650③. Побудуйте без транспортира $\triangle ABC$, у якого $AB = 5$ см, $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 45^\circ$.

651③. Побудуйте без транспортира $\triangle KMP$, у якого $KM = 4$ см, $\angle K = 30^\circ$, $\angle M = 45^\circ$.

652③. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом та медіаною, проведеною до другого катета.

653③. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом та медіаною, проведеною до нього.

654③. Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї кутом та радіусом описаного кола.

655④. Побудуйте рівнобедрений трикутник, основа якого 4 см, а кут при вершині 80°.

656④. Побудуйте рівнобедрений трикутник, основа якого 6 см, а кут при вершині 100°.

657④. Побудуйте рівносторонній трикутник за його медіаною.

658③. Дано кут 30°. Коло, радіус якого 5 см, дотикається сторони кута і має центр на його іншій стороні. Обчисліть відстань від центра кола до вершини кута.

659③. Один з кутів трикутника дорівнює 15°, а два інших відносяться, як 7:8. Знайдіть найменший із зовнішніх кутів трикутника.

660③. Доведіть, що в рівних трикутниках бісектриси, проведені з вершин рівних кутів, є рівними.

661④. Один з кутів прямокутного трикутника дорівнює 30°, а гіпотенуза дорівнює 60 см. Знайдіть відрізки, на які ділить гіпотенузу висота, проведена до неї.

Урок 46

§ 27. ГЕОМЕТРИЧНЕ МІСЦЕ ТОЧОК. МЕТОД ГЕОМЕТРИЧНИХ МІСЦЬ

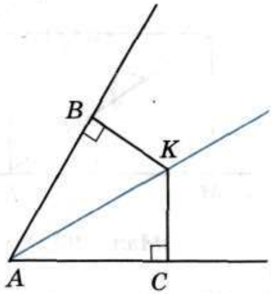
Одним з методів розв'язування складніших задач на побудову є *метод геометричних місць*.

Геометричним місцем точок називають фігуру, що складається з усіх точок площини, які мають певну властивість.

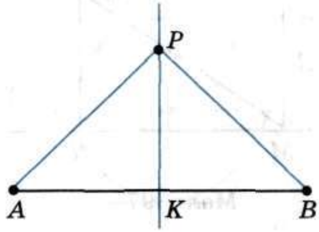
Розглянемо декілька геометричних місць точок площини.

1. *Геометричне місце точок, рівновіддалених від даної точки на задану відстань,*— коло, радіус якого дорівнює заданій відстані.

2. *Геометричне місце точок, відстань від яких до даної*



Мал. 395



Мал. 396

точки не перевищує заданої відстані,— круг, радіус якого дорівнює заданій відстані.

3. *Геометричне місце точок, рівновіддалених від сторін кута,*— бісектриса цього кута.

Д о в е д е н н я. 1) Нехай точка K рівновіддалена від сторін AB і AC кута A (мал. 395). Тобто перпендикуляри KB і KC, опущені з цієї точки на сторони кута — рівні. Тоді $\triangle ABK = \triangle ACK$ (за катетом і гіпотенузою).

Тому $\angle BAK = \angle CAK$. Отже, AK — бісектриса кута.

2) Нехай точка K належить бісектрисі кута. За властивістю бісектриси кута (див. § 23, теорема 1): $KB = KC$.

Отже, довели, що геометричним місцем точок, рівновіддалених від сторін кута, є бісектриса цього кута.

4. *Геометричне місце точок, рівновіддалених від кінців відрізка* — серединний перпендикуляр до даного відрізка.

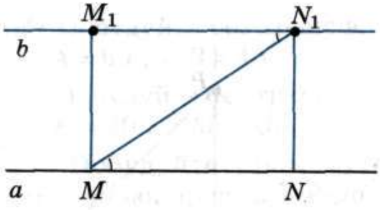
Д о в е д е н н я. 1) Нехай точка P рівновіддалена від кінців відрізка AB, тобто $PA = PB$ (мал. 396). Тоді $\triangle ABP$ — рівнобедрений з основою AB, а тому медіана цього трикутника PK є його висотою. Отже, $AK = KB$ і $PK \perp AB$. Тому PK — серединний перпендикуляр до відрізка AB.

2) Нехай точка P належить серединному перпендикуляру до відрізка AB. За властивістю серединного перпендикуляра (див. § 24, теорема 1): $PA = PB$.

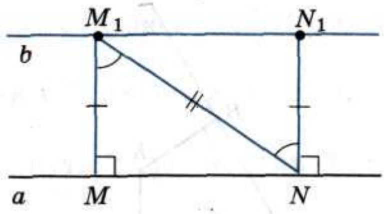
Отже, довели, що геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців відрізка, є серединний перпендикуляр до цього відрізка.

5. *Геометричне місце точок, що віддалені від даної прямої на задану відстань,*— дві прямі, паралельні даній прямій, кожна точка яких знаходиться на заданій відстані від прямої.

Д о в е д е н н я. 1) Доведемо, що коли пряма b паралельна прямій a, то дві довільні точки прямої b рівновіддалені від прямої a.



Мал. 397



Мал. 398

Нехай M_1 і N_1 — довільні точки прямої b. Опустимо перпендикуляри M_1M і N_1N на пряму a (мал. 397). $\angle M_1MN = \angle N_1NM = 90^\circ$. Оскільки $a \parallel b$, то $\angle MM_1N_1 = \angle NN_1M_1 = 90^\circ$. Проведемо січну MN_1. Тоді $\angle N_1MN = \angle M_1N_1M$ (як внутрішні різносторонні). Тому $\triangle MM_1N_1 = \triangle N_1NM$ (за гіпотенузою і гострим кутом), звідси $M_1M = N_1N$, тобто точки M_1 і N_1 прямої b рівновіддалені від прямої a.

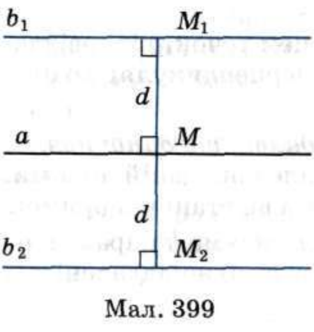
2) Доведемо, що коли дві довільні точки M_1 і N_1 прямої b лежать на однаковій відстані від прямої a і по один бік від неї, то пряма b паралельна прямій a (мал. 398).

Нехай M_1M і N_1N — перпендикуляри до прямої a. За умовою $M_1M = N_1N$.

Оскільки $\angle M_1MN = \angle N_1NK$, то $MM_1 \parallel NN_1$. Тому $\angle MM_1N = \angle N_1NM_1$ (внутрішні різносторонні кути). Отже, $\triangle MM_1N = \triangle N_1NM_1$ (за I ознакою). Тому $\angle M_1N_1N = \angle M_1MN = 90^\circ$. Але кути M_1N_1N і N_1NK — внутрішні різносторонні для прямих a і b. Тому $a \parallel b$.

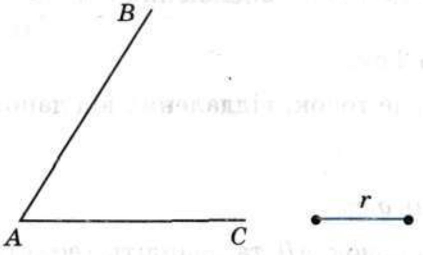
Таким чином, геометричним місцем точок, віддалених від даної прямої на задану відстань d, є дві прямі, паралельні даній, кожна точка яких знаходиться на заданій відстані від прямої.

На малюнку 399: $b_1 \parallel a$, $b_2 \parallel a$, $M_1M = M_2M = d$. Відстань d також називають *відстанню між паралельними прямими* (наприклад, b_1 і a).

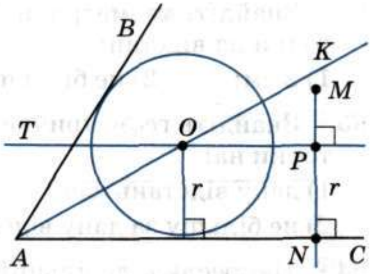


Мал. 399

Суть методу геометричних місць у задачах на побудову полягає в наступному. Нехай, необхідно побудувати точку A, що задовольняє дві умови. Будуємо геометричне місце точок, що задовольняє першу умову — фігура F_1, і геометричне місце точок, що задовольняє другу



Мал. 400



Мал. 401

умову — фігура F_2. Шукана точка A належить як F_1, так і F_2, а тому є точкою їх перетину.

Задача. У даний кут вписати коло даного радіуса.

Р о з в' я з а н н я. Нехай дано кут A (мал. 400), в який треба вписати коло радіуса r (тобто таке коло радіуса r, яке дотикається сторін кута).

Спочатку знайдемо центр цього кола — точку O. Ця точка задовольняє дві умови: 1) належить бісектрисі кута (бо є рівновіддаленою від сторін кута); 2) знаходиться на відстані r, наприклад від сторони кута AC.

Звідси побудова:

1) будуємо бісектрису кута A — промінь AK (мал. 401);

2) будуємо пряму, перпендикулярну до прямої AC, що проходить через деяку точку M, яка лежить всередині кута;

3) визначаємо на побудованій прямій точку P, що знаходиться на відстані r від прямої AC;

4) проводимо через P пряму PT, перпендикулярну до прямої PN; тоді прямі PT і AC — паралельні, кожна точка прямої PT знаходиться на відстані r від прямої AC;

5) пряма PT перетинає промінь AK в точці O. Ця точка і є центром кола, вписаного в кут A, що має радіус r;

6) описуємо коло радіуса r з центром у точці O, воно дотикається сторін кута.

Д о в е д е н н я цього випливає з побудови.

Що називають геометричним місцем точок? • Що являє собою геометричне місце точок, рівновіддалених від заданої точки, відстань від яких до даної точки не перевищує заданої відстані; рівновіддалених від сторін кута; рівновіддалених від кінців відрізка; віддалених від даної точки на дану відстань? • У чому суть методу геометричних місць?

662②. Знайдіть геометричне місце точок, віддалених від даної точки на відстань:

1) 2 см; 2) не більше за 2 см.

663②. Знайдіть геометричне місце точок, віддалених від даної точки на:

1) дану відстань a см;

2) не більшу за дану відстань a см.

664②. Накресліть довільний відрізок AB та знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від кінців цього відрізка.

665②. Побудуйте відрізок MN завдовжки 4 см та геометричне місце точок, рівновіддалених від його кінців.

666②. Побудуйте тупий кут та геометричне місце точок, рівновіддалених від сторін цього кута.

667②. Побудуйте гострий кут та геометричне місце точок, рівновіддалених від сторін цього кута.

668③. Позначте точку P і F, відстань між якими 6 см. Знайдіть геометричне місце точок, віддалених від кожної з даних точок на відстань 5 см.

Урок 47

669③. Побудуйте геометричне місце точок, що знаходяться на відстані даного відрізка a від заданої прямої.

670③. Побудуйте геометричне місце точок, що знаходяться на відстані 4 см від заданої прямої.

671③. Знайдіть геометричне місце центрів кіл, що проходять через точку P і мають радіус r.

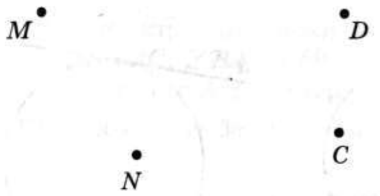
672③. Знайдіть геометричне місце центрів кіл, що дотикаються до даної прямої у даній точці M.

673③. Знайдіть геометричне місце вершин рівнобедреного трикутника із заданою основою — відрізком AB.

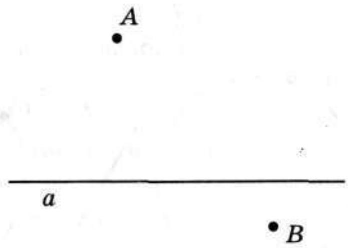
674③. Знайдіть геометричне місце точок центрів кіл, що проходять через дві задані точки — P і L.

675③. Побудуйте геометричне місце точок, рівновіддалених від двох заданих паралельних прямих.

676④. Дано пряму a і точку A. Знайдіть геометричне місце точок, які віддалені від прямої a на 4 см, а від точки A на 3 см. Скільки розв'язків може мати задача залежно від розміщення точки A і прямої a?



Мал. 402



Мал. 403

677④. Скопіюйте малюнок 402 в зошит. Побудуйте таку точку A, щоб $AM = AN$ і $AC = AD$.

678④. Побудуйте коло даного радіуса, яке дотикається двох даних кіл.

679④. Побудуйте коло даного радіуса, яке дотикається даної прямої і даного кола.

680④. Два населених пункти A і B розташовані по різні боки від річки a (мал. 403). В якому місці необхідно побудувати міст через річку, щоб він був рівновіддалений від пунктів A і B?

681④. Побудуйте трикутник за двома сторонами та висотою, що проведена до однієї з них. Скільки розв'язків має задача?

682④. Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї кутом та висотою, що проведена до цієї сторони.

683③. Периметр рівнобедреного трикутника на 18 см більший за основу трикутника. Чи можна знайти довжину бічної сторони?

684④. Один із зовнішніх кутів прямокутного трикутника дорівнює 120°. Знайдіть відношення меншого катета до гіпотенузи.

685④. Два кола з центрами в точках O_1 і O_2 перетинаються в точках A і B, кожне з них проходить через центр іншого. Знайдіть кути O_1AO_2 і AO_1B.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ З ТЕМИ «КОЛО І КРУГ. ГЕОМЕТРИЧНІ ПОБУДОВИ»

Урок 48

1①. Знайдіть діаметр кола, якщо його радіус дорівнює 26 мм.