукана точка.

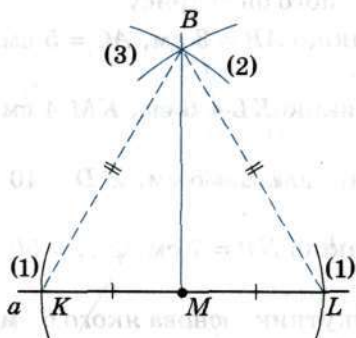
**Доведення.**  $\triangle AMN = \triangle BMN$  (за трьома сторонами). Тому  $\angle AMP = \angle BMP$ .  $MP$  — бісектриса рівнобедреного трикутника  $AMB$  з основою  $AB$ , тому вона є також медіаною. Отже,  $P$  — середина  $AB$ .



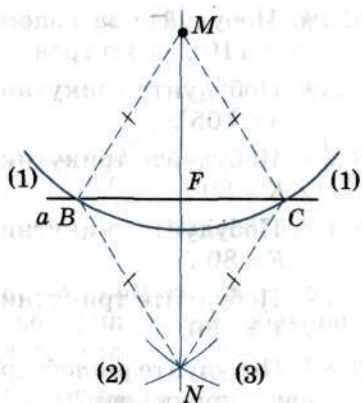
Мал. 390

### Побудова прямої, перпендикулярної до даної прямої

**Задача 6.** Через дану точку  $M$  провести пряму, перпендикулярну до даної прямої  $a$ .



Мал. 391



Мал. 392

**Розв'язання.** Можливі два випадки:

1. Точка  $M$  належить прямій  $a$ :

1) на даній прямій  $a$  довільним розхилом циркуля відкладемо від точки  $M$  два рівних відрізки  $MK = ML$  (дуги (1) на мал. 391);

2) із центрів  $K$  і  $L$  розхилом циркуля, що дорівнює  $KL$ , опишемо дуги (2) і (3) до їх перетину в точці  $B$ ;

3) пряма  $BM$  перпендикулярна до прямої  $a$ .

**Доведення.**  $BM$  — медіана рівностороннього трикутника  $BKL$ , тому вона є також висотою. Отже,  $BM \perp a$ .

2. Точка  $M$  не належить прямій  $a$ :

1) з точки  $M$  довільним радіусом (більшим за відстань від точки  $M$  до прямої  $a$ ) проведемо дугу (1), яка перетинає пряму  $a$  в точках  $B$  і  $C$  (мал. 392);

2) із центрів  $B$  і  $C$  цим самим розхилом циркуля опишемо дуги (2) і (3) до їх перетину в точці  $N$  (відмінної від точки  $M$ );

3) пряма  $MN$  перпендикулярна до прямої  $a$ .

**Доведення.** Нехай точка  $F$  — точка перетину прямих  $BC$  і  $MN$ .  $\triangle BMN = \triangle CMN$  (за трьома сторонами). Тому  $\angle BMN = \angle CMN$ .  $MF$  — бісектриса рівнобедреного трикутника  $BMC$ , проведена до його основи. Тому  $MF$  є також висотою. Отже,  $MF \perp BC$ , а тому  $MN \perp a$ .

**?** Як поділити даний відрізок навпіл? • Як побудувати пряму, перпендикулярну до даної?

**632**®. Побудуйте відрізок, що дорівнює даному (мал. 393) та поділіть його навпіл.

633<sup>2</sup>. Побудуйте відрізок, що дорівнює даному (мал. 394), та поділіть його навпіл.

Мал. 393

Мал. 394

634<sup>2</sup>. Накресліть пряму  $b$  та точку  $M$ , що не належить цій прямій. Проведіть пряму  $MN$ , перпендикулярну до  $b$ .

635<sup>2</sup>. Накресліть пряму  $m$  та точку  $P$ , що належить цій прямій. Проведіть пряму  $PK$ , перпендикулярну до прямої  $m$ .

636<sup>2</sup>. Побудуйте прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють 5 см і 3 см.

637<sup>2</sup>. Накресліть гострокутний трикутник  $ABC$  та побудуйте його медіану  $CP$ .

638<sup>3</sup>. Побудуйте трикутник та опишіть навколо нього коло.

639<sup>3</sup>. Побудуйте рівнобедрений трикутник, у якого основа дорівнює 6 см, а висота, проведена до основи — 4 см.

640<sup>3</sup>. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і гіпотенузою.

641<sup>3</sup>. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і бісектрисою прямого кута.

642<sup>3</sup>. Побудуйте трикутник за двома сторонами і медіаною, проведеною до однієї з них.

643<sup>4</sup>. Побудуйте без транспортира кути  $30^\circ$  і  $60^\circ$ .

644<sup>4</sup>. Побудуйте без транспортира кут, що дорівнює  $15^\circ$ .

## Урок 45

645<sup>2</sup>. Накресліть прямокутний трикутник  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ), його медіану  $CM$  та бісектрису  $AB$ .


646<sup>2</sup>. Накресліть прямокутний трикутник  $KLM$  ( $\angle K = 90^\circ$ ), його бісектрису  $KP$  та медіану  $LT$ .

647<sup>2</sup>. Накресліть довільний відрізок. Побудуйте відрізок, що дорівнює  $\frac{3}{4}$  накресленого відрізка.

648<sup>2</sup>. Накресліть довільний відрізок. Побудуйте відрізок, що дорівнює  $\frac{1}{4}$  накресленого відрізка.

649<sup>3</sup>. Опишіть коло, радіус якого 4 см, позначте деяку точку  $A$  цього кола та проведіть дотичну до кола  $b$ , що проходить через точку  $A$ .



- 650<sup>3</sup>. Побудуйте без транспортира  $\triangle ABC$ , у якого  $AB = 5$  см,  $\angle A = 60^\circ$ ,  $\angle B = 45^\circ$ .
- 651<sup>3</sup>. Побудуйте без транспортира  $\triangle KMP$ , у якого  $KM = 4$  см,  $\angle K = 30^\circ$ ,  $\angle M = 45^\circ$ .
- 652<sup>3</sup>. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом та медіаною, проведеною до другого катета.
- 653<sup>3</sup>. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом та медіаною, проведеною до нього.
- 654<sup>3</sup>. Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї кутом та радіусом описаного кола.
- 655<sup>4</sup>. Побудуйте рівнобедрений трикутник, основа якого 4 см, а кут при вершині  $80^\circ$ .
- 656<sup>4</sup>. Побудуйте рівнобедрений трикутник, основа якого 6 см, а кут при вершині  $100^\circ$ .
- 657<sup>4</sup>. Побудуйте рівносторонній трикутник за його медіаною.
-  658<sup>3</sup>. Дано кут  $30^\circ$ . Коло, радіус якого 5 см, дотикається сторони кута і має центр на його іншій стороні. Обчисліть відстань від центра кола до вершини кута.
- 659<sup>3</sup>. Один з кутів трикутника дорівнює  $15^\circ$ , а два інших відносяться, як 7:8. Знайдіть найменший із зовнішніх кутів трикутника.
- 660<sup>3</sup>. Доведіть, що в рівних трикутниках бісектриси, проведені з вершин рівних кутів, є рівними.
- 661<sup>4</sup>. Один з кутів прямокутного трикутника дорівнює  $30^\circ$ , а гіпотенуза дорівнює 60 см. Знайдіть відрізки, на які ділить гіпотенузу висота, проведена до неї.

## Урок 46

### § 27. ГЕОМЕТРИЧНЕ МІСЦЕ ТОЧОК. МЕТОД ГЕОМЕТРИЧНИХ МІСЦЬ

Одним з методів розв'язування складніших задач на побудову є *метод геометричних місць*.

**Геометричним місцем точок** називають фігуру, що складається з усіх точок площини, які мають певну властивість.

Розглянемо декілька геометричних місць точок площини.

1. *Геометричне місце точок, рівновіддалених від даної точки на задану відстань*, — коло, радіус якого дорівнює заданій відстані.

2. *Геометричне місце точок, відстань від яких до даної*